

# Методы многокритериальной оптимизации

1

① Методы обобщенного скалярного критерия

$$F(X) = [f_1(X), \dots, f_m(X)]^T \Leftrightarrow \Phi(X) \rightarrow \min_{X \in D}$$

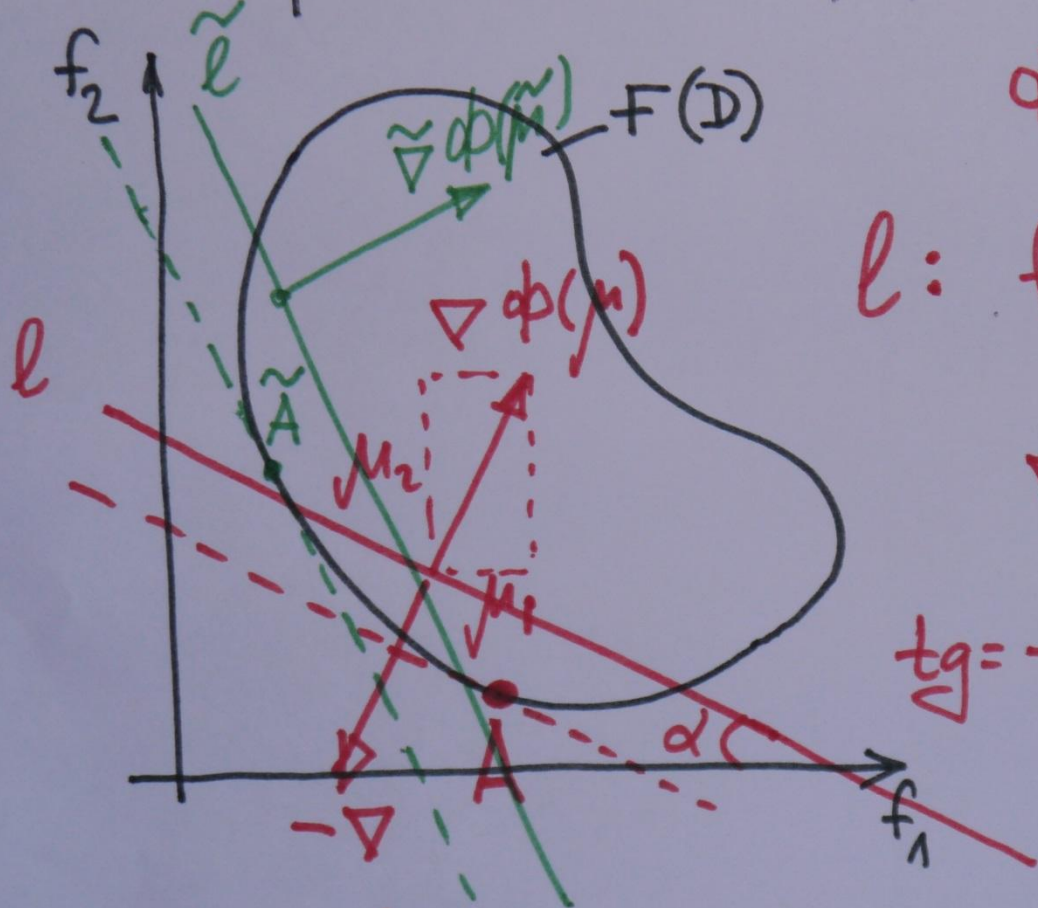
① Линейная свертка:  $\Phi(F, \mu) = \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(X) \quad (1)$

$$\mu = [\mu_1, \dots, \mu_m] \in \bar{M} = \left\{ \mu \in E^m \mid \mu_i \geq 0, i=1, \dots, m; \sum_{i=1}^m \mu_i = 1 \right\} \quad (2)$$

$\mu$  - вектор весовых коэффициентов.

⚠ Если  $f_i(X)$  имеют различный физич. смысл, то необходима нормализация критериев:  $\hat{f}_i(X) = \frac{f_i(X) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}$   
 $0 \leq \hat{f}_i(X) \leq 1, i=1, \dots, m$

# Геометрическая интерпретация



$$\phi(F, \mu) = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 = C$$

$$l: f_2 = \frac{C}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} f_1$$

$$\nabla \phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial f_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}^T$$

$$tg = -\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

т. А - опт. решение  
 $\phi(F(X), \mu) \rightarrow \min_{X \in D}$

задача  
 $\Leftrightarrow \phi(F, \mu) \rightarrow \min_{F \in F(D)}$



$$a) \mu_1 = 0,5; \mu_2 = \mu_3 = 0,25.$$

$$\varphi(F(X), \mu) = 0,5f_1(X) + 0,25f_2(X) + 0,25f_3(X) = \\ = 0,25x_1 + 0,5x_2.$$

$$\nabla \varphi = \left[ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]^T \Rightarrow \text{т. В}(2; 4) - \text{оптим. решение.}$$

$$\underline{f_1(B) = 6; f_2(B) = 8; f_3(B) = -10.}$$

$$b) \mu_2 = 0,5; \mu_1 = \mu_3 = 0,25.$$

$$\varphi(F(X), \mu) = 0,25f_1(X) + 0,5f_2(X) + 0,25f_3(X) = x_1 + 0,25x_2.$$

$$\nabla \varphi = [1; 0,25]^T \Rightarrow \text{т. С}(3; 3) - \text{оптим. реш.}$$

$$\underline{f_1(C) = 3; f_2(C) = 9; f_3(C) = -6.}$$

$$b) \mu_3 = 0,5; \mu_1 = \mu_2 = 0,25.$$

$$\varphi(F(X), \mu) = 0,25f_1(X) + 0,25f_2(X) + 0,5f_3(X) = \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2$$

$$\nabla \varphi = \left[ \frac{3}{4}; -\frac{3}{4} \right]^T \Rightarrow \text{т. Д}(3; 1) - \text{оптим. решение.}$$

$$\underline{f_1(D) = -1; f_2(D) = 7; f_3(D) = 0.}$$

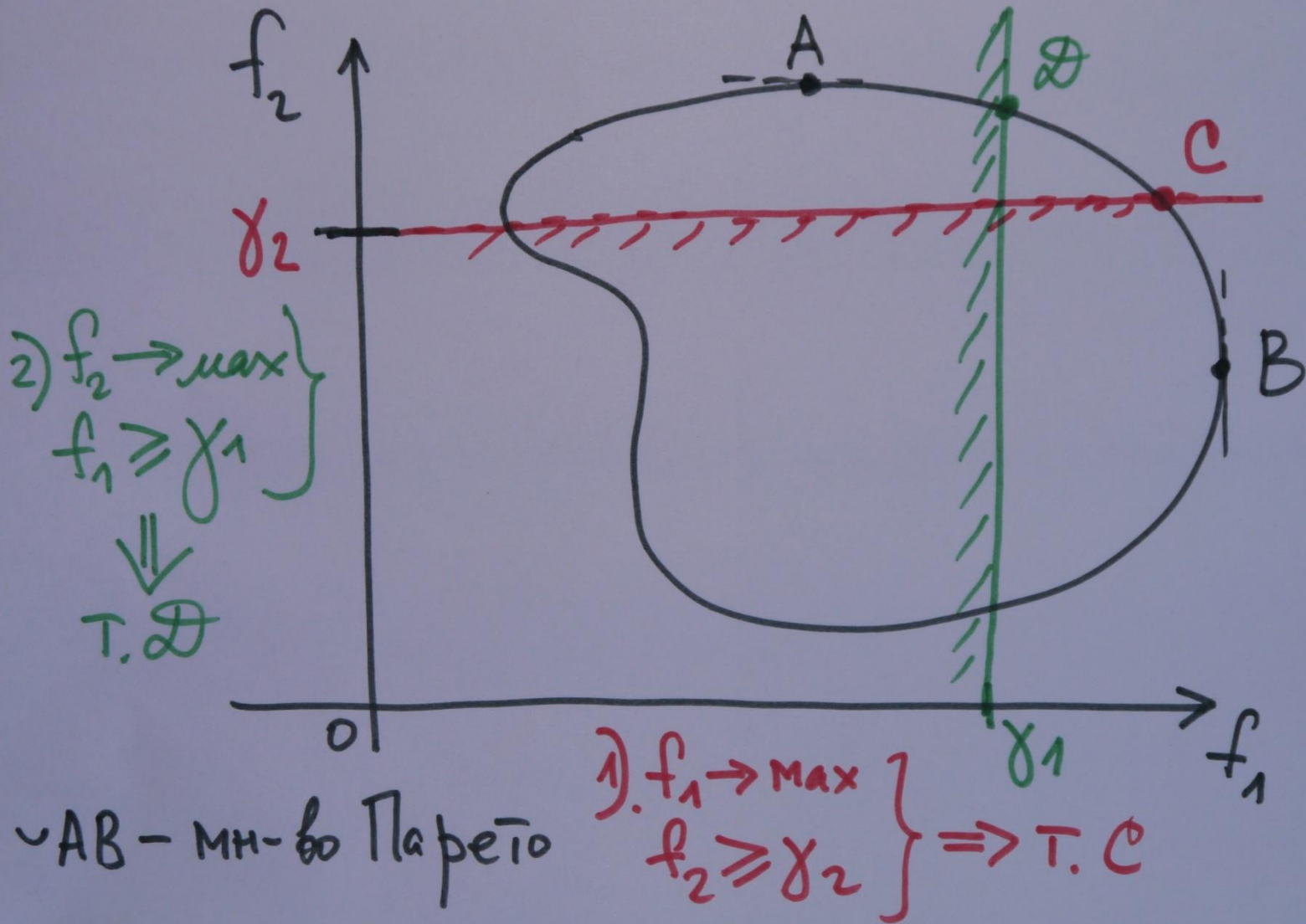
II Методы, использующие информацию о желаемых уровнях значений критериев

1. Пороговая оптимизация:  $f_k(X)$  — основной критерий.

$$f_k(X) \rightarrow \max_{X \in \tilde{D}} \quad (3)$$

$$\tilde{D}: \begin{cases} X \in D; \\ f_i(X) \geq \gamma_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad i \neq k. \end{cases} \quad (4)$$

# Геометрическая интерпретация



Пример 2.

Решить задачу 1 методом  
пороговой оптимизации:

$f_1(X)$  - основной критерий;  $\gamma_2 = 4$ ;  $\gamma_3 = -8$ .

$$f_1(X) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$D:$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

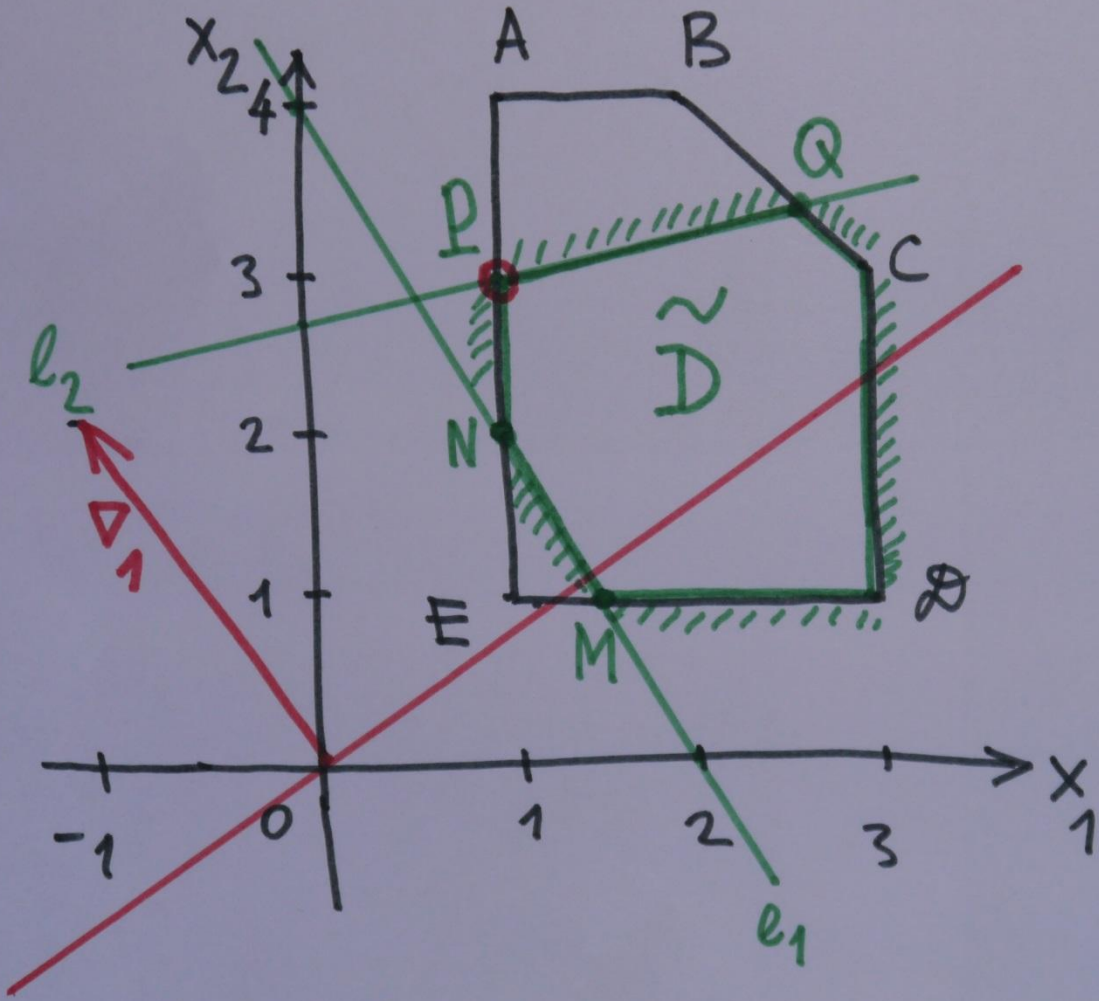
$$1 \leq x_1 \leq 3$$

$$1 \leq x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \geq 4 \rightarrow \ell_1: x_2 \geq 4 - 2x_1$$

$$x_1 - 3x_2 \geq -8 \rightarrow \ell_2: x_2 \leq \frac{1}{3}x_1 + \frac{8}{3}$$

7



$$\nabla_1 = [-1; 2]$$

$$\tilde{D} = MNPQC\emptyset$$

т.п.  $P(1; 3)$  — опт. реш.

$$\left. \begin{aligned} f_1(P) &= 5 \\ f_2(P) &= 5 \\ f_3(P) &= -8 \end{aligned} \right\}$$



## ② Метод "идеальной" точки

19

$$A. \left\{ \begin{array}{l} f_1(X) \rightarrow \max_{X \in D} \Rightarrow f_1^* \\ \dots \\ f_m(X) \rightarrow \max_{X \in D} \Rightarrow f_m^* \end{array} \right\} \Rightarrow F^* = [f_1^*, \dots, f_m^*] - \\ \text{"идеальная" точка.}$$

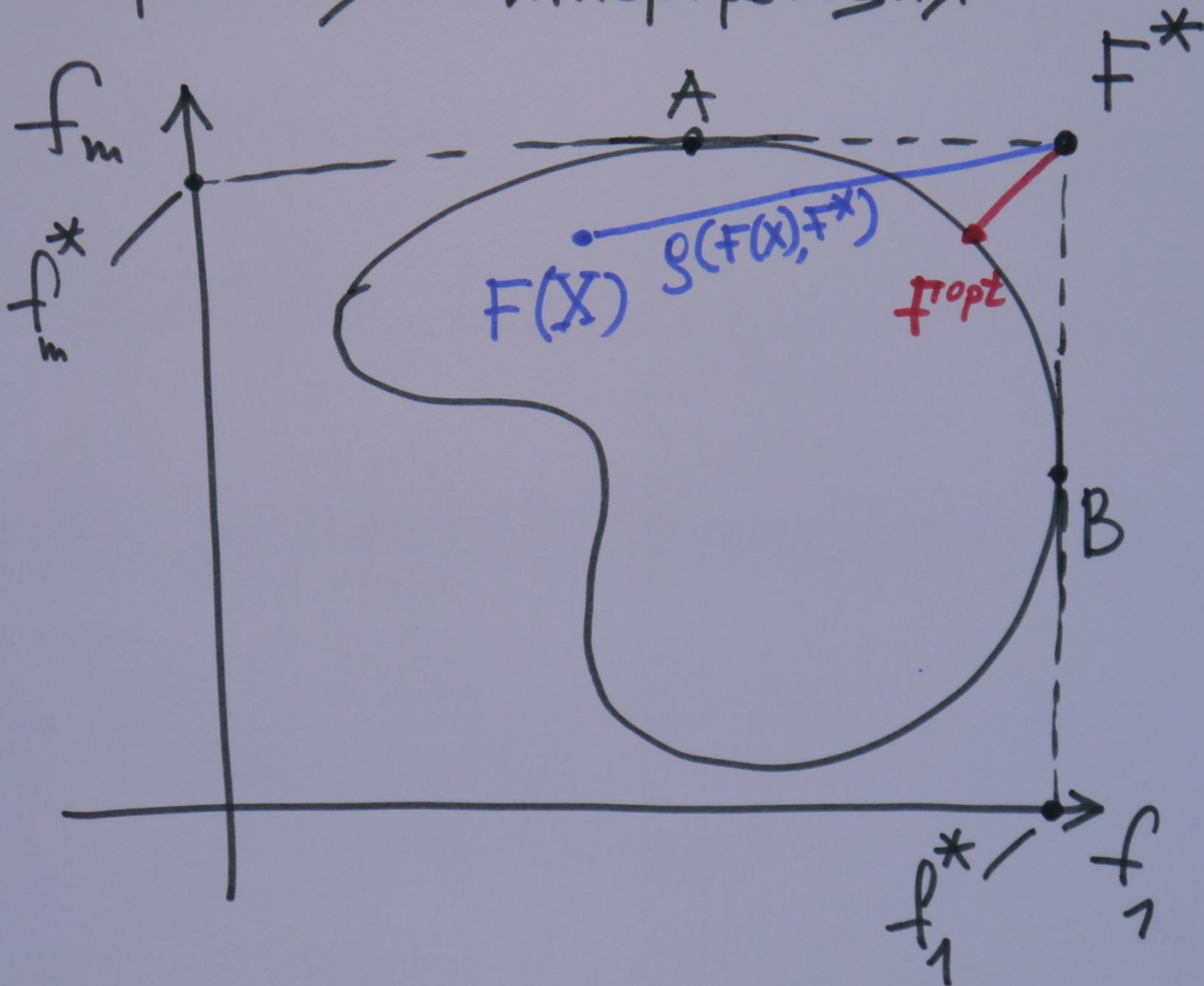
Б. Вводим метрику:

$$\rho(F(X), F^*) = \sum_{i=1}^m (f_i(X) - f_i^*(X))^2$$

В.  $\rho(F(X), F^*) \rightarrow \min_{X \in D} \Rightarrow F^{opt}$

# Геометрическая интерпретация

10



Пример 3. Решить задачу 1 методом "идеальной" точки.

$$\left. \begin{aligned}
 & f_1(X) \rightarrow \max_{X \in D} \Rightarrow \text{т. } A(1;4) \Rightarrow f_1^*(A) = 7 \\
 \text{A) } & f_2(X) \rightarrow \max_{X \in D} \Rightarrow \text{т. } C(3;3) \Rightarrow f_2^* = 9 \\
 & f_3(X) \rightarrow \max_{X \in D} \Rightarrow \text{т. } D(3;1) \Rightarrow f_3^* = 0
 \end{aligned} \right\} F^* = [7; 9; 0]^T$$

$$\begin{aligned}
 \text{B) } \rho(F(X), F^*) &= (f_1(X) - 7)^2 + (f_2(X) - 9)^2 + (f_3(X))^2 \\
 &= (-x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 9)^2 + (x_1 - 3x_2)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{B) } \rho(F(X), F^*) \rightarrow \min_{X \in D}$$

Используем метод Франка-Вулфа:  $X^{opt} = [2,97; 2,28]^T$ ;  $F^* = \begin{bmatrix} 1,59 \\ 8,22 \\ -3,87 \end{bmatrix}$   
 $\rho_{min} = 44,85$ .

III.

Лексикографические методы МО

$$f_1(X) \succ f_2(X) \succ \dots \succ f_m(X)$$

1. Метод последовательных усечений.

1)  $f_1(X) \rightarrow \max_{X \in D} \Rightarrow f_1^* = f_1(X^{*1})$

2) Назнач. усечения  $\delta_1$  по  $f_1(X)$

$$f_2(X) \rightarrow \max_{X \in D_2} \Rightarrow f_2^* = f_2(X^{*2})$$

$$D_2: \begin{cases} X \in D \\ f_1(X) \geq f_1^* - \delta_1 \end{cases}$$

з). Назнач. усгунка  $\delta_2$  по  $f_2(X)$ .

13

$$f_3(X) \rightarrow_{\max_{X \in D_3}} \Rightarrow f_3^* = f_3(X^{*3})$$

$$D_3: \begin{cases} X \in D \\ f_1(X) \geq f_1^* - \delta_1 \\ f_2(X) \geq f_2^* - \delta_2 \end{cases}$$

и т.д. ...

т). Назнач. усгунка  $\delta_{m-1}$  по  $f_{m-1}(X)$ .

$$f_m(X) \rightarrow \max_{X \in D_m} \Rightarrow f_m^* = f_m(X^{*m}) \quad \underline{14}$$

$$D_m: \begin{cases} X \in D \\ f_1(X) \geq f_1^* - \delta_1 \\ \dots \\ f_{m-1}(X) \geq f_{m-1}^* - \delta_{m-1} \end{cases}$$

Полученное решение  $X^{*m}$  считается оптимальным.

Пример 4. Решить задачу 1 методом последовательных усечений.

15

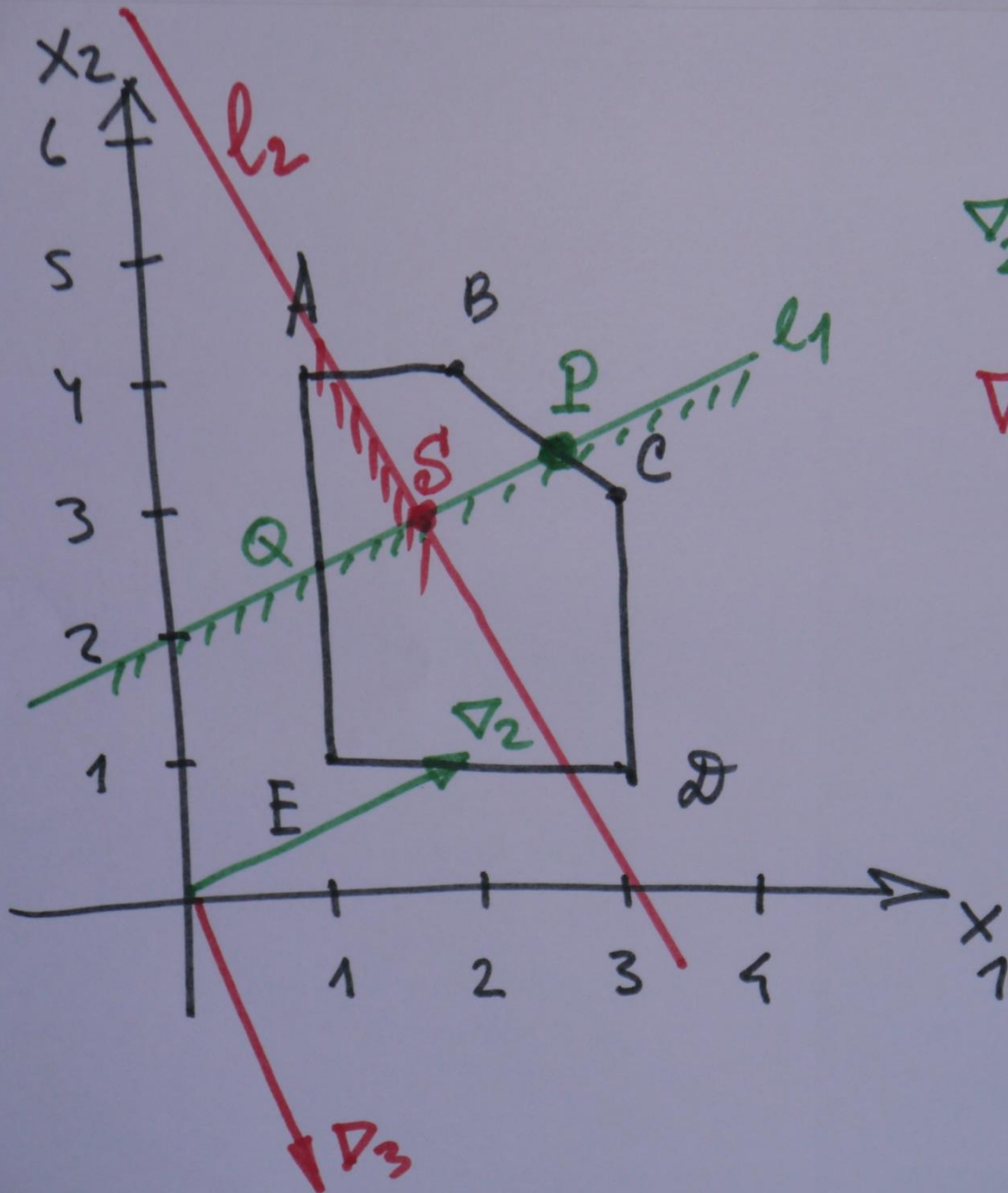
$$f_1 \succ f_2 \succ f_3; \quad \delta_1 = 3; \quad \delta_2 = 5/3$$

$$1). \quad f_1(X) \rightarrow \max_{X \in D} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{т. } A(1;4) = X^{*1} \\ f_1^* = 7 \end{array} \right.$$

$$2). \quad f_2(X) \rightarrow \max_{X \in D_2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{т. } P\left(\frac{8}{3}; \frac{10}{3}\right) = X^{*2} \\ f_2^* = \frac{26}{3} \end{array} \right.$$

$$D_2: \left\{ \begin{array}{l} X \in D \\ f_1(X) \geq 7 - 3 = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X \in D \\ -x_1 + 2x_2 \geq 4 \end{array} \right.$$

$l_1: x_2 \geq 2 + \frac{1}{2}x_1$



$$\nabla_2 = [2; 1]$$

$$\nabla_3 = [1; -3]$$



$$3) \quad f_3(X) \rightarrow \max_{X \in D_2} \Rightarrow \text{т. } S(2;3) = X^* = 3 \quad \boxed{17}$$

$$f_3^* = -7$$

$$D_3: \begin{cases} X \in D \\ f_1(X) \geq 4 \\ f_2(X) \geq \frac{26}{3} - \frac{5}{3} = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \in D \\ -x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$l_2: x_2 \geq 7 - 2x_1$$

Оптимальное решение:

$$X^{opt} = [2; 3]^T; \quad f_1 = 4; \quad f_2 = 7; \quad f_3 = -7.$$