

Цифровая обработка сигналов (дополнительное образование)

ФИО преподавателя: Бабенко Татьяна Александровна
e-mail: tatjana1239@mail.ru

Тема:
Связь ДПФ и ДВПФ.

Восстановление ДВПФ по коэффициентам ДПФ

Связь ДВПФ и ДПФ

Пусть $x(k)$ – N -точечная последовательность. ДВПФ этой последовательности (при $\Delta t = 1$)

$$X(v) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi v k},$$

где $v = f \Delta t = f / f_a$ – нормированная частота (доли частота дискретизации). Используя формулу обратного ДПФ, получим

$$X(v) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{-j2\pi v k} = \sum_{n=0}^{N-1} X_N(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi(v - \frac{n}{N})k}.$$

Просуммируем N членов геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi(v - \frac{n}{N})k} &= \frac{1 - e^{-j2\pi(v - \frac{n}{N})N}}{1 - e^{-j2\pi(v - \frac{n}{N})}} = \frac{e^{-j\pi(v - \frac{n}{N})N} \sin \pi(v - \frac{n}{N})N}{e^{-j\pi(v - \frac{n}{N})N} \sin \pi(v - \frac{n}{N})} \\ &= e^{-j\pi(v - \frac{n}{N})(N-1)} \frac{\sin \pi(v - \frac{n}{N})N}{\sin \pi(v - \frac{n}{N})} \end{aligned}$$

Поэтому для $X(v)$ можем записать

$$X(v) = \sum_{n=0}^{N-1} X_N(n) \frac{\sin \pi(v - \frac{n}{N})N}{\sin \pi(v - \frac{n}{N})} e^{-j\pi(v - \frac{n}{N})(N-1)} \quad (1)$$

Это интерполяционная формула восстановления непрерывной функции $X(v)$ по коэффициентам ДПФ, вычисленным без масштабирующего множителя: коэф-

$$X_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j(2\pi/N)nk},$$

В точках $v = n/N$ имеет место

$$X(n\Delta v) = X_N(n), \quad \Delta v = 1/N. \quad (2)$$

Таким образом, коэффициенты ДПФ $X_N(n)$ можно рассматривать как отсчеты функции $X(v)$, взятые с шагом $\Delta v = 1/N$ в соответствии с теоремой отсчетов в частотной области.

На рис. 1а представлен одиночный импульс конечной длительности и модуль его спектра. Рисунок 1б показывает, что периодическому повторению импульса с периодом T соответствует дискретизованная версия непрерывного спектра. Отдельные отсчеты $X(n\Delta f)$ связаны с коэффициентами ряда Фурье C_n простым соотношением

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \Delta f X(n\Delta f), \quad \Delta f = 1/T.$$

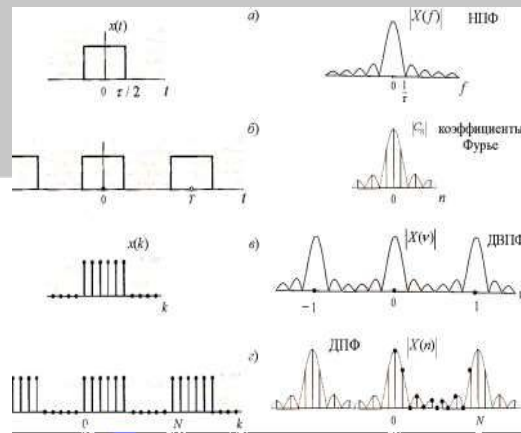


Рис. 1

Дискретизация импульса с шагом Δt приводит к периодическому повторению его спектра с периодом $f_d = 1/\Delta t$ (по нормированной частоте с периодом 1). Дискретная последовательность $x(k)$ и её непрерывный спектр (ДВПФ) $X(v)$ показаны на рис. 1в. Наконец, периодическому повторению последовательности $x(k)$ с периодом N соответствует дискретизованная версия непрерывной функции $X(v)$ с шагом $\Delta v = 1/N$. Отдельные дискеты этой функции связаны с коэффициентами ДПФ соотношением (2). Эта связь иллюстрируется на рис. 1г.

Дискретное время и дискретная частота – именно это свойство ДПФ (а также существование быстрых алгоритмов БПФ) объясняет его повсеместное распространение в цифровых системах обработки сигналов.

Интерполяция добавлением нулевых отсчётов

Иногда качество визуализации ДВПФ $X(v)$ с помощью ограниченного набора из N коэффициентов ДПФ может оказаться недостаточным (рис. 1в, з). Практический способ увеличения числа отсчётов функции $X(v)$ состоит в следующем. Определим новую последовательность $y(k)$ длиной в M отсчётов ($M > N$) путём дополнения исходной последовательности $x(k)$ нулевыми отсчётами. Число таких нулевых отсчётов будет $M - N$:

$$y(k) = \begin{cases} x(k), & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & N \leq k \leq M \end{cases}$$

Для этой последовательности отсчётные значения функции $X(v)$ в точках $v_m = m/M$, $m = 0, 1, \dots, M-1$, взятые с новым шагом $\Delta v = 1/M$, будут

$$X(v_m) = \sum_{k=0}^{M-1} y(k) e^{-j2\pi mk/M}. \quad (3)$$

Это выражение с точностью до множителя $\Delta t/M$ представляет собой M -точечное ДПФ, которое может быть вычислено, например, с использованием быстрых алгоритмов. Характерно, что если взять $M = 2N$, то дополнительные отсчёты $X(v_m)$ будут расположены между N первоначальными. При этом улучшается качество визуализации спектральной функции $X(v)$, которая остаётся неизменной от такого дополнения, так как она определяется первоначальной длиной массива $x(k)$. Следующий пример иллюстрирует такую возможность. На рис. 2а представлено непрерывное изображение $X(v)$ на периоде $[0, 1]$ для 16-точечной последовательности

$$x(k) = \sin 2\pi(2,5/16)k + \sin[2\pi(3,5/16)k] + \sin 2\pi(5,6/16)k,$$

состоящей из трёх синусоид с относительными частотами $\nu_1 = 2,5 / 16$; $\nu_2 = 3,5 / 16$; $\nu_3 = 5,6 / 16$.
Заметим, что относительные частоты синусоид находятся в промежутках между соседними бинами ДПФ (1бин=1/N).

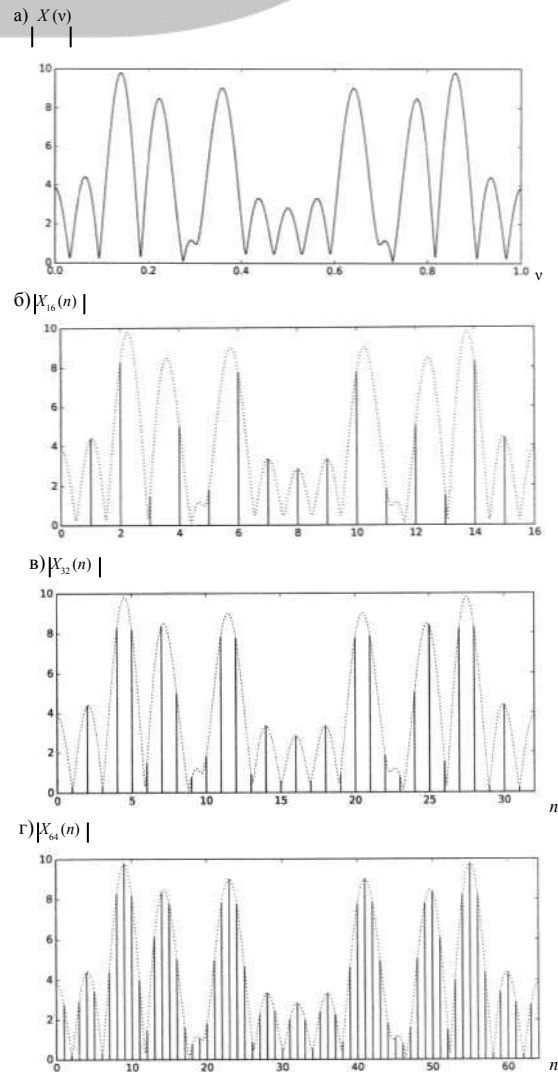


Рис. 2

На рис. 2б, изображены величины коэффициентов ДПФ, вычисленных без множителя 1/N для $N = 16$. Коэффициенты ДПФ для $N = 32$ и $N = 64$ получены дополнением нулями.

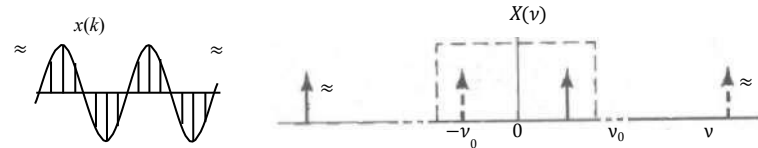
Примеры решения задач на ДПФ

• Гармонический сигнал $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ дискретизируется так, что на периоде образуется 8 отсчетов.

1. Изобразить последовательность $x(k)$ и ее спектр.
2. Найти и изобразить по модулю ДВПФ и ДПФ последовательности

$$y(k) = \sum_{m=0}^{15} x(m) \mathbf{1}(k - m) \text{ и .}$$

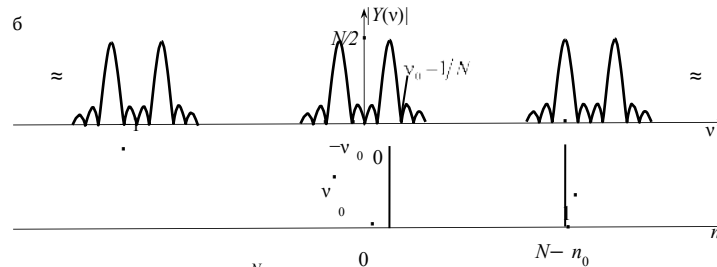
Решение 1. $x(k) = \cos 2\pi f_0 k \Delta t = \cos 2\pi v_0 k$, $v_0 = f_0 \Delta t = f_0 / f_d$ - частота косинусоиды, нормированная к частоте дискретизации (доли частоты дискретизации). Спектр дискретизованной косинусоиды - две дельта-функции (с весом $\frac{1}{2}$) в точках $\pm v_0$, повторяющиеся с периодом 1.



Решение 2. Последовательность $y(k)$ представляет собой отрезок из двух периодов косинусоиды. С учетом того, что $\cos 2\pi v k = \frac{1}{2} \exp(j2\pi v k) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi v k)$ можем записать для ДВПФ последовательности $y(k)$

$$Y(v) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} e^{-j2\pi v k} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} e^{j2\pi v k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi v k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi v k} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-j2\pi v N}}{1 - e^{-j2\pi v}} + \frac{1}{2} \frac{1 - e^{j2\pi v N}}{1 - e^{j2\pi v}} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-j2\pi v N}}{1 - e^{-j2\pi v}} + \frac{1}{2} \frac{1 - e^{j2\pi v N}}{1 - e^{j2\pi v}}$$

Модуль этой функции изображен на рис. 6. Здесь $N=16$.



Коэффициенты ДПФ $X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j2\pi n k / N}$, связаны с отсчетами ДВПФ соотношении-

ем $X(n) = X(v = \frac{n}{N})$, $n \in [0, N-1]$, $N=16$. Если v_0 кратно бину ДПФ $1/N$, т. е. $v_0 = \frac{n_0}{N}$, то на интервале $[0, N-1]$, $N=16$ будут всего два отсчета ДПФ $X(n)$ и $X(N-n) = X(n)$.

Решение избранных задач из курсовой письменной работы 16 октября 2017 г.

- Найти и изобразить по модулю ДВПФ N - точечных последовательностей

Для последовательности $x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} 1(k-m)$ и $\left(\frac{1}{N} \right)$

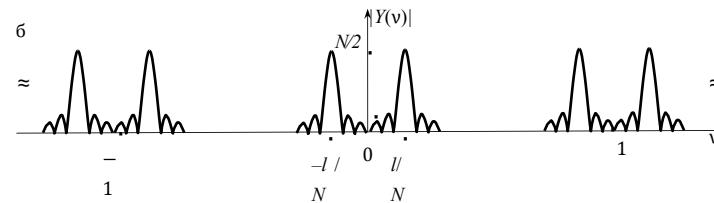
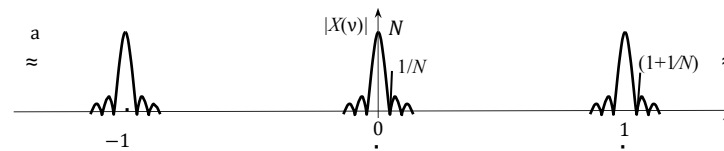
$$X(v) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi vk} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi vk} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi vk} = \frac{1 - e^{-j2\pi vN}}{1 - e^{-j2\pi v}} = e^{-j\pi v(N-1)} \frac{\sin \pi v N}{\sin \pi v}$$

Модуль этой функции изображен на рис. А.

Для последовательности $y(k)$

$$Y(v) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi(v+\frac{L}{N})k} + \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} 1(k-m) e^{-j2\pi(v-\frac{L}{N})k} = e^{-j\pi(v+\frac{L}{N})N} \frac{\sin \pi(v+\frac{L}{N})N}{\sin \pi(v+\frac{L}{N})} + e^{-j\pi(v-\frac{L}{N})N} \frac{\sin \pi(v-\frac{L}{N})N}{\sin \pi(v-\frac{L}{N})}$$

Модуль этой функции изображен на рис. Б.



- Найти ДВПФ периодической последовательности единичных импульсов

$$x(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m)$$

Решение:

$$X(v) = \sum_k \sum_m 1(k-m) e^{-j2\pi v k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1(k-m) e^{-j2\pi v k}$$

С учетом теоремы запаздывания ДВПФ имеем

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi v m}$$

Это есть ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ -функций с периодом 1. Действительно

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(v-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-n} e^{-j2\pi v n}$$

Где коэффициенты Фурье

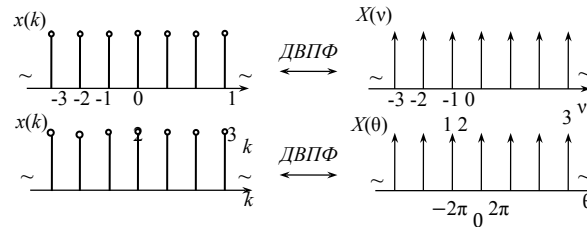
$$C_n = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(v-n) e^{j2\pi v n} dv = 1$$

Таким образом

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi v m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$$

Для $\theta = \omega \Delta t = 2\pi f \Delta t = 2\pi m \nu$ можем записать

$$X(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\theta} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n)$$



- Найти обратное ДВПФ для функции

$$X(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos \theta m$$

где $\theta = \omega \Delta t = 2\pi f \Delta t = 2\pi \nu$, Δt - шаг дискретизации. По формуле Эйлера

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos \theta m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [e^{-j\theta m} + e^{j\theta m}]$$

В предыдущей задаче было показано

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\theta m} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n)$$

Поэтому

$$x(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 1(k-m)$$

ЗАДАЧИ

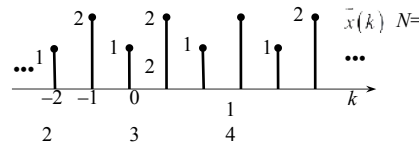
- Пусть $X(n) = \sum_{k=0}^{11} x(k)e^{-j\frac{2\pi}{12}nk}$ - 12-точечное ДПФ действительной последовательности $x(k)$ и пусть

$X(0) = 10,$	$X(1) = -5 - j4,$	$X(2) = 3 - j2,$
$X(3) = 1 + j3,$	$X(4) = 2 + j5,$	$X(5) = 6 - j2,$
$X(6) = 12$		

Не вычисляя обратного ДПФ, определить $\sum_{k=0}^{11} x(k), \sum_{k=0}^{11} e^{j\frac{2\pi}{12}k} x(k), \sum_{k=0}^{11} x(k)^2$

- Пусть $x(k)$ - N -периодическая последовательность. Тогда $3N$ тоже можно считать её периодом. Пусть $X_3(n)$ - коэффициенты ДПФ N -периодической последовательности, а $X_3(n)$ - коэффициенты ДПФ $3N$ -периодической последовательности $x(k)$.

Выразить $X_3(n)$ через $X(n)$. Проверить результат для последовательности.



- Пусть $y(k)$ означает циклическую свёртку двух последовательностей $x(k)$ и $h(k)$, $0 \leq k \leq N-1$. Проверить равенство

$$\sum_{k=0}^{N-1} y(k) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k) \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} h(k) \right)$$

**Спасибо за
внимание!**