Понятие обратной функций

Цель обучения:

Знать определение обратной функции и находить функцию обратную данной и знать свойство расположения графиков взаимно обратных функций

Определение 1:

Функция y = f (x) называется монотонной на множестве X, если она на этом множестве или убывает или возрастает.

$y = a^x$ - возрастающая при x ∈ D(x)
$\Longrightarrow$ монотонная;

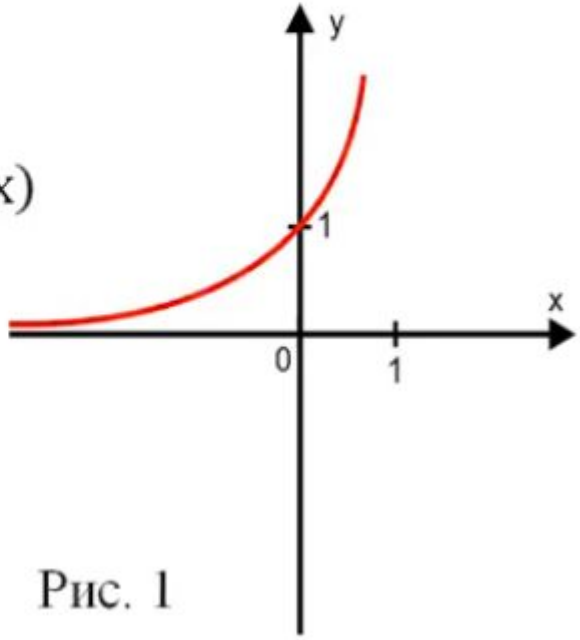
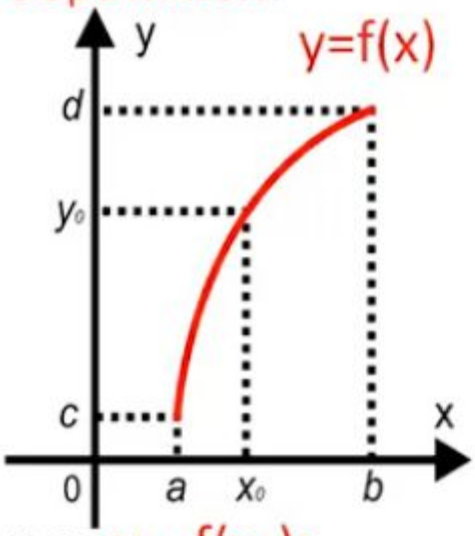


Рис. 1

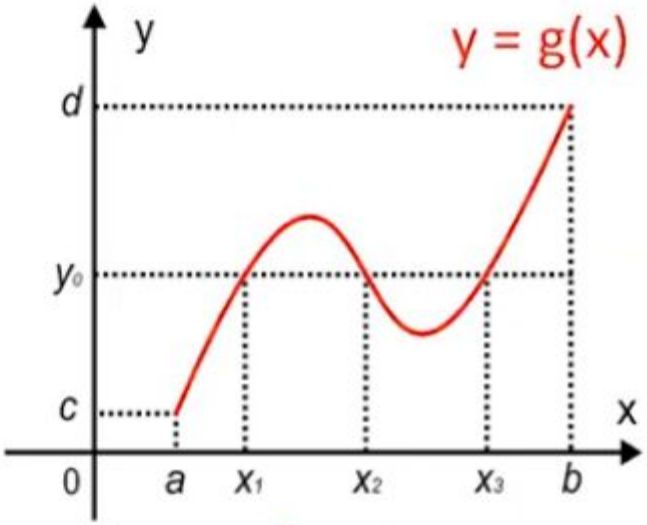
Определение 2:

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ принимает любое свое значение только в одной точке множества X, то функцию называют обратимой.



x_0: $y_0=f(x_0)$;

Рис. 2



$y = g(x)$ – необратима;

$y_0 = g(x_1)$;
$y_0 = g(x_2)$;
$y_0 = g(x_3)$;

Рис. 3

Определение 3:

Пусть $y=f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определённое число x из области определения, такое, что $f(x)=y$. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x=g(y)$. Поменяем местами x и y: $y = g(x)$.

Функцию $y=g(x)$ называют обратной к функции $y=f(x)$. *Обозначают* $f^{-1}(x)$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратные

Алгоритм нахождения обратной функции:

1. Убедиться, что функция монотонна.

2. Выразить переменную x через y.

3. Переобозначить переменные.

Вместо $x=f^{-1}(y)$ пишут $y=f^{-1}(x)$;

Пример 1.

Найдите функцию, обратную данной $y = 7x - 4$

Решение:

Линейная функция $y = 7x - 4$, $E(f) = R$;

$x_2 > x_1 \Longrightarrow 7x_2 > 7x_1 \Longrightarrow 7x_2 - 4 > 7x_1 - 4 \Longrightarrow y_2 > y_1$

$y = 7x - 4$ – возрастающая;

$7x - 4 = y$

$7x = y + 4$

$x = \frac{y+4}{7}$

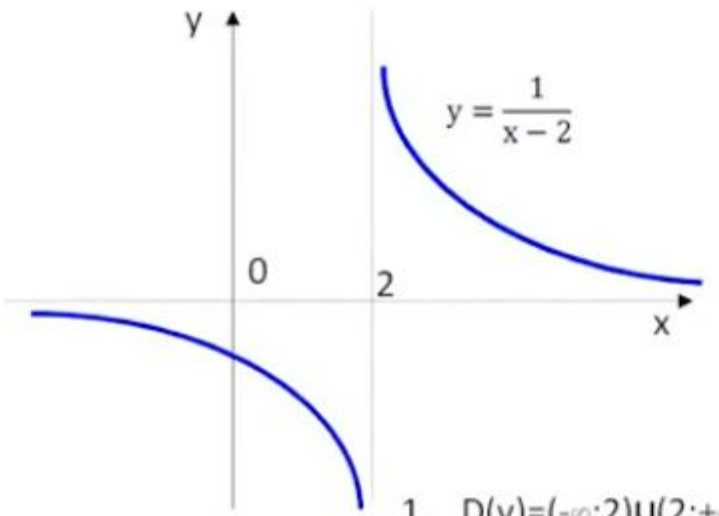
$y = \frac{x+4}{7}$ - обратная функция

Ответ: $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{7}$

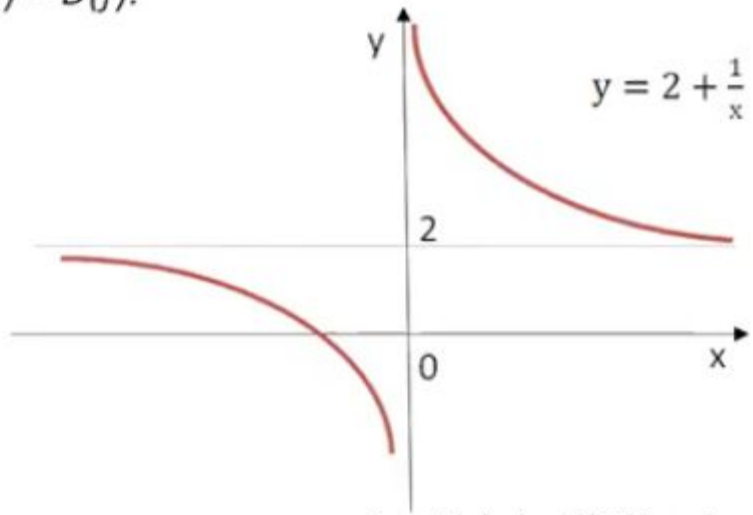
Свойства обратных функций

1. *Область определения обратной функции $f^{-1}(x)$ совпадает с множеством значений исходной функции $f(x)$, а множество значений обратной функции $f^{-1}(x)$ совпадает с областью определения исходной функции $f(x)$:*

$$D(f^{-1}) = E(f),\ E(f^{-1}) = D(f).$$



1. D(y)=(-∞;2)∪(2;+∞)
2. E(y)=(-∞;0)∪(0;+∞)



1. D(y)=(-∞;0)∪(0;+∞)
2. E(y)=(-∞;2)∪(2;+∞)

Рис. 4

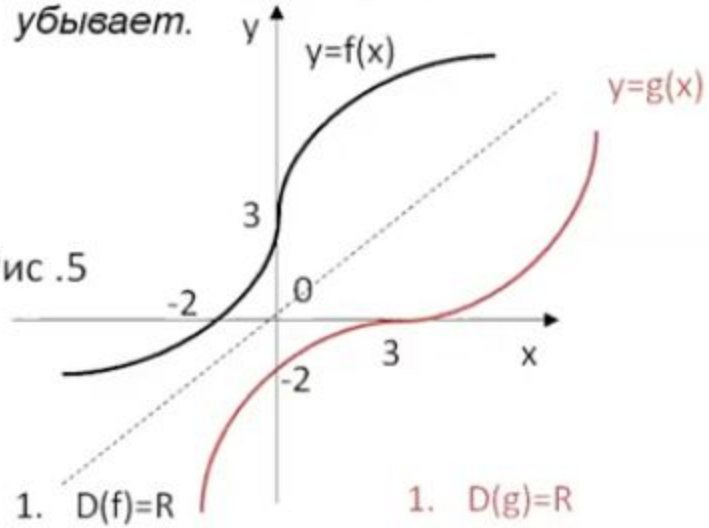
Свойства обратных функций

2. *Монотонная функция является обратимой:*

если функция f (x)возрастает, то обратная к ней функция $f^{-1}(x)$ также возрастает;

если функция f(x) убывает, то обратная к ней функция $f^{-1}(x)$ также убывает.

Рис .5



1. D(f)=R
2. E(f)=R
3. возрастающая

1. D(g)=R
2. E(g)=R
3. возрастающая

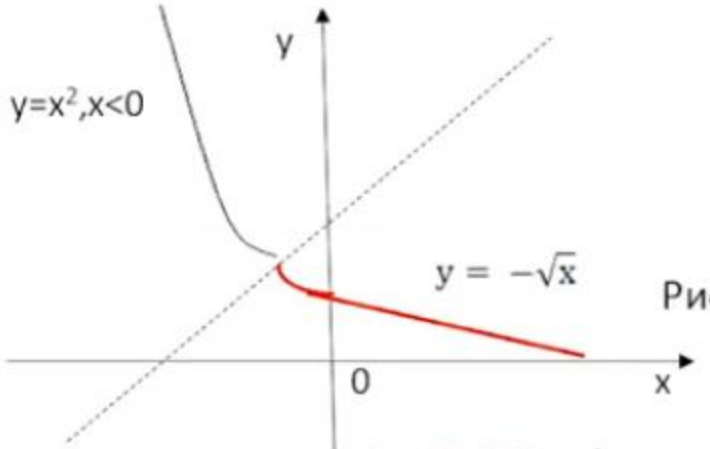


Рис .6

1. D(y)=(-∞;0]
2. E(y)=[0;+∞)
3. убывающая

1. D(y)=[0;+∞)
2. E(y)=(-∞;0]
3. убывающая

Свойства обратных функций

3. Если функция имеет обратную функцию, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой y = x.

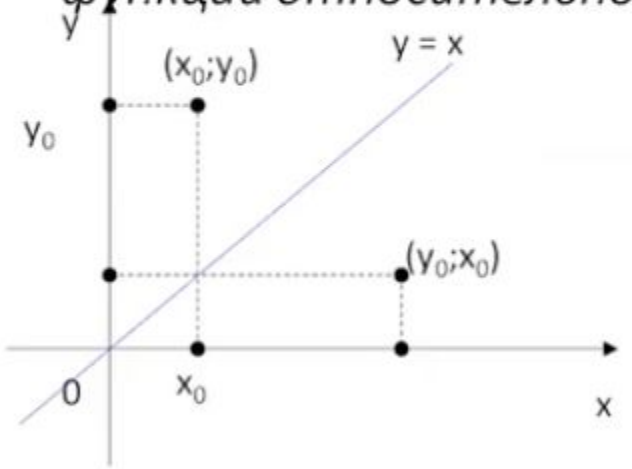


Рис. 7

Запомни:

чтобы получить график функции $y = f^{-1}(x)$,
обратной к функции $y = f(x)$,
надо график функции $y = f(x)$
отразить симметрично
относительно прямой $y = x$.

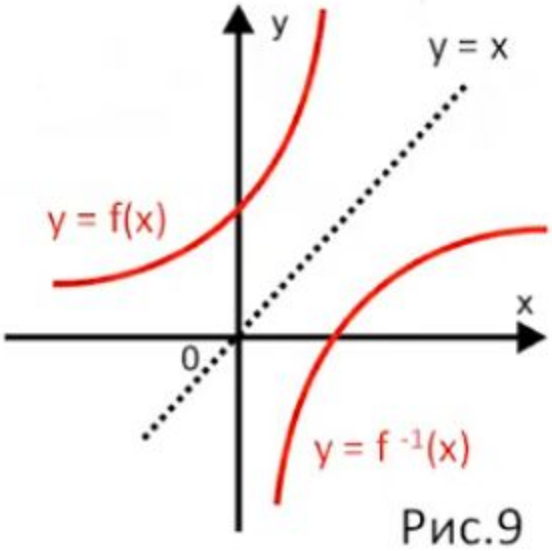


Рис.9

Пример 2. Найти функцию обратную для y = 6 – 2x, построить их графики в одной координатной плоскости.

Решение.

$y = 6 - 2x;$

$2x = 6 - y;$

$$x = \frac{6 - y}{2}$$

$x = 3 - 0{,}5\,y;$

$y = 3 - 0{,}5x$ – обратная функция;

Ответ: $y = 3 - 0{,}5x$.

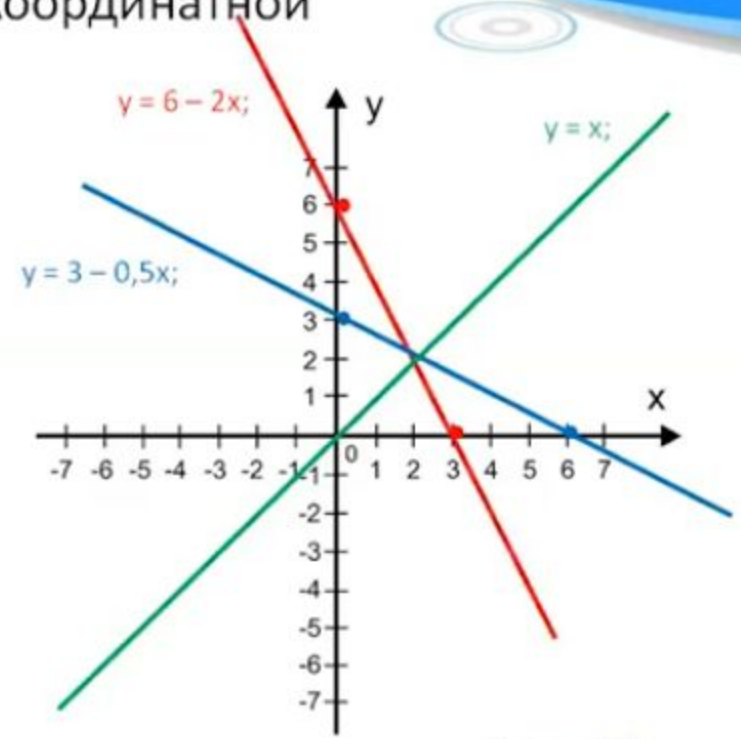


Рис.10