ОТКРЫТЫЙ УРОК ПО ТЕМЕ: «СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ»

Подготовила:
Понарьина Е.В.
Преподаватель математики
ГОБУ СПО ВО «Воронежский авиационный техникум им. В. П.Чкалова»

Цели урока:

- ***Образовательные*: обобщить и закрепить знания учащихся о понятиях степени и логарифма; совершенствовать и углубить знания учащихся по данной теме; научить применять свойства логарифмов при решении задач.
- ***Воспитательные***: показать практическую значимость логарифмов и степеней; привить навыки работы в микрогруппах; воспитывать чувство ответственности, взаимоподдержки и взаимопроверки; формировать адекватную самооценку.
- ***Развивающие***: сформировать умение сравнивать и обобщать, выделять главное; развить умение логически мыслить, делать выводы.

Степени

- С натуральным показателем
- С целым показателем
- С рациональным показателем
- С иррациональным показателем
- С действительным показателем

Степень с натуральным показателем	$a^1 = a$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	
Степень с целым показателем	$a^0 1, \quad a \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$; $(-1{,}2)^0 = 1$; $(\frac{2}{5})^{-3} = (\frac{5}{2})^3 = \frac{125}{8}$.
Степень с рациональным показателем для неотрицательного числа a	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ Если $m < 0$, то $a > 0$. Если $m > 0$, то $a \geq 0$.	$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$; $0^{\frac{3}{5}} = 0$; $25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = 125$; $(0{,}04)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$; $(-27)^{\frac{1}{3}}$ не определена.
Степень с иррациональным показателем	$3^3 < 3^\pi < 3^4$ $3^{3,1} < 3^\pi < 3^{3,2}$ $3^{3,14} < 3^\pi < 3^{3,15}$ … $(\pi = 3{,}1415\ldots)$	$(0{,}3)^2 < (0{,}3)^{\sqrt{2}} < (0{,}3)^1$ $(0{,}3)^{1,5} < (0{,}3)^{\sqrt{2}} < (0{,}3)^{1,4}$ $(0{,}3)^{1,42} < (0{,}3)^{\sqrt{2}} < (0{,}3)^{1,41}$ … $(\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots)$
Степень с действительным показателем	$a^r, r \in \mathbb{R} \begin{cases} r < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} r > 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$	

Степени с любыми действительными показателями обладают всеми привычными свойствами степеней.

Свойства степеней
$a^p \cdot a^r = a^{p+r};$
$a^p : a^r = a^{p-r};$
$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r;$
$(a^p)^r = a^{p \cdot r};$
$(\frac{a}{b})^{-r} = (\frac{b}{a})^r;$
$(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}.$

Операция нахождения степени называется **возведением в степень**

Логарифмом положительного числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

$log_a b = c \ (a > 0, a \neq 1, b > 0)$ **тогда и только тогда, ко** $a^c = b$.

Свойства логарифмов

$log_a 1 = 0;$ $log_a a = 1;$	$log_a \frac{1}{a} = -1;$ $log_{a^m} a = \frac{1}{m};$	$log_a a^m = m;$ $log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}.$

Основные соотношения	**Дополнительные соотношения**
Логарифм произведения: $log_c(ab) = log_c a + log_c b;$ Логарифм частного: $log_c\left(\frac{a}{b}\right) = log_c a - log_c b;$ Логарифм степени: $log_a b^m = m \cdot log_a b;$ Переход к новому основанию: $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}.$	$log_a b = \frac{1}{log_b a};$ $log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot log_a b;$ $\frac{log_n b}{log_n c} = \frac{log_m b}{log_m c} = log_c b;$ $log_n b \cdot log_m c = log_m b \cdot log_n c;$ $a^{log_n b} = b^{log_n a}.$

Операция нахождения логарифма называется **логарифмированием**

Свойства степеней и логарифмов связаны между собой:

Свойства степеней	Свойства логарифмов
$a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$	$log_a(c_1c_2) = log_a c_1 + log_a c_2$
$a^{b_1} : a^{b_2} = a^{b_1-b_2}$	$log_a\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = log_a c_1 - log_a c_2$
$(a^p)^r = a^{p \cdot r}$	$log_a b^r = r \cdot log_a b$
$\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$	$log_a \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n} log_a c$

Сравните:

Возведение в степень	Логарифмирование
$5^2 = 25$	$log_5 25 = 2$
$10^3 = 1000$	$log_{10} 1000 = 3$
$0{,}3^4 = 0{,}0081$	$log_{0,3} 0{,}0081 = 4$

Выводы.

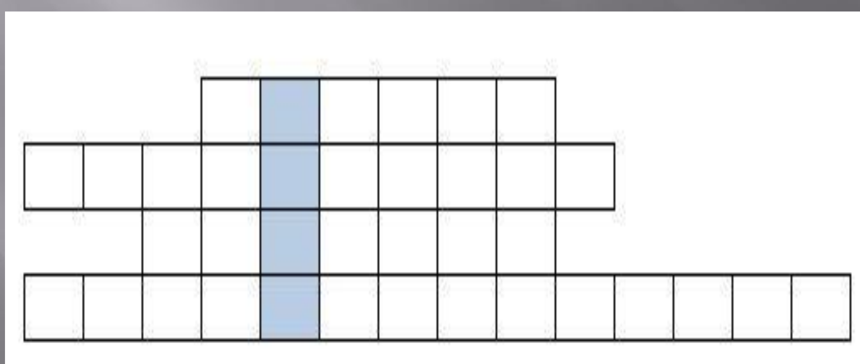
1. Операция логарифмирования является обратной по отношению к возведению в степень с соответствующим основанием.

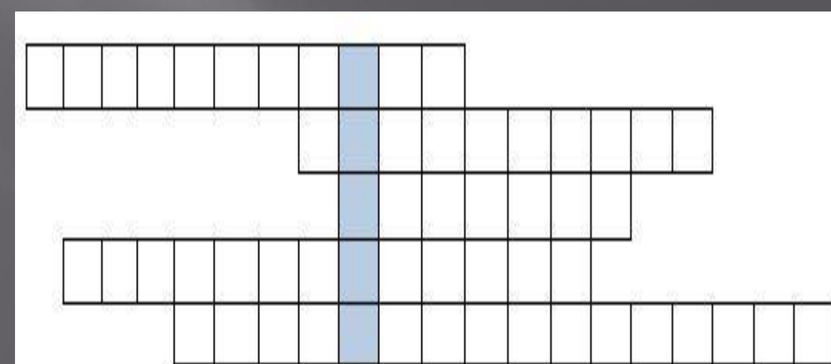
2. Вычисление логарифма можно свести к решению некоторого показательного уравнения.

Кроссворды

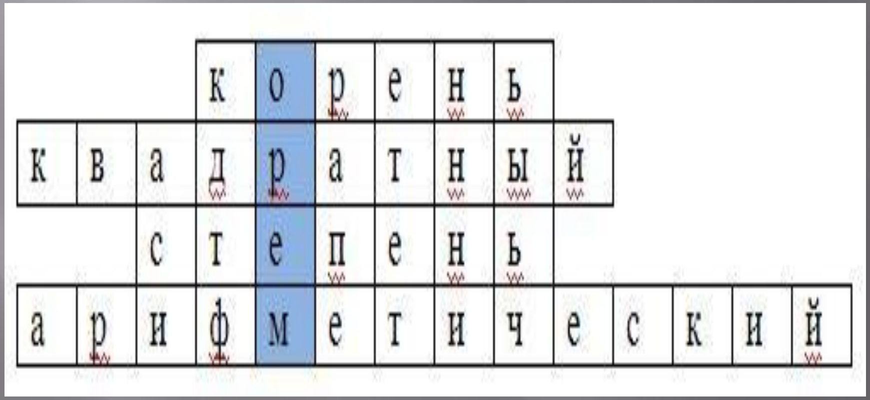
1. Есть у любого слова, у растения, может быть n – ой степени.
2. Как можно иначе назвать арифметический корень второй степени?
3. Так называют выражение x^n.
4. Положительный корень.

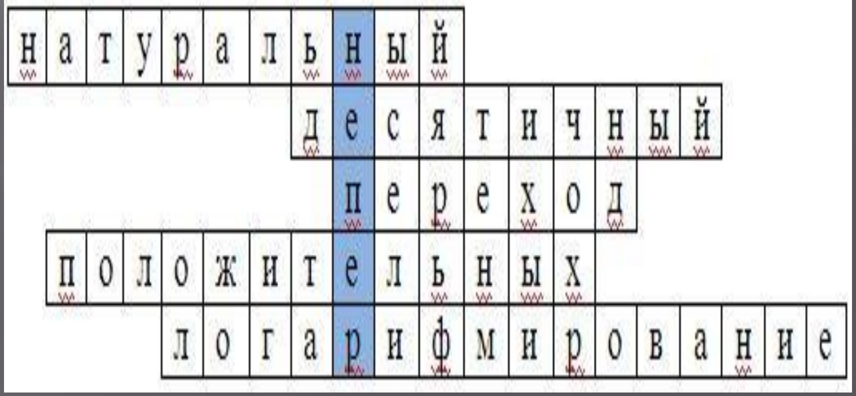
1. Как называется логарифм lnb?
2. Как называется логарифм по основанию 10?
3. Как называется формула $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$?
4. Для каких чисел определен логарифм?





После того, как вы разгадаете кроссворды, в выделенной области должны появиться фамилии ученых, с кем связано появление степеней и логарифмов.





Историческая справка

О СТЕПЕНЯХ

- Положительные дробные показатели первым использовал французский ученый Н.Орем (1323-1382).
- Нулевой и целые отрицательные показатели появились более чем через 100 лет и также во Франции (Н.Шюке).
- **Зачем вводятся степени с произвольным показателем?**
- **1**. С помощью степеней с рациональным показателем можно свободно выполнять преобразования.
- **2**. Есть много величин, зависящих от времени t, значения которых при t=0,1,2,3,…, n,… составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q > 0: a_0, a_0q, a_0q^2, \ldots$
- В формуле $a_n = a_0q^n$ число n является натуральным числом. Однако часто оказывается так, что данная величина a=a(t), меняется непрерывно со временем и ее зависимость от времени выражается аналогичной формулой
- где время t принимает не только натуральные, но любые действительные значения.

О ЛОГАРИФМАХ

- Первые таблицы логарифмов были фактически построены немецким математиком М.Штифелем (1487-1567).

Шотландский математик Дж. Непер в работе «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614) изложил свойства логарифмов, правила пользования таблицей и привел примеры вычислений. С тех пор долгое время логарифмы называли «неперовыми». Независимо от Дж.Непера швейцарский математик, астроном и часовой мастер И.Бюрги (1552-1632), работавший с великим И.Кеплером, опубликовал в 1620 году аналогичные, хотя и менее совершенные, логарифмические таблицы.

Матричная таблица

		1	2	3	4	5
а)	$log_7 x = -1$	1	7	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	-1
б)	$log_x 16 = 2$	4	8	$\sqrt{2}$	2	1
в)	$log_5 x \geq -2$	$(0;\infty)$	$[\frac{1}{25};\infty)$	$(2;\infty)$	$[-2;\infty)$	$(-\infty;-2]$
г)	$x^3=8$	1	0	-2	2	-4
д)	$7^x = \frac{1}{49}$	-4	2	4	1	-2

Ответы

	1	2	3	4	5
а)			+		
б)	+				
в)		+			
г)				+	
д)					+

Заполните пропуски

$$log_3 9 = \square, 3^2 = \square$$

$$log_{11} \square = 1, 11^1 = \square$$

$$log_7 49 = \square, 7^2 = \square$$

$$log_{0,5} \frac{1}{2} = \square, \frac{1}{2}^{\square} = \frac{1}{2}$$

$$log_2 \square = 0, 2^0 = \square$$

$$log_{20} 20 = \square, 20^{\square} = 20$$

Сверьте ответы

$$log_3 9 = 2, 3^2 = 9$$

$$log_{11} 11 = 1, 11^1 = 11$$

$$log_7 49 = 2, 7^2 = 49$$

$$log_{0,5} \frac{1}{2} = 1, \frac{1}{2}^1 = \frac{1}{2}$$

$$log_2 1 = 0, 2^0 = 1$$

$$log_{20} 20 = 1, 20^1 = 20$$

Использование степеней с произвольным показателем при решении задач

1. Вычисление степеней через корни:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{2,25};$

2) $a^{\frac{7}{6}} = a^{1+\frac{1}{6}} = a\sqrt[6]{a}.$

2. Приведение к одному основанию:

Запишем числа $9^{\frac{1}{3}}, 27^{-1}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}, \sqrt[3]{81}$ в виде степеней числа 3 с рациональным показателем:

$$9^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}}, \qquad 27^{-1} = (3^3)^{-1} = 3^{-3},$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{4}} = (3^{-1})^{-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}, \qquad \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}.$$

3. Преобразование выражений:

$$\frac{x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} =$$
$$\frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} =$$
$$= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

4. Решение простейших уравнений:

1) $x^{\frac{3}{4}} = 2 \Rightarrow x = 2^{\frac{4}{3}};$

2) $(x-1)^{-\frac{2}{3}} = 3 \Rightarrow x - 1 = 3^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 1 + 3^{-\frac{3}{2}}$

Применение свойств логарифмов

1. Вычисление логарифмов:

1) $log_2 256 = log_2 2^8 = 8;$

2) $lg0{,}001 = lg10^{-3} = -3;$

3) $lg\sqrt[3]{10} = \frac{1}{3} lg10 = \frac{1}{3}.$

2.Логарифмирование:

Дано: $A = (100a^{\frac{2}{3}}b)^3.$

Найти: $lgA.$

Решение:

$$lgA = 3 \cdot \left(lg100 + \frac{2}{3} lga + lgb\right) = 6 + 2lga + 3lgb.$$

3. Потенцирование (нахождение выражения по его логарифму)

$$log_2 A = -1 + 2log_2 a - 3log_2 b \Longrightarrow$$

$$log_2 A = log_2 \frac{1}{2} + log_2 a^2 - log_2 b^3 =$$

$$= log_2 \frac{a^2}{2b^3} \Longrightarrow A = \left(\frac{1}{2} \cdot a^2\right) : b^3 = \frac{a^2}{2b^3}.$$

4. Переход к одному основанию:

Дано: $A = log_{\frac{1}{4}} a - log_{\sqrt{2}} a + 2log_8 a.$

Перейти к основанию 2.

Решение:

Заметим, что $log_2 2^k = k$ – это поможет устно находить модуль перехода.

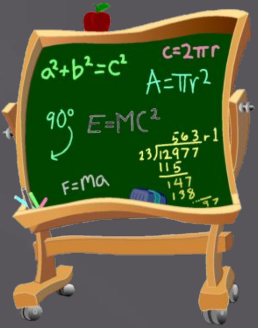
$$A = \frac{log_2 a}{log_2 \frac{1}{4}} - \frac{log_2 a}{log_2 \sqrt{2}} + 2\frac{log_2 a}{log_2 8} =$$

$$= log_2 a \left(\frac{1}{-2} - \frac{1}{1/2} + \frac{2}{3}\right) =$$

$$log_2 a \left(-\frac{1}{2} - 2 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{11}{6} log_2 a.$$

Работа в группах

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ	ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
1-ый ряд	1.
$36^{log_6 5}+10^{1-log_{10}2}-8^{log_2 3}$	$(3lg2+lg0,25)\div(lg14-lg7)$
2-й ряд	2.
$16^{1+log_4 5}+4^{\frac{1}{2}log_2 3+3log_8 5}$	$(log_6 2+log_6 3+2^{log_2 4})^{log_6 7}$
3-ий ряд	
$(log_2 12-log_2 3+3^{log_3 8})^{lg5}$	



Домашнее задание

Повторить свойства степени и логарифма.
Решить примеры

1) $\log_{216} 27 + \log_{36} 16 + \log_6 3.$

2) $\log_{0,2} 125 : \log_{16} 64 \cdot \log_3 81.$

3) $\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 9^{\log_3 2}.$

4) $\log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 \frac{1}{8} : 7^{2\log_{49} 2}.$

Литература

- http://ru.wikipedia.org/wiki/%CB%EE%E3%E0%F0%E8%F4%EC
- Алгебра и начала анализа. 10-11 класс. Учебник. Мордкович А.Г. (http://www.alleng.ru/d/math/math52.htm)