

Предел функции

Определение

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ суще-

ствует такое число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пояснение

Поясним это определение предела функции. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 , если значения $f(x)$ при x , достаточно близких к x_0 , становятся как угодно близкими к числу A , т. е. значения $|f(x) - A|$ становятся как угодно малыми.

Пояснение

Это означает, что можно взять сколь угодно малое положительное число ε и убедиться в том, что для всех x , отличающихся от x_0 меньше чем на некоторое число δ , модуль разности между $f(x)$ и числом A будет меньше взятого числа ε .

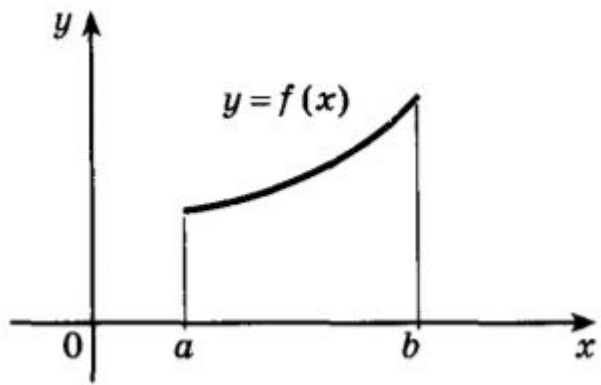
Например, если $f(x) = (x - 2)^2 + 3$, то $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

Действительно, $|f(x) - 3| = |x - 2|^2$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$, т. е. неравенство $|x - 2|^2 < \varepsilon$, равносильно неравенству $|x - 2| < \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому для всех x , таких, что $|x - 2| < \delta$, где $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, справедливо неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$. Например, если $\varepsilon = 0,01$, то $\delta = 0,1$, а если $\varepsilon = 0,0001$, то $\delta = 0,01$.

Непрерывность функции

Понятие предела функции тесно связано с понятием непрерывности.

Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т. е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаша от листа бумаги, то эту функцию называют *непрерывной на этом промежутке*.



Непрерывность функции

Все элементарные (линейная, квадратичная, тригонометрические и др.) функции, которые изучаются в школьном курсе математики, являются непрерывными на каждом промежутке, на котором они определены. Сформулируем теперь строгое определение *непрерывности функции*.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Свойства пределов

1) Предел постоянной величины

Предел постоянной величины равен самой постоянной величине:

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C$$

Свойства пределов

2) Предел суммы

Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Аналогично предел разности двух функций равен разности пределов этих функций.

Расширенное свойство предела суммы:

Предел суммы нескольких функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) + \dots + f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Аналогично предел разности нескольких функций равен разности пределов этих функций.

Свойства пределов

4) Предел произведения

Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

Расширенное свойство предела произведения

Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow 2} f_n(x)$$

Свойства пределов

5) Предел частного

Предел частного двух функций равен отношению пределов этих функций при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{если } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Определение

Предел отношения синуса к его аргументу равен единице в случае, когда аргумент стремится к нулю.

Следствия из первого замечательного предела

$$1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

здесь e - число Эйлера.

Определение

Число e - математическая константа, являющаяся трансцендентным числом.

Чаще всего называется числом Эйлера, реже - числом Непера.

Следствия из второго замечательного предела

$$1 \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m$$