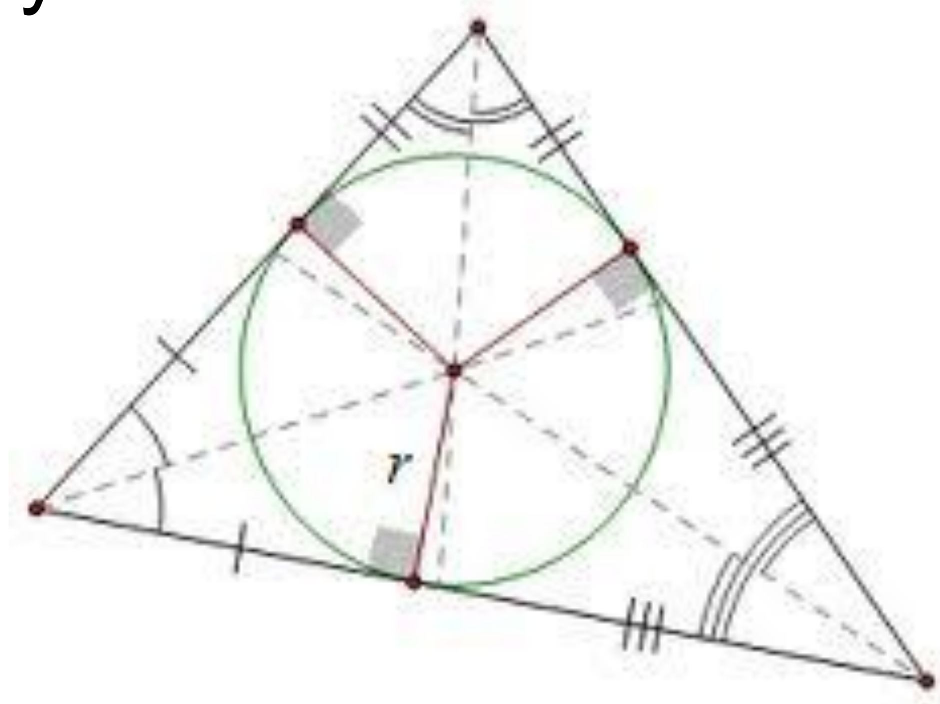
Многовариантные планиметрические задачи: взаимное расположение фигур

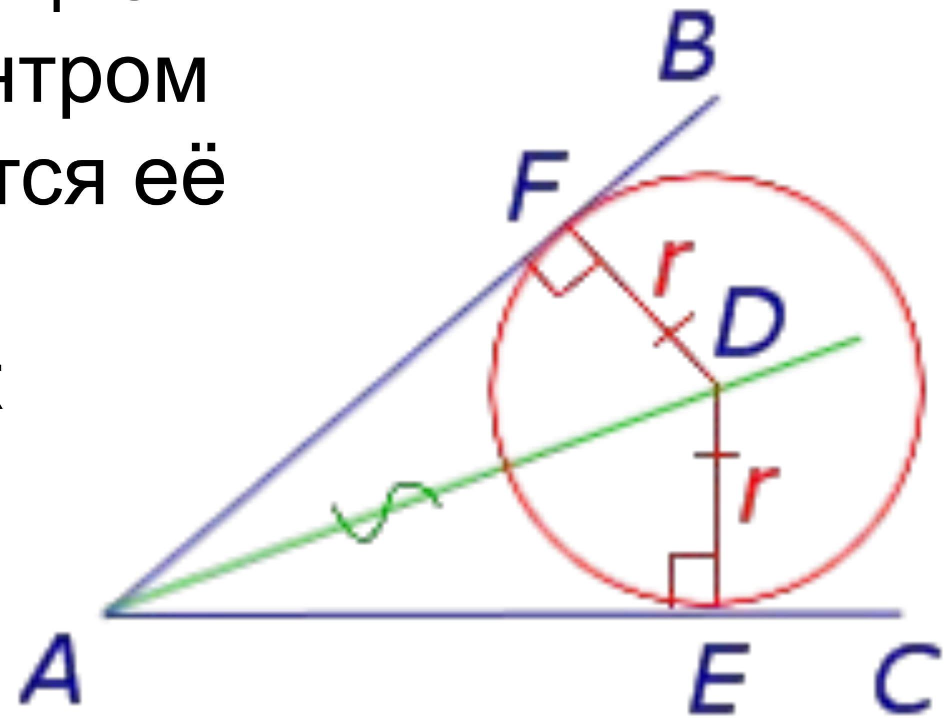
Окружность

- Во многих задачах встречается окружность, касающаяся сторон угла. Напомним, что в этом случае:
- Центр окружности лежит на биссектрисе угла



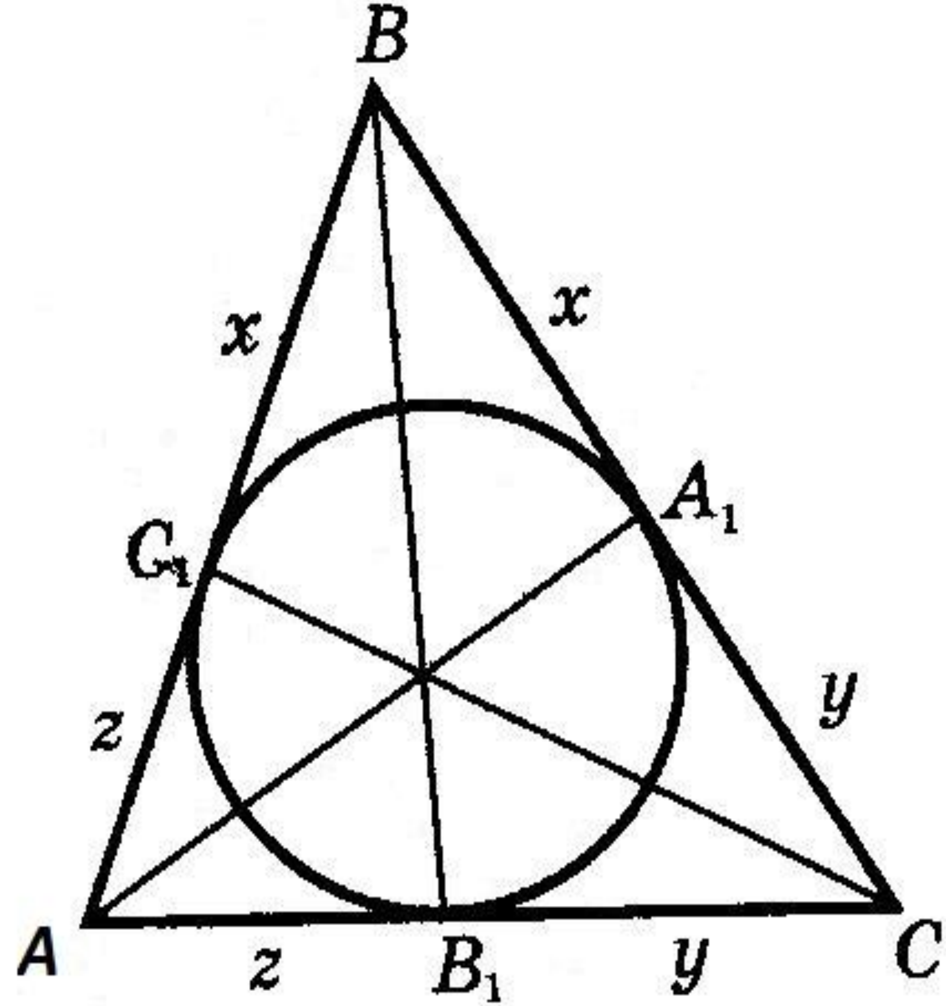
Окружность

- Отрезки, соединяющие точки касания с центром окружности, являются её радиусами и перпендикулярны к сторонам угла



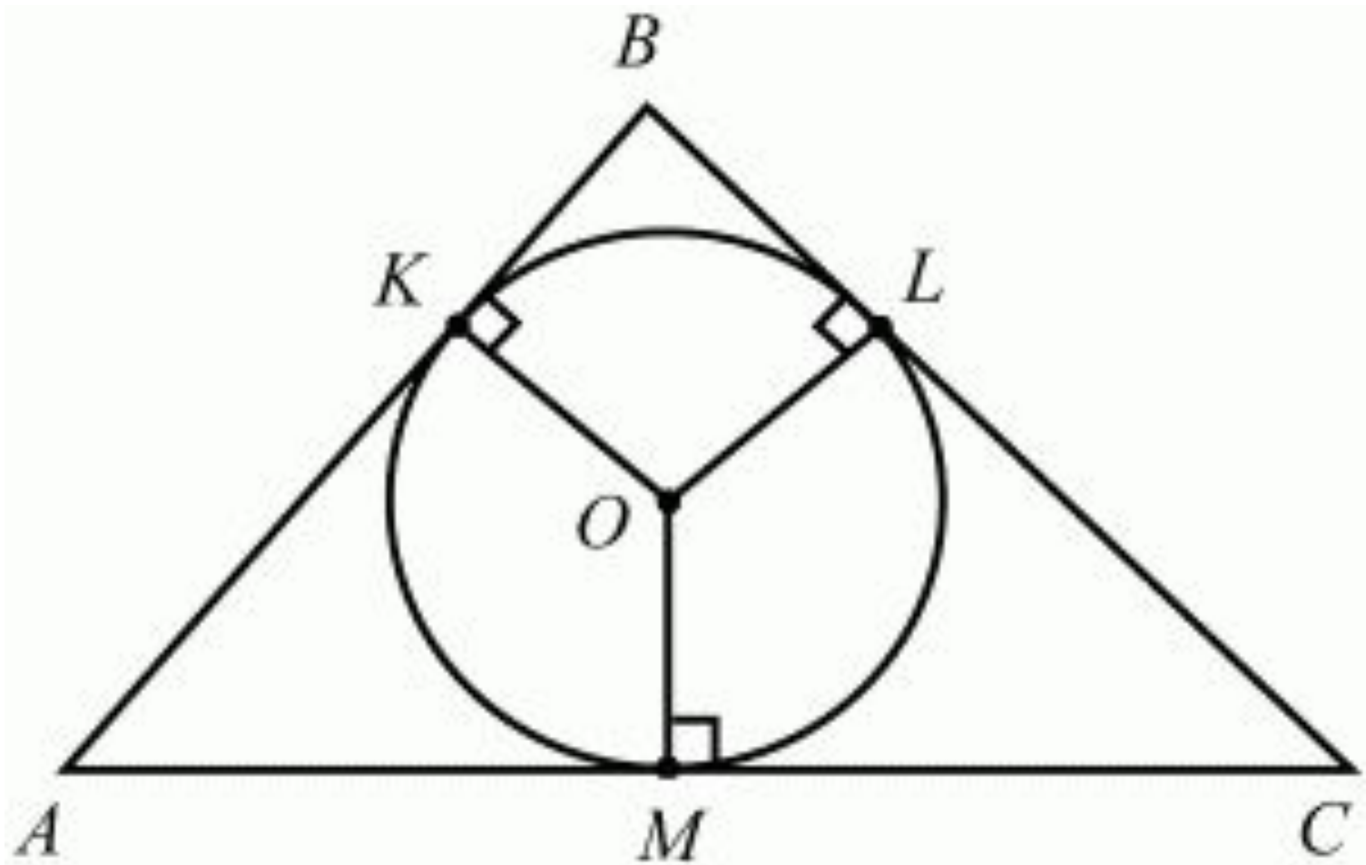
Окружность

- Расстояния от вершины угла до точек касания равны



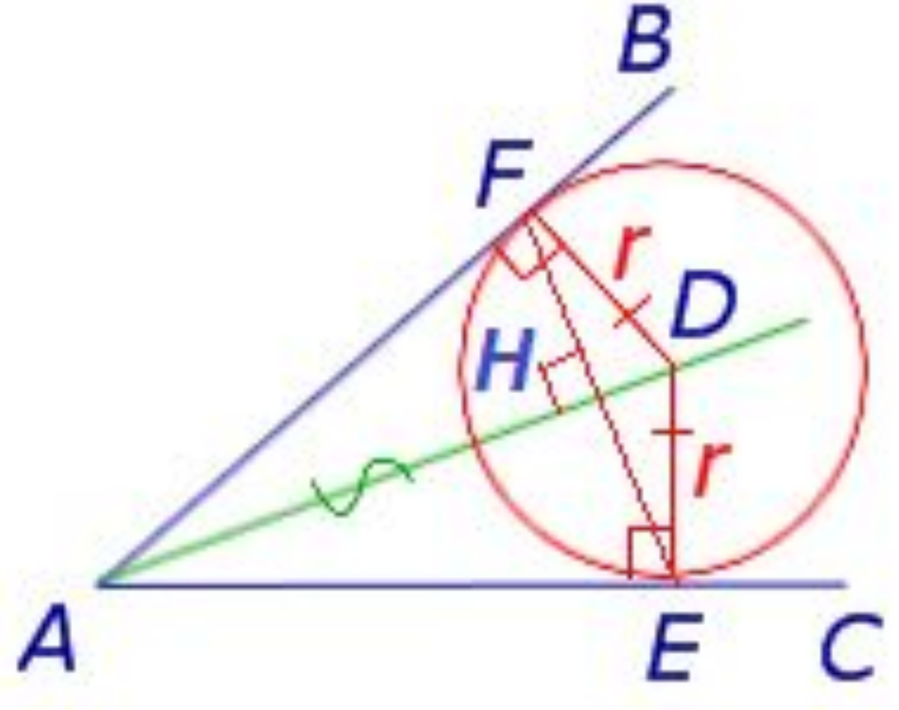
Окружность

- Угол KAM + Угол KOM = 180°



Проверь себя

- Окружность с центром D касается сторон угла A в точках F и E. Радиус окружности равен 7. AD = 25. Найдите FE.



Решение

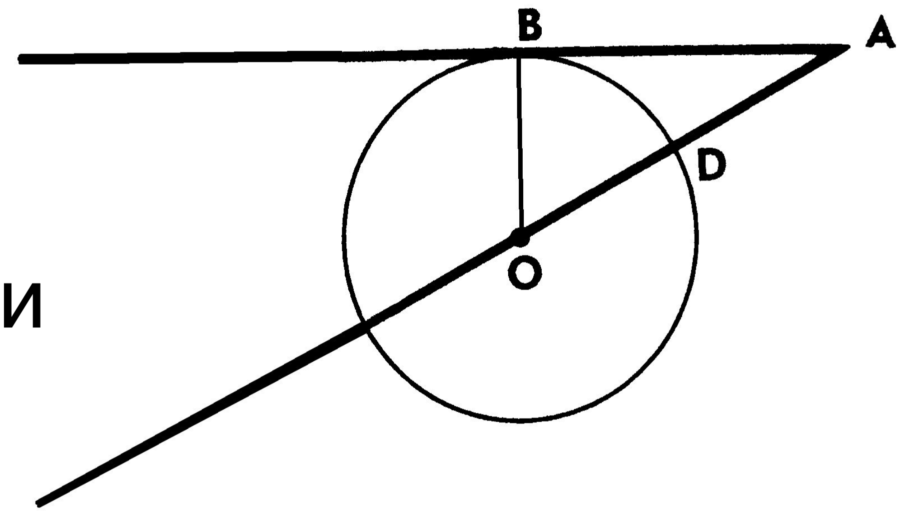
- Т. к. DF перпендикулярна AF, то в треугольнике AFD
- $AF = \sqrt{(AD^2 — FD^2)} = \sqrt{(25^2 — 7^2)} = 24$
- Тогда AE = AF = 24
- В треугольнике AFE отрезок AH — биссектриса и AF = AE, следовательно, AH перпендикулярна FE и FH = HE.
- Найдем высоту FH прямоугольного треуголника AFD:

Решение

- FH * AD = AF * FD
- FH = (7 * 24) / 25 = 6,72
- Тогда FE = 2FH = 13,44
- **Ответ: 13,44**

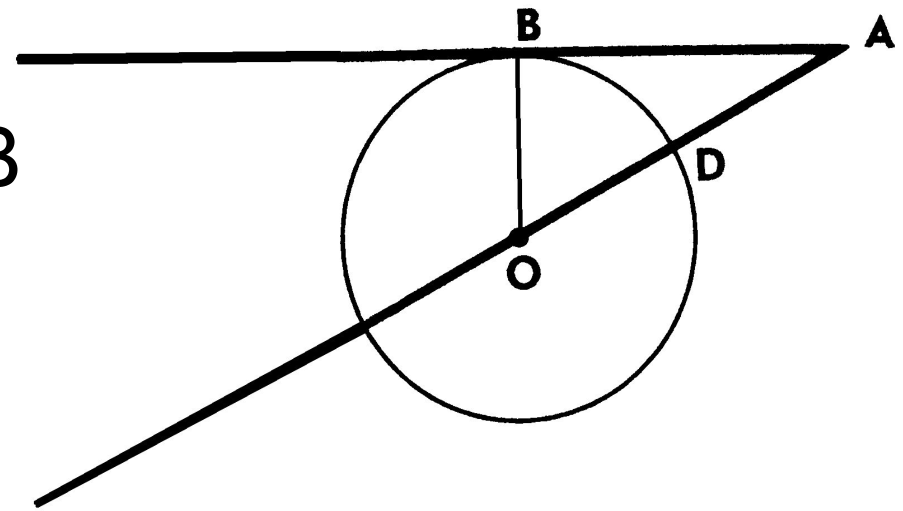
Задание №2

- К окружности с центром О проведена секущая АО и касательная АВ. Расстояние от А до точки касания равна 40, расстояние от до D равно 20. Найдите радиус окружности, которая касается прямых АВ и АО и отрезка ОВ.



Решение

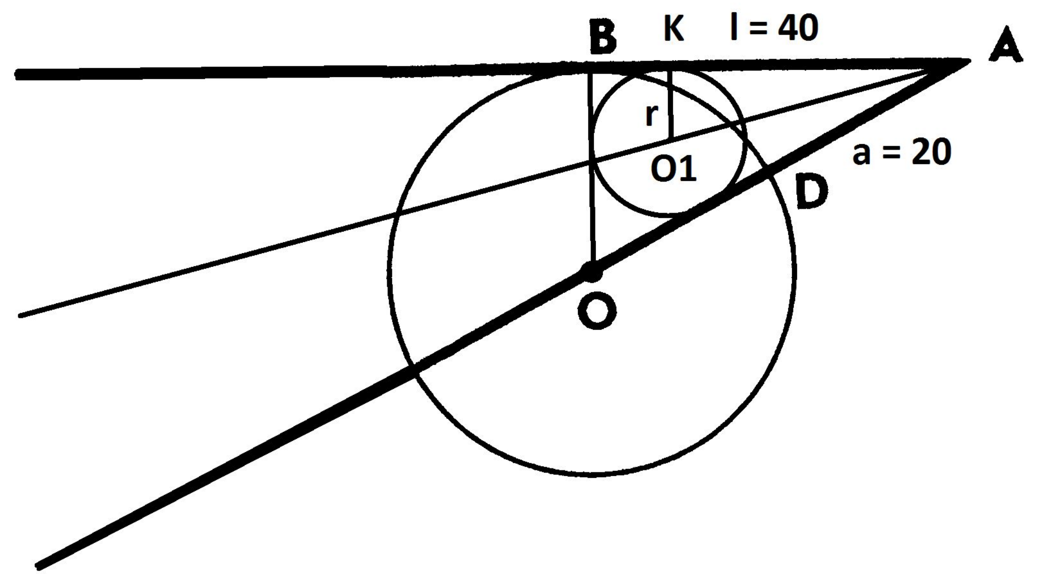
- Обозначим AD = a, AB = l, OB = R, O_1K = r.
  OB перпендикулярна AB
  треугольник AOB прямоугольный.



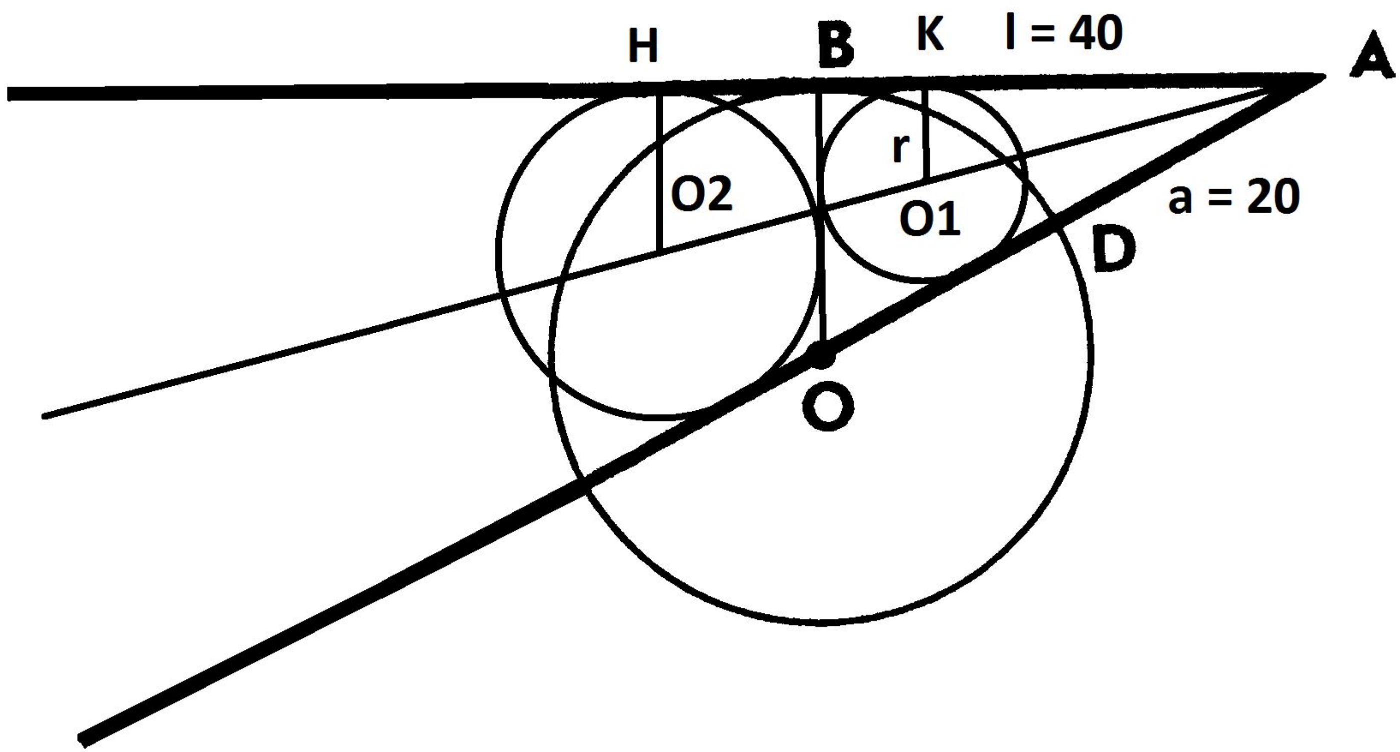
- $AB^2 + OB^2 = OA^2$
- $R^2 + l^2 = (R^2 + a^2)$
- $l^2 = 2aR + a^2$
- $R = (l^2 — a^2) / 2a = (40^2 — 20^2) / 2 * 20 = 30$

Случай №1

- Найдем радиус r окружности, вписанной в треугольник ABO.
- $2r + 2AO = P_{AOB}$
- $r = (P_{AOB} — 2AO) / 2 = (120 — 2 * 50) / 2 = 10$

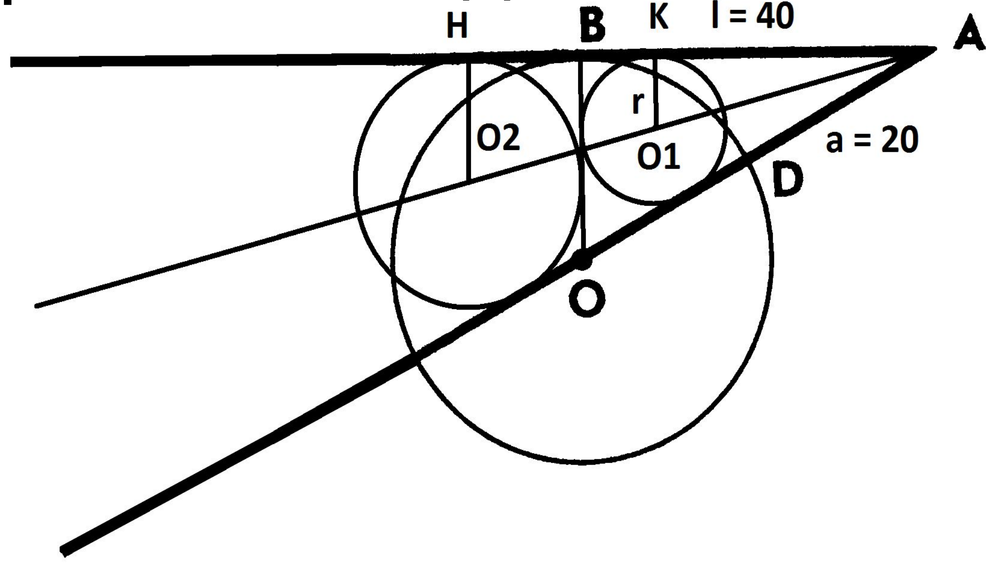


Случай №2



Случай №2

- Окружность касается треугольника OBA внешним образом (продолжения AB и AD). Центры окружностей в 1 и 2 случаях лежат на биссектрисе угла BAO, O_1K перпендикулярна AB, O_2H перпендикулярна AB, следовательно O_1K параллельна O_2H.
-



Случай №2

- Треугольник AO_1K подобен треугольнику AO_2H, тогда $r / O_2H = AK / AH$, $AK = AB — r$, $AH = AB + O_2H$, $r / O_2H = (AB — r) / (AB + O_2H)$.
- Пусть $O_2H = x$, $r / x = (AB — r) / (AB + x)$, $r / x = (40 — r) / (40 + x)$; $10 / x = (40 — 10) / (40 + x)$; $10 * (40 + x) = 30x$, $20x = 400$, $x = 20$, $O_2H = 20$
- **Ответ: 10 или 20**