Предел функции

Определение

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пояснение

Поясним это определение предела функции. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если значения $f(x)$ при x, достаточно близких к x_0, становятся как угодно близкими к числу A, т. е. значения $|f(x) - A|$ становятся как угодно малыми.

Пояснение

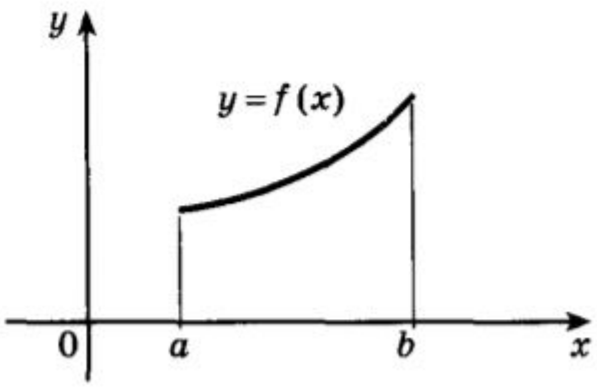
Это означает, что можно взять сколь угодно малое положительное число ε и убедиться в том, что для всех x, отличающихся от x_0 меньше чем на некоторое число δ, модуль разности между $f(x)$ и числом A будет меньше взятого числа ε.

Например, если $f(x) = (x - 2)^2 + 3$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$.

Действительно, $|f(x) - 3| = |x - 2|^2$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$, т. е. неравенство $|x - 2|^2 < \varepsilon$, равносильно неравенству $|x - 2| < \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому для всех x, таких, что $|x - 2| < \delta$, где $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, справедливо неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$. Например, если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\delta = 0{,}1$, а если $\varepsilon = 0{,}0001$, то $\delta = 0{,}01$.

Непрерывность функции

Понятие предела функции тесно связано с понятием непрерывности.
Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т. е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаша от листа бумаги, то эту функцию называют *непрерывной на этом промежутке*.



Непрерывность функции

Все элементарные (линейная, квадратичная, тригонометрические и др.) функции, которые изучаются в школьном курсе математики, являются непрерывными на каждом промежутке, на котором они определены. Сформулируем теперь строгое определение *непрерывности функции*.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Свойства пределов

1) **Предел постоянной величины**

Предел постоянной величины равен самой постоянной величине:

$$\lim_{x \to a} C = C$$

Свойства пределов

2) **Предел суммы**

Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

Аналогично предел разности двух функций равен разности пределов этих функций.

Расширенное свойство предела суммы:

Предел суммы нескольких функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) + \ldots + f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \ldots + \lim_{x \to 0} f_n(x)$$

Аналогично предел разности нескольких функций равен разности пределов этих функций.

Свойства пределов

4) **Предел произведения**

Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to 0} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$$

Расширенное свойство предела произведения

Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to 0} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x\to 2} f_n(x)$$

Свойства пределов

5) **Предел частного**

Предел частного двух функций равен отношению пределов этих функций при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to \infty} f(x)}{\lim_{x \to 0} g(x)}, \quad \$ecл\$ \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Определение

Предел отношения синуса к его аргументу равен единице в случае, когда аргумент стремится к нулю.

Следствия из первого замечательного предела

1 $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

2 $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

3 $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

4 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

здесь e - число Эйлера.

Определение

Число e - математическая константа, являющаяся трансцендентным числом. Чаще всего называется числом Эйлера, реже - числом Непера.

Следствия из второго замечательного предела

1 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

2 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$

3 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

4 $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$

5 $\lim_{x\to0}\frac{a^{x}-1}{x} = \ln a, a \in (0;1)\cup(1;+\infty)$

6 $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{m}-1}{x} = m$