Цифровая обработка сигналов (дополнительное образование)

ФИО преподавателя: Бабенко Татьяна Александровна
e-mail: tatjana1239@mail.ru

Тема:

Связь ДПФ и ДВПФ.

Восстановление ДВПФ по коэффициентам ДПФ

Связь ДВПФ и ДПФ

Пусть $x(k)$ – N-точечная последовательность. ДВПФ этой последовательности (при $\Delta t = 1$)

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k},$$

где $\nu = f\Delta t = f/f_д$ – нормированная частота (доли частота дискретизации). Используя формулу обратногоДПФ, получим

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_N(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right] e^{-j2\pi\nu k} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_N(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\nu-\frac{n}{N})k}.$$

Просуммируем N членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\nu-\frac{n}{N})k} = \frac{1-e^{-j2\pi(\nu-\frac{n}{N})N}}{1-e^{-j2\pi(\nu-\frac{n}{N})}} = \frac{e^{-j\pi(\nu-\frac{n}{N})N}}{e^{-j\pi(\nu-\frac{n}{N})}} \cdot \frac{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})N}{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})} = e^{-j\pi(\nu-\frac{n}{N})(N-1)} \frac{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})N}{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})}.$$

Поэтому для $X(\nu)$ можем записать

$$X(\nu) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_N(n) \frac{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})N}{\sin\pi(\nu-\frac{n}{N})} e^{-j\pi(\nu-\frac{n}{N})(N-1)} \quad (1)$$

Это интерполяционная формула восстановления континуальной функции $X(\nu)$ по коэффициентам ДПФ, вычисленным без масштабирующего множителя:

$$X_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j(2\pi/N)nk},$$

В точках $\nu = n/N$ имеет место

$$X(n\Delta\nu) = X_N(n), \ \Delta\nu = 1/N. \quad (2)$$

Таким образом, *коэффициенты ДПФ* $X_N(n)$ *можно рассматривать как отсчёты функции* $X(\nu)$, *взятые с шагом* $\Delta\nu = 1/N$ в соответствии с теоремой отсчётов в частотной области.

На рис. 1*а* представлен одиночный импульс конечной длительности и модуль его спектра. Рисунок 1*б* показывает, что периодическому повторению импульса с периодом T соответствует дискретизованная версия непрерывного спектра. Отдельные отсчёты $X(n\Delta f)$ связаны с коэффициентами ряда Фурье C_n простым соотношением

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \Delta f X(n\Delta f), \ \Delta f = 1/T.$$

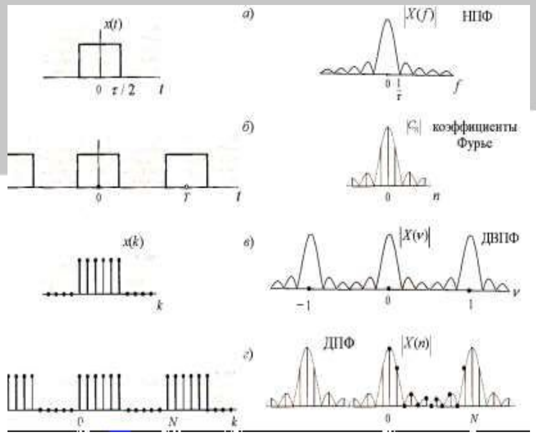


Рис. 1

Дискретизация импульса с шагом Δt приводит к периодическому повторению его спектра с периодом $f_д = 1/\Delta t$ (по нормированной частоте с периодом 1). Дискретная последовательность $x(k)$ и её непрерывный спектр (ДВПФ) $X(\nu)$ показаны на рис. 1*в*. Наконец, периодическому повторению последовательности $x(k)$ с периодом N соответствует дискретизованная версия непрерывной функции $X(\nu)$ с шагом $\Delta\nu = 1/N$. Отдельные дискреты этой функции связаны с коэффициентами ДПФ соотношением (2). Эта связь иллюстрируется на рис. 1*г*.

Дискретное время и дискретная частота – именно это свойство ДПФ (а также существование быстрых алгоритмов БПФ) объясняет его повсеместное распространение в цифровых системах обработки сигналов.

Интерполяция добавлением нулевых отсчётов

Иногда качество визуализации ДВПФ $X(\nu)$ с помощью ограниченного набора из N коэффициентов ДПФ может оказаться недостаточным (рис. 1*в*, *г*). Практический способ увеличения числа отсчётов функции $X(\nu)$ состоит в следующем. Определим новую последовательность $y(k)$ длиной в M отсчётов($M > N$) путём дополнения исходной последовательности $x(k)$ нулевыми отсчётами. Число таких нулевых отсчётов будет $M - N$:

$$y(k) = \begin{cases} x(k), & 0 \le k \le N-1, \\ 0, & N \le k \le M-1. \end{cases}$$

Для этой последовательности отсчётные значения функции $X(\nu)$ в точках $\nu_m = m/M,\ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ M-1,$ взятые с новым шагом $\Delta\nu = 1/M$, будут

$$X(\nu_m) = \sum_{k=0}^{M-1} y(k)\, e^{-j\,2\pi mk/M}. \tag{3}$$

Это выражение с точностью до множителя $\Delta t / M$ представляет собой M-точечное ДПФ, которое может быть вычислено, например, с использованием быстрых алгоритмов. Характерно, что если взять $M = 2N$, то дополнительные отсчёты $X(\nu_m)$ будут расположены между N первоначальными. При этом улучшается качество визуализации спектральной функции $X(\nu)$, которая остаётся неизменной от такого дополнения, так как она определяется первоначальной длиной массива $x(k)$. Следующий пример иллюстрирует такую возможность. На рис. 2а представлено непрерывное изображение $|X(\nu)|$ на периоде[0, 1] для 16-точечной последовательности

$$x(k) = \sin 2\pi(2{,}5/16)k + \sin[2\pi(3{,}5/16)k + \sin 2\pi(5{,}6/16.)k,$$

состоящей из трёх синусоид с относительными частотами $\nu_1 = 2{,}5 / 16$; $\nu_2 = 3{,}5 / 16$; $\nu_3 = 5,\ 6 / 16$. Заметим, что относительные частоты синусоид находятся в промежутках между соседними бинами ДПФ (1бин=1/N).

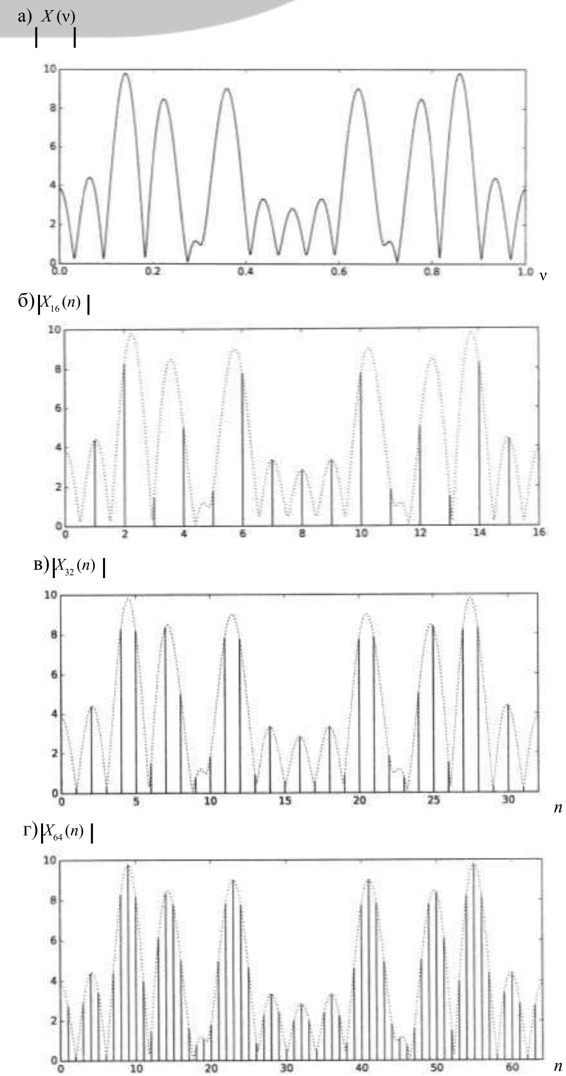


Рис. 2

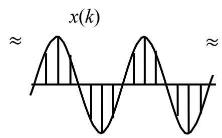
На рис. 2*б,* изображены величины коэффициентов ДПФ, вычисленных без множителя $1/N$для $N = 16$. Коэффициенты ДПФ для $N = 32$ и $N = 64$ получены дополнением нулями.

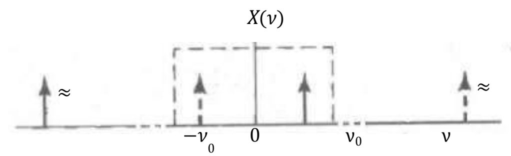
Примеры решения задач на ДПФ

- Гармонический сигнал $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ дискретизуется так, что на периоде образуется 8 отсчетов.
  1. Изобразить последовательность $x(k)$ и ее спектр.
  2. Найти и изобразить по модулю ДВПФ и ДПФ последовательности

$$y(k) = \sum_{m=0}^{15} x(m)\mathbf{1}(k-m) \quad \text{и} .$$

Решение 1. $x(k) = \cos 2\pi f_0 k\Delta t = \cos 2\pi\nu_0 k$, $\nu_0 = f_0\Delta t = f_0 / f_д$ – частота косинусоиды, нормированная к частоте дискретизации (доли частоты дискретизации). Спектр дискретизованной косинусоиды – две дельта-функции (с весом ½)в точках $\pm\nu_0$, повторяющиеся с периодом 1.





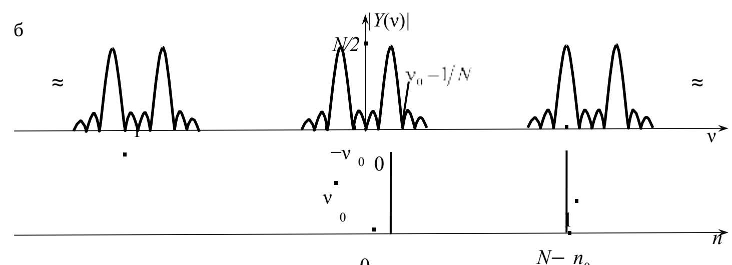
Решение 2. Последовательность $y(k)$ представляет собой отрезок из двух периодов косинусоиды. С учетом того, что $\cos 2\pi\nu_0 k = \frac{1}{2}\exp(j2\pi\nu_0 k) + \frac{1}{2}\exp(-j2\pi\nu_0 k)$ можем записать для ДВПФ последовательности $y(k)$

$$Y(\nu) = \sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m)\, e^{-j2\pi(\nu+\nu_0)k}\right] + \sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m)\, e^{-j2\pi(\nu-\nu_0)k}\right] =$$

$$= e^{-j\pi(\nu+\nu_0)(N-1)}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sin\pi(\nu+\nu_0)N}{\sin\pi(\nu+\nu_0)} + e^{-j\pi(\nu-\nu_0)(N-1)}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sin\pi(\nu-\nu_0)N}{\sin\pi(\nu-\nu_0)}.$$

Модуль этой функции изображен на рис. б. Здесь N=16.

б



Коэффициенты ДПФ $X[n] = \sum_{k=0}^{N} x[k]e^{-j(2\pi/N)nk}$, связаны с отсчетами ДВПФ соотношением $X(n) = X(\nu = \frac{n}{N})$, $n \in [0, N-1]$, $N = 16$. Если ν_0 кратно бину ДПФ 1/N, т. е. $\nu_0 = \frac{n_0}{N}$, то на интервале $[0, N-1]$, $N = 16$ будут всего два отсчета ДПФ $X(n_0)$ и $X(N-n_0) = X(n_0)^*$.

- Найти и изобразить по модулю ДВПФ N - точечных последовательностей

$$x(k)=\sum_{m=0}^{N-1} 1(k-m) \quad \text{и} \quad y(k)=x(k)\cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right).$$

Для последовательности $x(k)$

$$X(\nu)=\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} 1(k-m)\, e^{-j2\pi\nu k}\right]=\sum_{m=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m)\, e^{-j2\pi\nu k}\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu m}=\frac{1-e^{-j2\pi\nu N}}{1-e^{-j2\pi\nu}}=e^{-j\pi\nu(N-1)}\cdot\frac{\sin\pi\nu N}{\sin\pi\nu}.$$

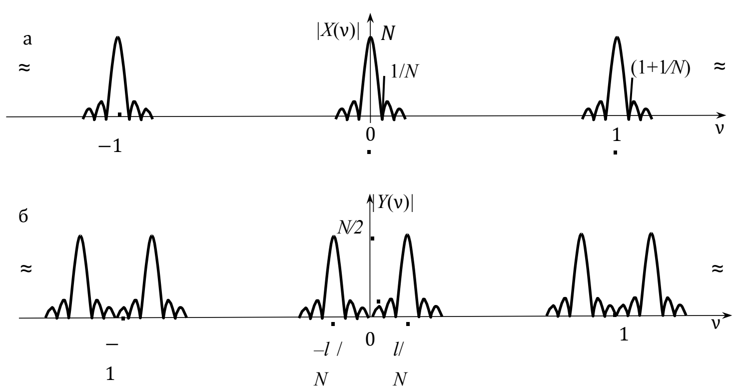
Модуль этой функции изображен на рис. А.

Для последовательности $y(k)$

$$Y(\nu)=\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m)\, e^{-j2\pi\left(\nu+\frac{l}{N}\right)k}\right]+\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m)\, e^{-j2\pi\left(\nu-\frac{l}{N}\right)k}\right]=$$

$$=e^{-j\pi\left(\nu+\frac{l}{N}\right)(N-1)}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin\pi\left(\nu+\frac{l}{N}\right)N}{\sin\pi\left(\nu+\frac{l}{N}\right)}+e^{-j\pi\left(\nu-\frac{l}{N}\right)(N-1)}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin\pi\left(\nu-\frac{l}{N}\right)N}{\sin\pi\left(\nu-\frac{l}{N}\right)}.$$

Модуль этой функции изображен на рис. Б.



- Найти ДВПФ периодической последовательности единичных импульсов

$$x(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m).$$

Решение:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m)\right] e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 1(k-m)\, e^{-j2\pi\nu k}$$

С учетом теоремы запаздывания ДВПФ имеем

$$X(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\nu m}$$

Это есть ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ - функций с периодом 1. Действительно

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-n} e^{-j2\pi\nu n}$$

Где коэффициенты Фурье

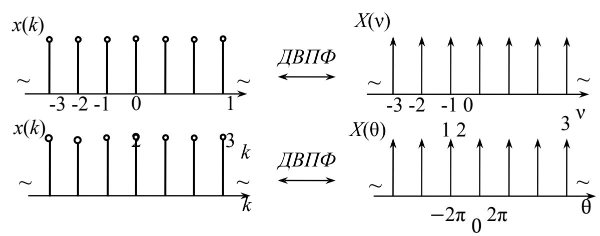
$$C_n = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\nu)\, e^{j2\pi\nu n}\, d\nu \equiv 1$$

Таким образом

$$X(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\nu m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n)$$

Для $\theta = \omega\Delta t = 2\pi f\Delta t = 2\pi\nu$ можем записать

$$X(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\theta} = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-2\pi n)$$



• Найти обратное ДВПФ для функции

$$X(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos\theta m ,$$

где $\theta = \omega\Delta t = 2\pi f\Delta t = 2\pi\nu$, $\Delta t -$ шаг дискретизации . По формуле Эйлера

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos\theta m = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left[e^{-j\theta m} + e^{j\theta m}\right] .$$

В предыдущей задаче было показано

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\theta m} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n) \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m) \xleftrightarrow{ДВПФ}$$

Поэтому

$$x(k) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m) + \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m) \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m).$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть $X(n) = \sum_{k=0}^{11} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ -12-точечное ДПФ действительной последовательности $x(k)$ и пусть

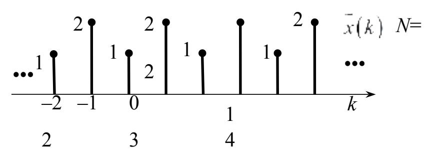
$X(0) = 10$, $X(1) = -5 - j4$, $X(2) = 3 - j2$,
$X(3) = 1 + j3$, $X(4) = 2 + j5$, $X(5) = 6 - j2$,
$X(6) = 12$

Не вычисляя обратного ДПФ, определить

$a)\ x(0)$, $b)\ x(6)$, $c)\ \sum_{k=0}^{11} x(k)$, $d)\ \sum_{k=0}^{11} e^{j\frac{2\pi}{3}k} x(k)$, $e)\ \sum_{k=0}^{11} |x(k)|^2$

2. Пусть $\tilde{x}(k)$ – N-периодическая последовательность. Тогда $3N$ тоже можно считать её периодом. Пусть $\tilde{X}(n)$ – коэффициенты ДПФ N-периодической последовательности, а $\tilde{X}_3(n)$ – коэффициенты ДПФ $3N$-периодической последовательности $\tilde{x}(k)$.

Выразить $\tilde{X}_3(n)$ через $\tilde{X}(n)$. Проверить результат для последовательности.



5

3. Пусть $y(k)$ означает циклическую свёртку двух последовательностей $x(k)$ и $h(k)$, $0 \le k \le N-1$. Проверить равенство

$$\sum_{k=0}^{N-1} y(k) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\right)\left(\sum_{k}^{N} h(k)\right)$$

Спасибо за внимание!