

# **Перпендикулярность прямой и плоскости**

# Цели:

## Обучающие:

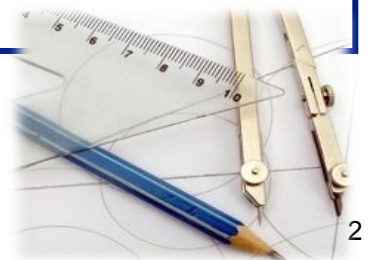
- «открыть» понятия перпендикуляра и наклонной к плоскости;
- формировать умения: читать чертеж; применять определение прямой, перпендикулярной к плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости к задачам на доказательство;
- выработать навыки решения ключевых задач на перпендикулярность прямой и плоскости.

## Развивающие:

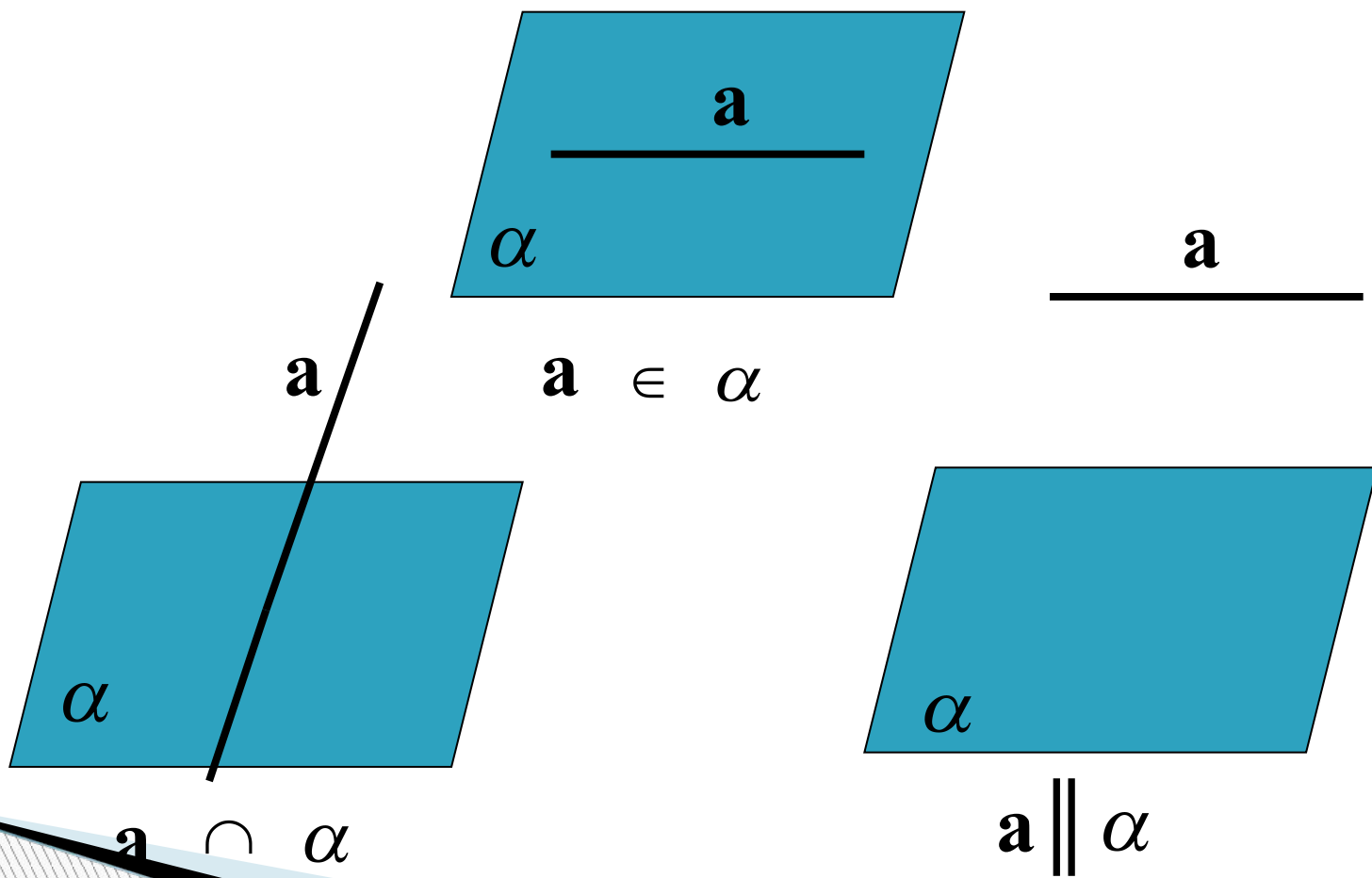
- развивать пространственное воображение, логическое мышление; самостоятельность учащихся и творческое отношение к выполнению заданий.

## Воспитательные:

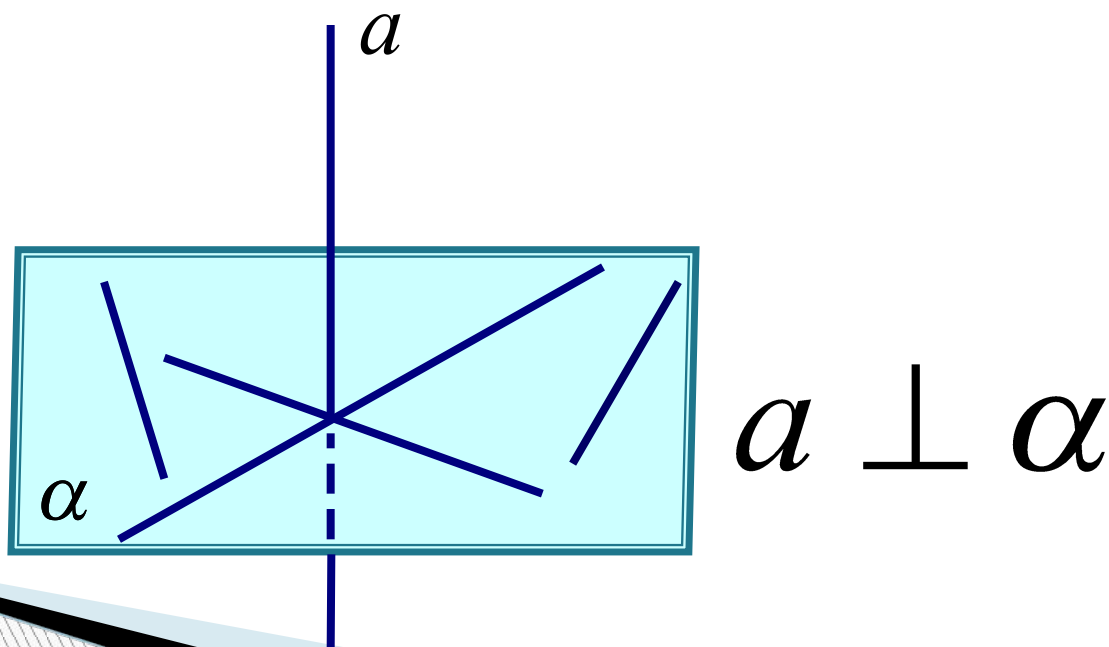
- воспитывать волю и настойчивость для достижения конечных результатов при решении задач, культуру общения.



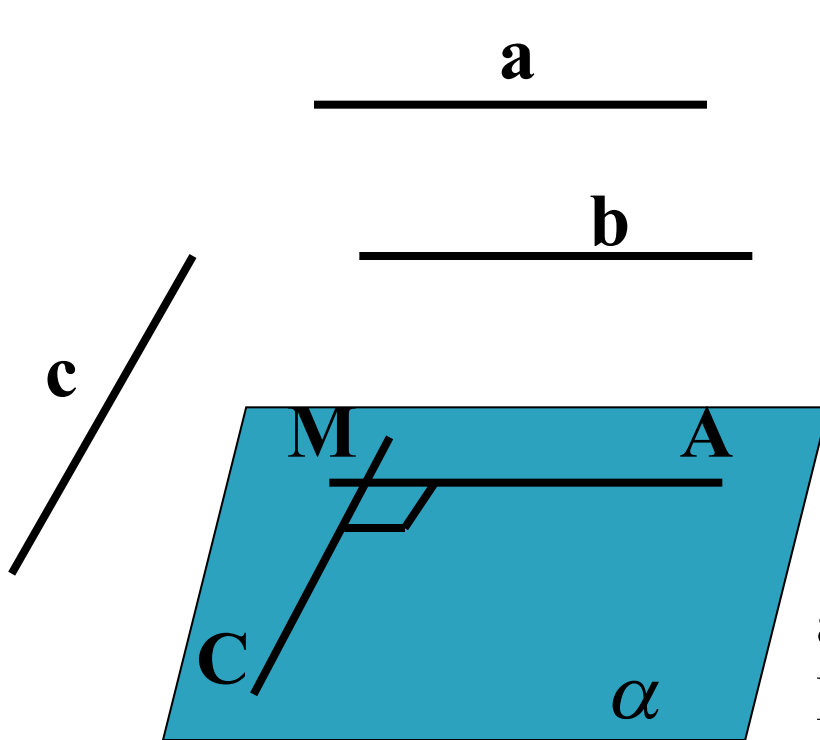
# Взаимное положение прямой и плоскости



Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости



**Лемма:** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.



Дано:  $a \parallel b$ ;  $a \perp c$

Доказать:  $b \perp c$

Доказательство:

Проведем  $CM \parallel c$ ,  $MA \parallel a$ .

Так как  $a \perp c$ , то  $\angle AMC = 90^\circ$

$a \parallel b$  (по условию)  
 $MA \parallel a$  (по построению)  $\} \Rightarrow$

$MA \parallel b$ ,  $MC \parallel c$   
 $MA \perp MC$   $\} \Rightarrow b \perp c$

## Утверждение 1.

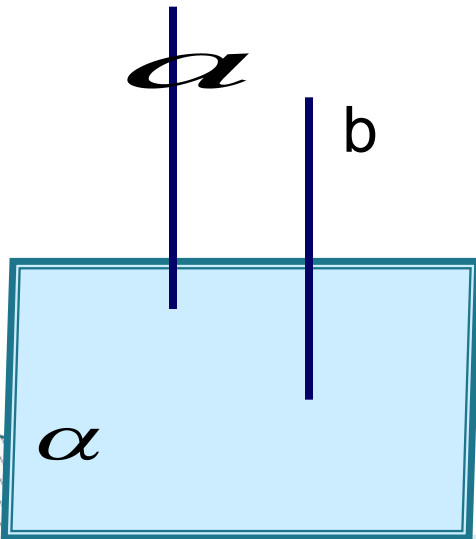
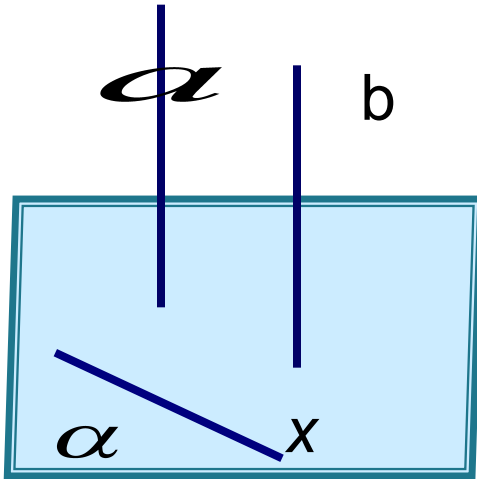
Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости

$$a \parallel b, a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha$$

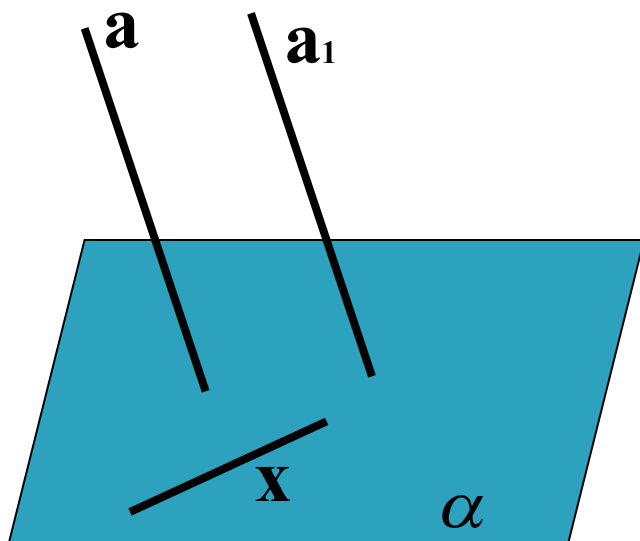
## Утверждение 2.

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны

$$a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$$



**Теорема:** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.



Дано:  $a \parallel a_1$ ;  $a \perp \alpha$

Доказать:  $a_1 \perp \alpha$

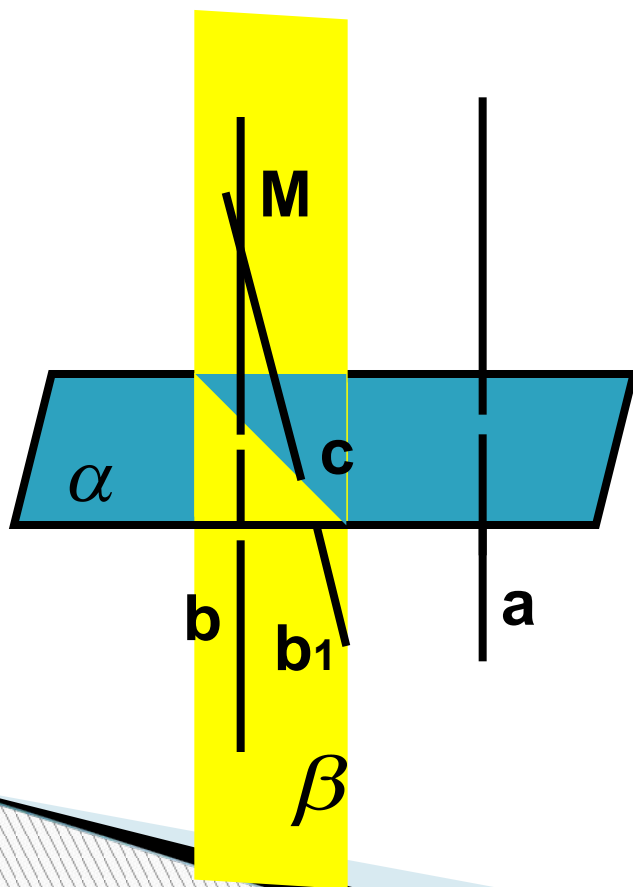
Доказательство:

$x \in \alpha$

Так как  $a \perp \alpha$ , то  $a \perp x$ .

Значит по лемме  $a_1 \perp x \Rightarrow a_1 \perp \alpha$

**Теорема:** Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



Дано:  $a \perp \alpha$   $b \perp \alpha$

Доказать:  $a \parallel b$

Доказательство:

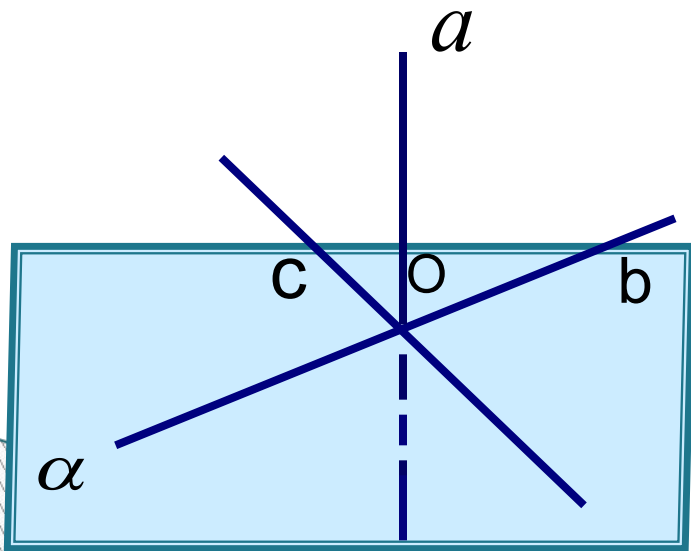
Через точку  $M$  прямой  $b$  проведем  $b_1 \parallel a$ ,  $\Rightarrow b_1 \perp \alpha$

Докажем, что  $b$  и  $b_1$  совпадают.  
Допустим, что они не совпадают.  
Тогда в плоскости через точку  $M$  проходят две прямые,  
перпендикулярные к прямой  $c$  но  
это невозможно. **Значит  $a \parallel b$ .**



# Признак перпендикулярности прямой и плоскости

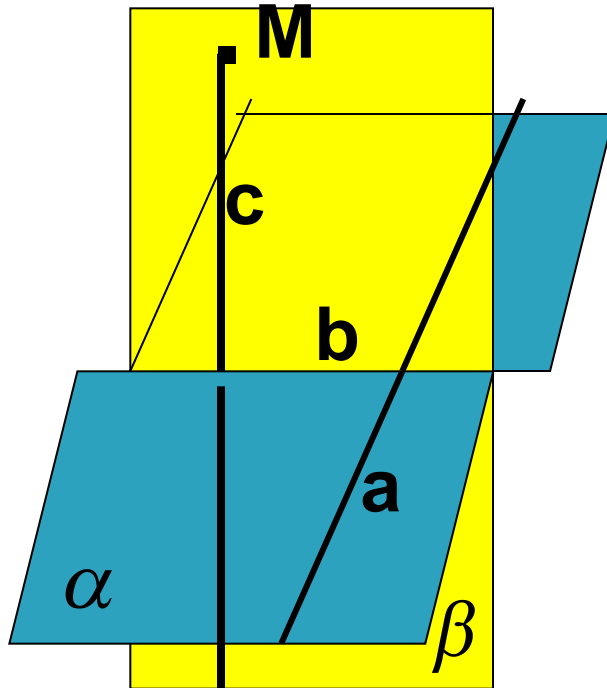
Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости



$$\begin{array}{l} a \perp b , \quad a \perp c \\ b \cap c = O \\ \hline a \perp \alpha \end{array}$$

# Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости.

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и при том только одна.



Дано:  $M, \alpha$

Доказать:  $M \in c, c \perp \alpha$

Доказательство:

Проведем в плоскости  $\alpha$  прямую  $a$  и рассмотрим плоскость  $\beta$

$M \in \beta \quad \beta \perp a.$

$\beta \cap \alpha = b$

В плоскости  $\beta$  проведем прямую  $c \perp b$

$c$  - искомая прямая

Предположим, что через точку  $M$  проходит еще одна прямая  $c_1 \perp \alpha$

Тогда  $c_1 \parallel c$ , это невозможно, так как  $c_1 \cap c = M$

# Устная работа

**№1**

Верно ли утверждение: прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к прямой, принадлежащей плоскости?

**№2**

Могут ли быть перпендикулярны к плоскости две стороны треугольника одновременно?

**№3**

Сторона АВ правильного треугольника ABC лежит в плоскости  $\alpha$ . Может ли прямая BC быть перпендикулярна к этой плоскости?

# Устная работа



№4

Верно ли утверждение: если прямая перпендикулярна двум прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к данной плоскости?

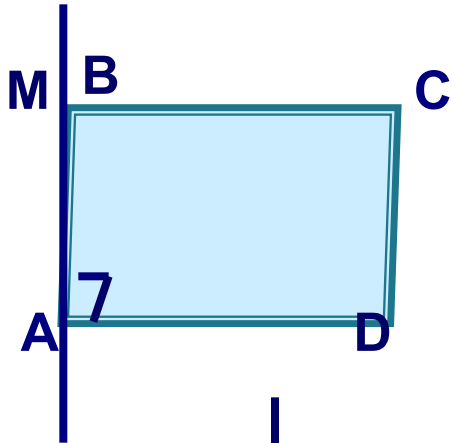
№5

Прямая  $a$  перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ , прямая  $b$  не перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ . Могут ли прямые  $a$  и  $b$  быть параллельными?

№6

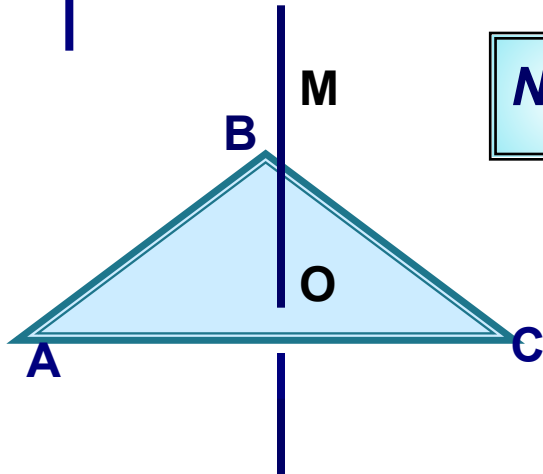
Верно ли утверждение: если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна лежащим в этой плоскости двум сторонам треугольника?

# Устная работа



№7

Через вершину квадрата  $ABCD$  проведена прямая  $AM$ , перпендикулярная к плоскости квадрата. Докажите, что прямая  $AD$  перпендикулярна к плоскости, проходящей через прямые  $AM$  и  $AB$ .



№8

Через центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , проведена прямая, перпендикулярная к плоскости треугольника  $ABC$ . Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника  $ABC$ .

№9

На практике вертикальность столба проверяют, глядя на столб поочередно с двух направлений. Как обосновать правильность такой проверки?

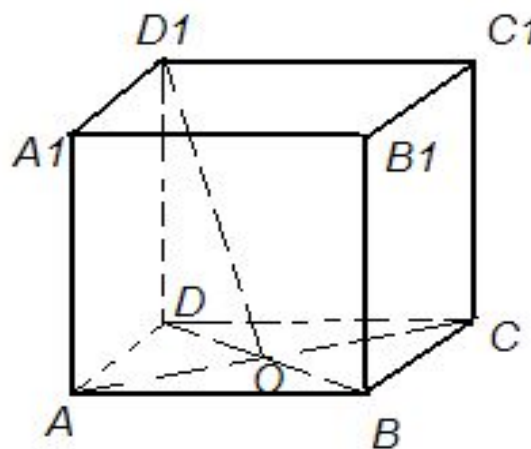
# Карточки для индивидуальной работы

## КАРТОЧКА 1

Дан куб .

Доказать:

- 1)  $AC \perp OD_1$
- 2)  $\angle ABC = 90^\circ$

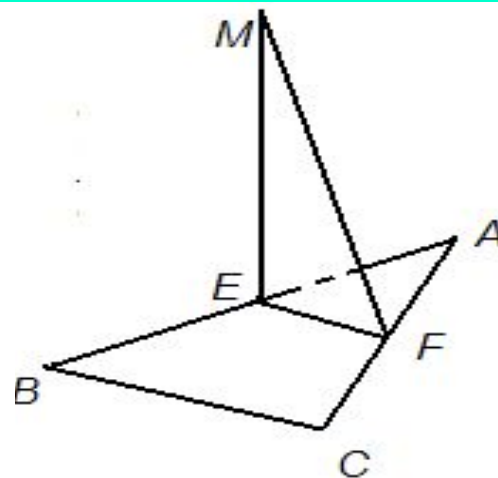


## КАРТОЧКА 2.

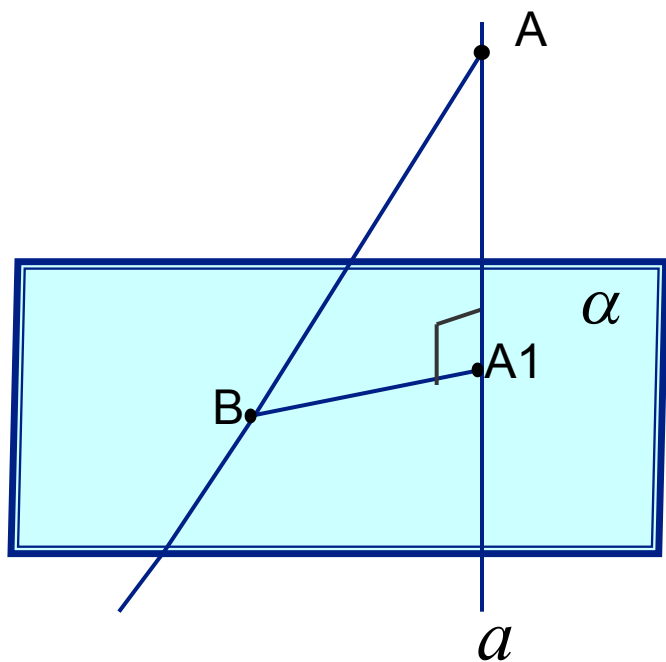
Отрезок EF является средней линией прямоугольного треугольника ABC ( $\angle ACB=90^\circ$ ). Через точку E проведен перпендикуляр ME к плоскости этого треугольника.

Доказать:

- 1)  $MF \perp AC$ , 2)  $MC=MA$ .



# Перпендикуляр и наклонная к плоскости



Прямая  $a$  проходит через точку  $A$  перпендикулярно к плоскости  $\alpha$ . Точка  $A_1$  - проекция точки  $A$  на плоскость  $\alpha$ .

**Отрезок  $AA_1$  называется перпендикуляром к плоскости.**

Точка  $A_1$  - основание перпендикуляра.

**Расстояние от точки  $A$  до плоскости равно длине этого перпендикуляра.**

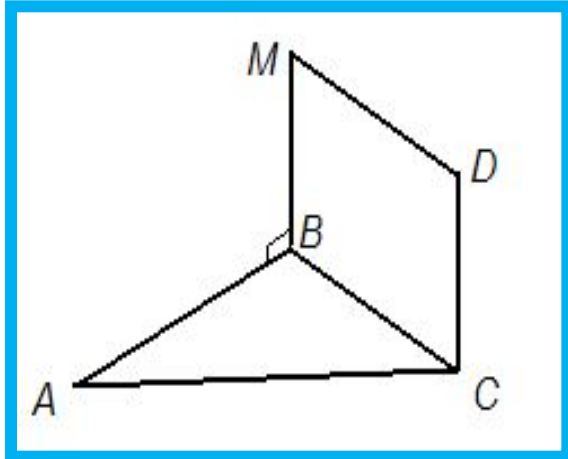
Точка  $B$  - произвольная точка плоскости.

**Отрезок  $AB$  - наклонная к плоскости.**

Точка  $B$  - основание наклонной.

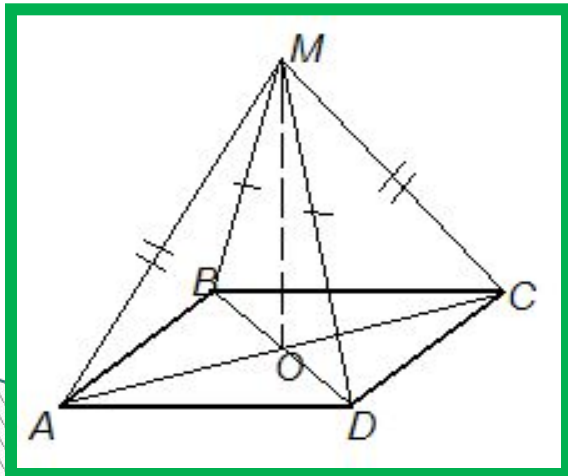
**Отрезок  $A_1B$  - проекция наклонной  $AB$  на плоскость  $\alpha$ .**

# Решение задач по готовым чертежам



№  
1

**Дано:**  
 $M \notin (ABC)$ ,  
 $MBCD$  – прямоугольник.  
**Доказать:**  
прямая  $CD \perp (ABC)$

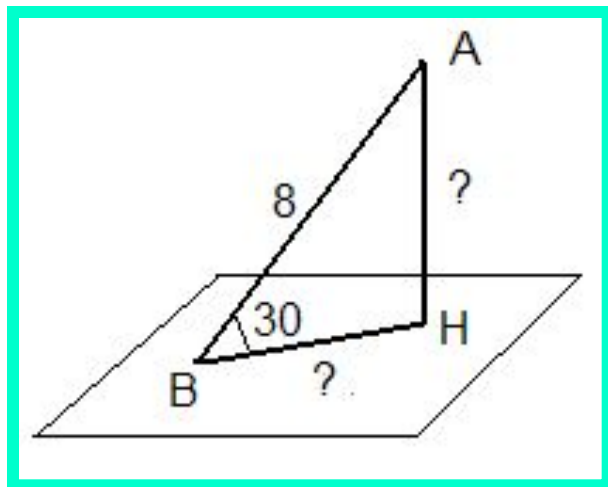


№  
2

**Дано:**  
 $ABCD$  – параллелограмм.  
**Доказать:**  
прямая  $MO \perp (ABC)$



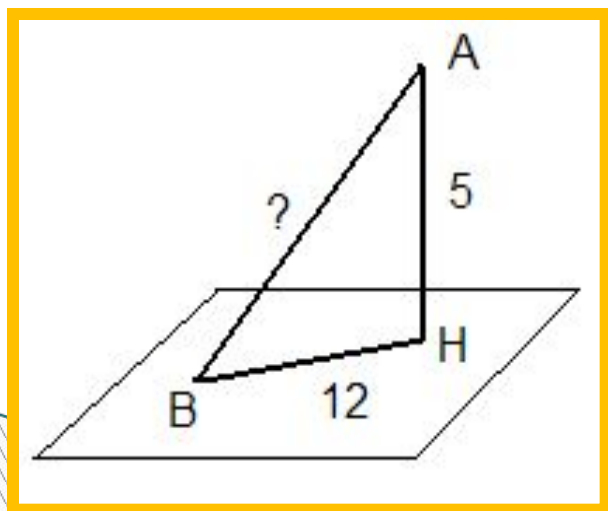
# Решение задач по готовым чертежам



№  
3

**Дано:**

$AH \perp \alpha$ ,  $AB$  – наклонная.  
Найти  $AH$ ,  $BH$ .

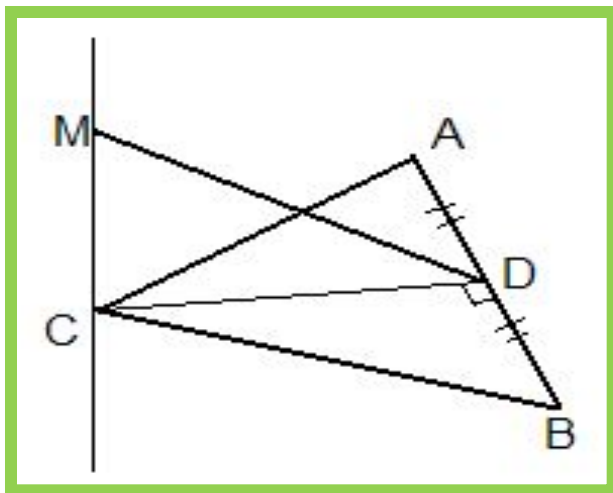


№  
4

**Дано:**

$AH \perp \alpha$ ,  $AB$  – наклонная.  
Найти  $AB$ .

# Работа в парах



№  
1

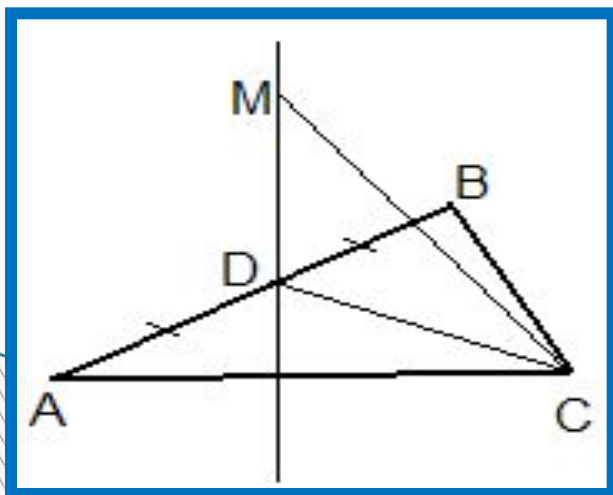
Дано:

прямая  $MC \perp (ABC)$ ,

$\angle ACB = 90^\circ$

$AC = 4$ ,  $MD = 3$ .

Найти длину отрезка  $MC$ .



№  
2

Дано: прямая  $MD \perp (ABC)$ ,

$\triangle ABC$  - равносторонний,

$AB = 2\sqrt{3}$ ,  $MD = 4$

Найти  $MC$ .

# Тест

(ответить да или нет)

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой, параллельной этой плоскости

Прямая, перпендикулярная к каким-нибудь двум прямым, лежащим в плоскости, перпендикулярна к этой плоскости

Прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная к его диаметру, перпендикулярна к плоскости круга

Прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная к его двум радиусам, не лежащим на одной прямой, перпендикулярна к плоскости круга

Прямая, перпендикулярная к двум не параллельным хордам круга, перпендикулярна к его плоскости

Если плоскость перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой

Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой

Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны

Если две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны

# Самостоятельная работа.

## 1 вариант.

1. Треугольник

$ABC$  – равносторонний, точка  $O$  – его центр. Прямая  $OM$  перпендикулярна к плоскости  $ABC$ .

- а) Докажите, что  $MA=MB=MC$ .  
б) Найдите  $MA$ , если  $AB=6$  см,  $MO=2$  см.

## 2 вариант.

1.  $ABCD$  – квадрат, точка  $O$  – его центр. Прямая  $OM$  перпендикулярна к плоскости квадрата.

- а) Докажите, что  $MA=MB=MC=MD$ .  
б) Найдите  $MA$ , если  $AB=4$  см,  $OM=1$  см.

2. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Известно, что разность длин наклонных равна 5 см, а их проекции равны 7 и 18 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости.

2. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Известно, что длины наклонных равны 25 и 30 см, а разность длин их проекций – 1 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости.

# *Домашнее задание:*

**№ 130, 131, 145, 148.**

