

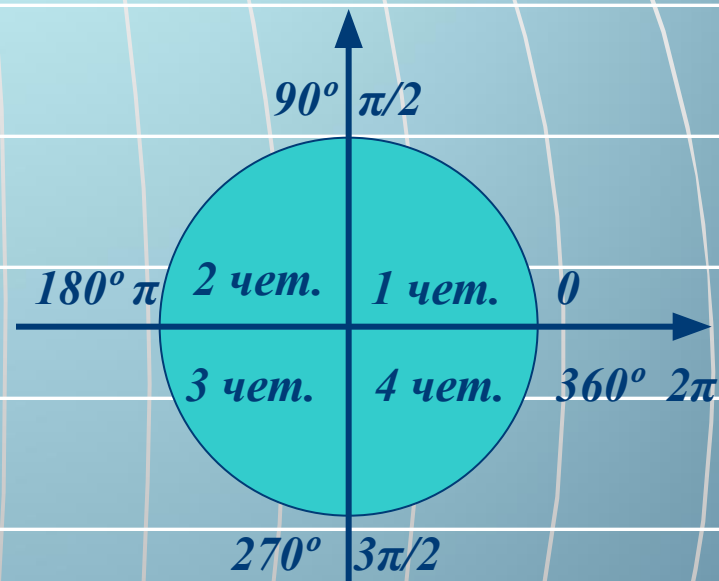
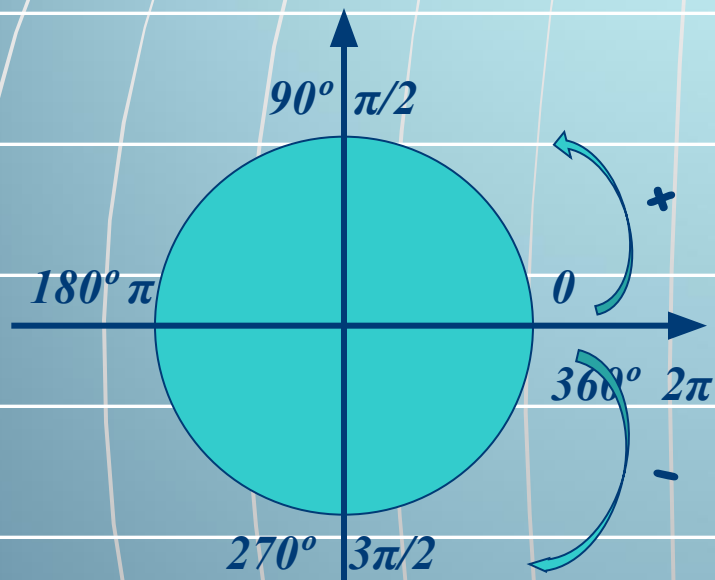
9 класс

*Свойства тригонометрических
функций*

Проверь себя.

- Синус угла α — это ордината (координата y) точки на тригонометрической окружности, которая возникает при повороте радиуса на угол α .
- Косинус угла α — это абсцисса (координата x) точки на тригонометрической окружности, которая возникает при повороте радиуса на угол α .
- Тангенс угла α — это отношение синуса к косинусу. Или, что то же самое, отношение координаты y к координате x .
- Котангенс угла α — это отношение косинуса к синусу. Или, что то же самое, отношение координаты x к координате y .
- Обозначение: $\sin \alpha = y$; $\cos \alpha = x$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$.

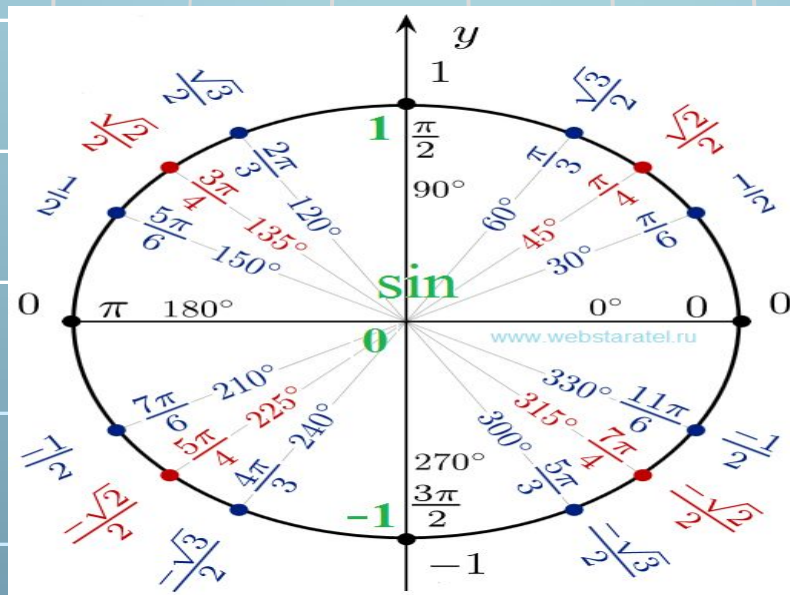
Тригонометрический круг



Помните! $\pi = 180^\circ$

Какой четверти принадлежит угол

- 1) $\alpha = 273^\circ$; 2) $\alpha = 159^\circ$; 3) $\alpha = 100^\circ$; 4) $\alpha = 300^\circ$;
5) $\alpha = 25^\circ$; 6) $\alpha = -110^\circ$; 7) $\alpha = -210^\circ$; 8) $\alpha = -319^\circ$



Область определения функции

- **Областью определения функции** называют множество всех допустимых значений переменной x . Геометрически – это проекция графика функции на ось Ox .



Область определения

Синус, косинус

$$D(y) = \mathbb{R}$$

Функции непрерывны на \mathbb{R}

Тангенс

$$D(y) = \mathbb{R}, x \neq \pi/2 + \pi n$$

$x = \pi/2 + \pi n$ – вертикальная асимптота

$\operatorname{tg} x$ – определен при $\cos x \neq 0$

Котангенс

$$D(y) = \mathbb{R}, x \neq \pi n$$

$x = \pi n$ – вертикальная асимптота

$\operatorname{ctg} x$ – определен при $\sin x \neq 0$

Множество значений функции

- **Множество значений функции** — множество всех значений, которые функция принимает на области определения.
Геометрически – это проекция графика функции на ось Oy .



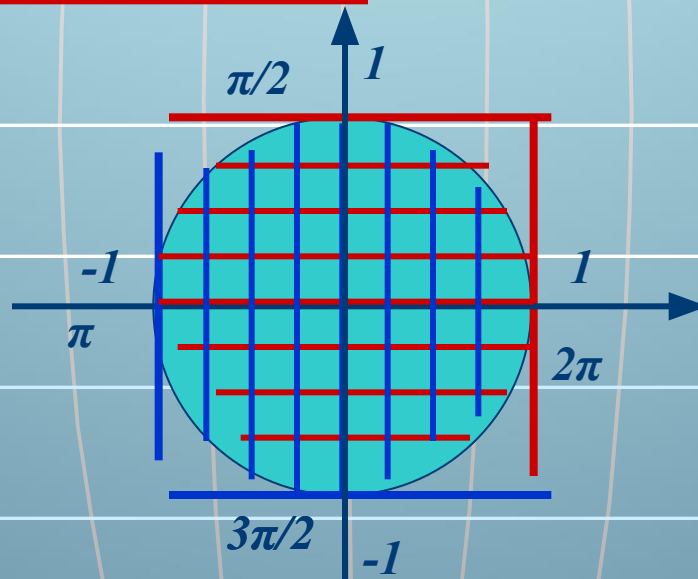
Множество значений функций

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1, \text{ или } |\sin x| \leq 1, \\ -1 \leq \cos x \leq 1, \text{ или } |\cos x| \leq 1, \end{aligned}$$

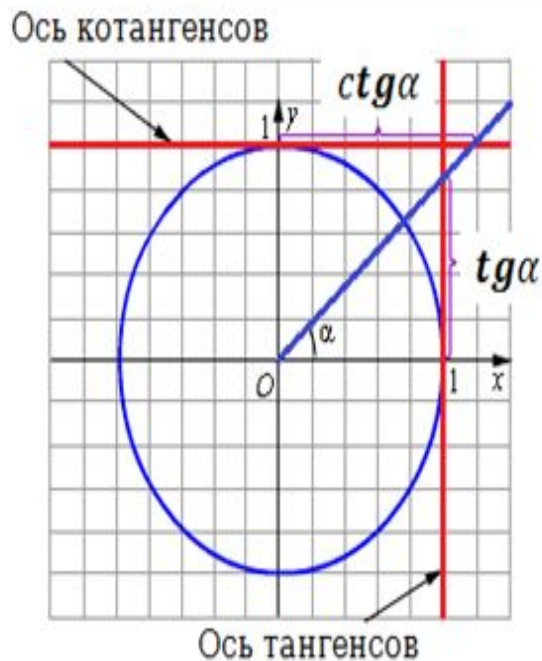
$$\operatorname{tg} x \in \mathbb{R}, \operatorname{ctg} x \in \mathbb{R},$$

$$|\sin x| \leq 1$$

$$|\cos x| \leq 1$$



Свойства тригонометрических функций



Функция	Область определения	Множество значений
$y = \sin x$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in [-1; 1]$
$y = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$	$y \in [-1; 1]$
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$y \in \mathbb{R}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$y \in \mathbb{R}$

Найди область определения функции $y = 2\sin(x + 3)$.

- Область определения функции – это множество всех значений аргумента, при котором записанная формула функции имеет смысл. Так как $\sin x$ имеет смысл при всех значений переменной x , областью определения функции $y = 2\sin(x + 3)$ является вся числовая прямая, т.е. $(-\infty; +\infty)$.

Найди сумму всех целых значений функции $y = -6 \cos x + 1$.

- **Решение.** Так как множество значений функции $y = \cos x$ – промежуток $[-1; 1]$, тогда:
 - $-1 \leq \cos x \leq 1$,
 - $-6 \leq -6 \cos x \leq 6$,
 - $-5 \leq -6 \cos x + 1 \leq 7$,
- т.е. множество значений функции $y = -6 \cos x + 1$ – промежуток $[-5; 7]$. Этому промежутку принадлежат следующие целые числа:
 - $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
 - Найди сумму этих чисел:
 - $(-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 13$.
 - Ответ: 13.

Найди область значений функции $y = 2\cos x$.

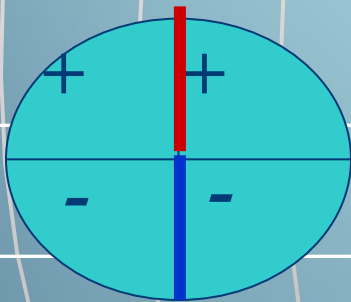
- Так как множество значений функции $y = \cos x$ – промежуток $[-1; 1]$, тогда:
 - $-1 \leq \cos x \leq 1$,
 - $-2 \leq 2\cos x \leq 2$,
- т.е. множество значений функции $y = 2\cos x$ – промежуток $[-2; 2]$.

Знаки по четвертям

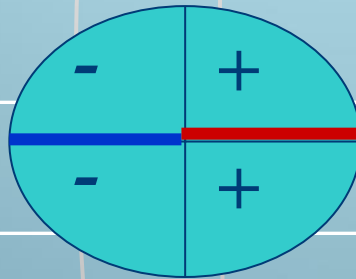
Синус: знаки соответствуют знакам по оси Y, косинус – по оси X

Тангенс и котангенс в 1 четверти- плюс, далее знаки чередуются

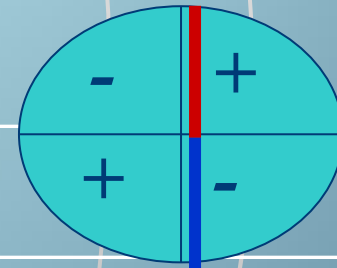
Sin



Cos



Tg, ctg

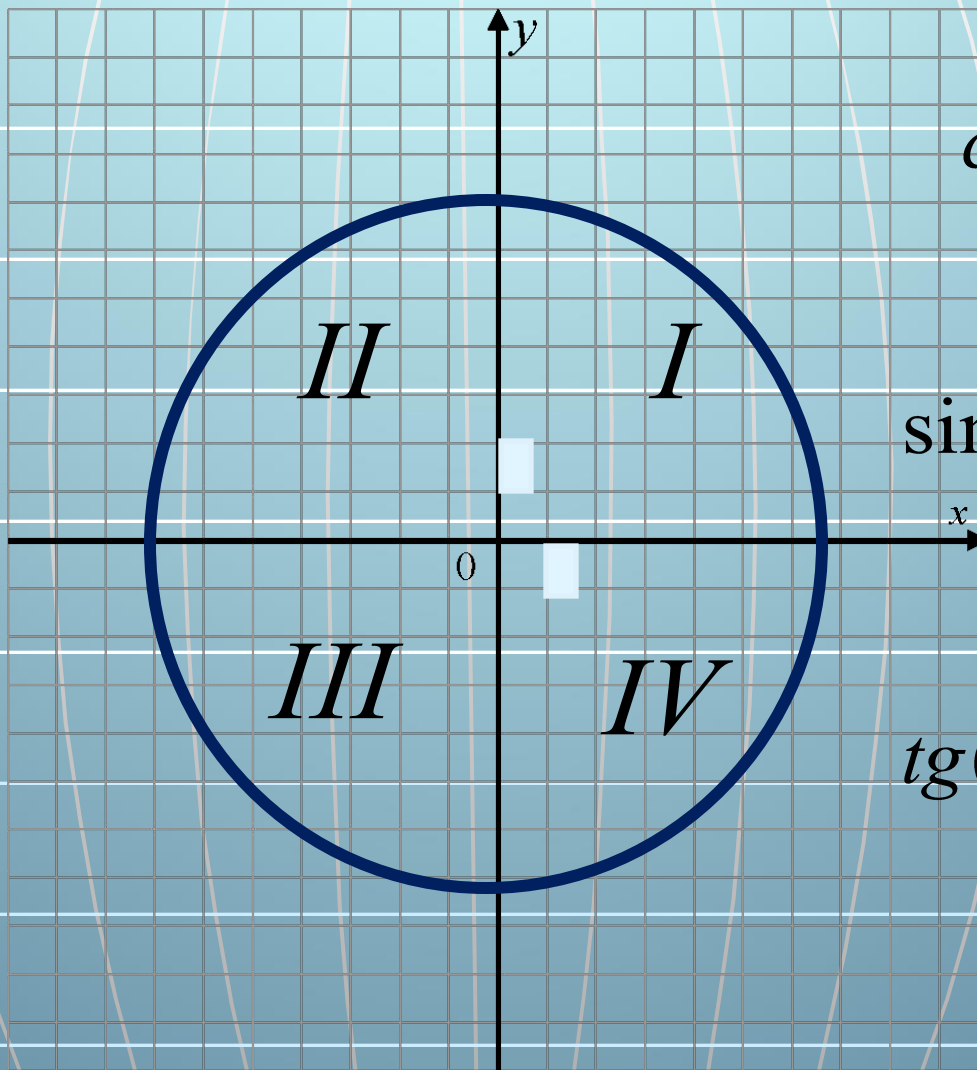


Рассмотрим примеры

$$\sin 20^\circ = "+"$$

$$\cos 70^\circ = "+"$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = "-"$$



$$\operatorname{ctg} 240^\circ = "+"$$

$$\sin(-45^\circ) = "-"$$

$$\operatorname{tg}(-130^\circ) = "+"$$

Четность и нечетность тригонометрических функций

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$



Если изменение знака аргумента влечет за собой и изменение знака функции, то функция называется нечетной

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$



Если изменение знака аргумента не влечет изменение знака функции, то функция называется четной

Четность, нечетность

Синус, тангенс, котангенс – функции

нечетные

Минус у угла можно вынести за знак функции

Косинус – функция

четная

Минус у угла можно опустить

Примеры

$$1. \sin(-x) = -\sin x$$

$$2. \sin(\pi/4 - x) = -\sin(x - \pi/4)$$

$$3. \operatorname{tg}(-\pi/6) = -\operatorname{tg} \pi/6 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4. \cos(-7\pi/3) = \cos 7\pi/3 = \cos(2\pi + \pi/3) = \cos \pi/3 = 1/2$$

$$5. \cos(-\beta) = \cos \beta$$

$$6. \operatorname{ctg}(2\alpha - \pi/2) = -\operatorname{ctg}(\pi/2 - 2\alpha)$$

Рассмотрим примеры

- $\cos (-120^\circ) = \cos 120^\circ$
- $\sin (-120^\circ) = -\sin 120^\circ$
- $\operatorname{tg} (-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ$
- $\operatorname{ctg} (-60^\circ) = -\operatorname{ctg} 60^\circ$

Период

Период – это число, при прибавлении которого к аргументу значение функции не изменяется.

$$f(x + T) = f(x)$$

Если T – период, то Tn для $n \in \mathbb{Z}$ тоже период.

Считается T – наименьший период

Так как $f(x + Tn) = f(x)$, то Tn **можно опустить**

\sin, \cos

$$T = 2\pi$$

$\operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$

$$T = \pi$$

Примеры

1. $\sin 390^\circ = \sin (360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

2. $\sin 790^\circ = \sin (2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

3. $\operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. $\cos \frac{7\pi}{3} = \cos (2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

5. $\cos (2\pi - \beta) = \cos (-\beta) = \cos \beta$

6. $\sin (6\pi - 2\alpha) = \sin (-2\alpha) = -\sin 2\alpha$


Рассмотрим примеры

Найдем $\cos 420^\circ$, $\sin 1470^\circ$, $\cos 1845^\circ$.

$$1) \quad \cos 420^\circ = \cos(60^\circ + 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$2) \quad \sin 1470^\circ = \sin(30^\circ + 4 \cdot 360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$3) \quad \cos 1845^\circ = \cos(45^\circ + 5 \cdot 360^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Не удалось
разобраться
в теме

Остались
вопросы

Тема
раскрыта,
все
понятно