

# Понятие обратной функций



**Цель обучения:**

*Знать определение обратной функции  
и находить функцию обратную  
данной и знать свойство расположения  
графиков взаимно обратных функций*

## Определение 1:

Функция  $y = f(x)$  называется **монотонной** на множестве  $X$ , если она на этом множестве или **убывает** или **возрастает**.

$y = a^x$  - возрастающая при  $x \in D(x)$   
 $\Rightarrow$  **монотонная**;

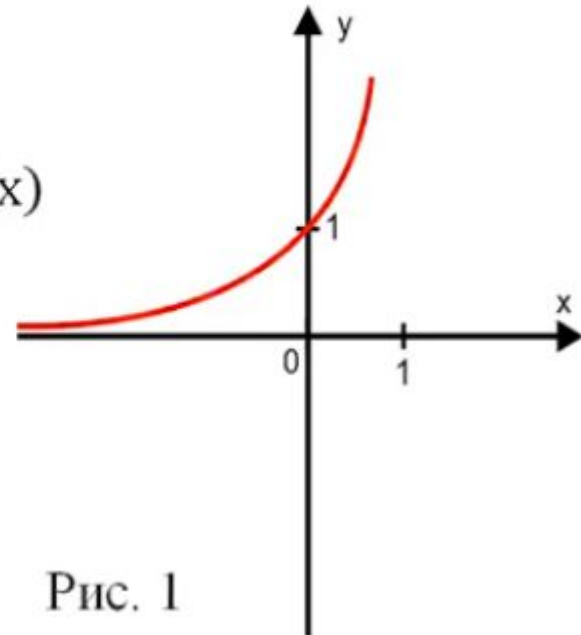


Рис. 1

## Определение 2:

Если функция  $y = f(x)$ ,  $x \in X$  принимает любое свое значение только в одной точке множества  $X$ , то функцию называют **обратимой**.

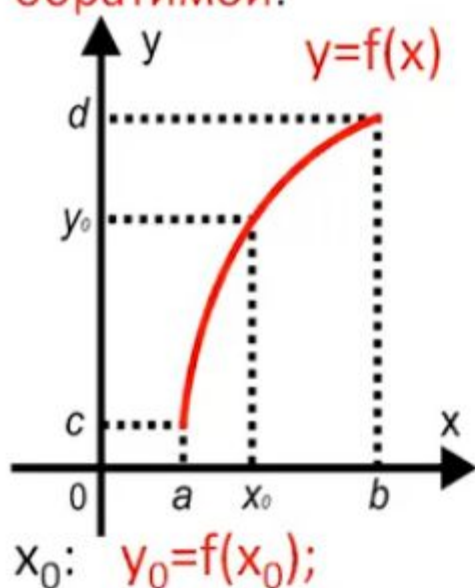


Рис. 2

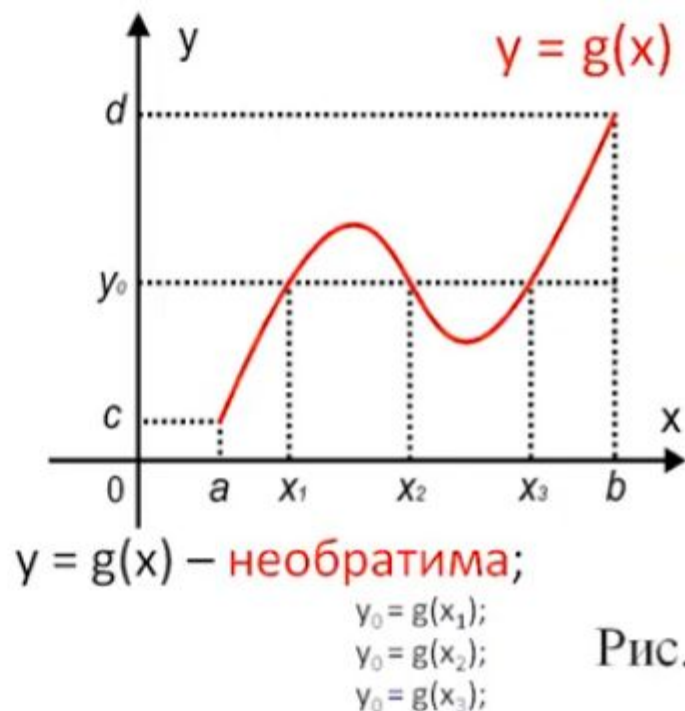


Рис. 3

### Определение 3:

Пусть  $y=f(x)$  – обратимая функция. Тогда каждому  $y$  из множества значений функции соответствует одно определённое число  $x$  из области определения, такое, что  $f(x)=y$ . Это соответствие определяет функцию  $x$  от  $y$ , которую обозначим  $x=g(y)$ . Поменяем местами  $x$  и  $y$ :  $y = g(x)$ .

Функцию  $y=g(x)$  называют **обратной** к функции  $y=f(x)$ . Обозначают  $f^{-1}(x)$ .

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  **взаимно обратные**

## Алгоритм нахождения обратной функции:

1. Убедиться, что функция **МОНОТОННА**.
2. Выразить переменную **x** через **y**.
3. Переобозначить переменные.

Вместо  $x=f^{-1}(y)$  пишут  $y=f^{-1}(x)$ ;

Пример 1.

Найдите функцию, обратную данной  $y = 7x - 4$

Решение:

Линейная функция  $y = 7x - 4$ ,  $E(f) = \mathbb{R}$ ;

$$x_2 > x_1 \Rightarrow 7x_2 > 7x_1 \Rightarrow 7x_2 - 4 > 7x_1 - 4 \Rightarrow y_2 > y_1$$

$y = 7x - 4$  – **возрастающая**;

$$7x - 4 = y$$

$$7x = y + 4$$

$$x = \frac{y + 4}{7}$$

$$y = \frac{x + 4}{7} \text{ – обратная функция}$$

$$\text{Ответ: } f^{-1}(x) = \frac{x + 4}{7}$$

# Свойства обратных функций

1. Область определения обратной функции  $f^{-1}(x)$  совпадает с множеством значений исходной функции  $f(x)$ , а множество значений обратной функции  $f^{-1}(x)$  совпадает с областью определения исходной функции  $f(x)$ :

$$D(f^{-1}) = E(f), E(f^{-1}) = D(f).$$

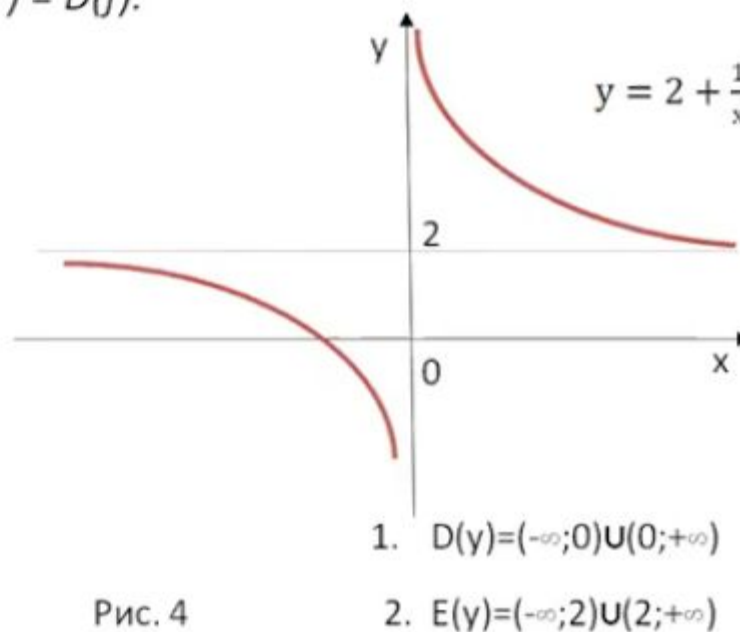
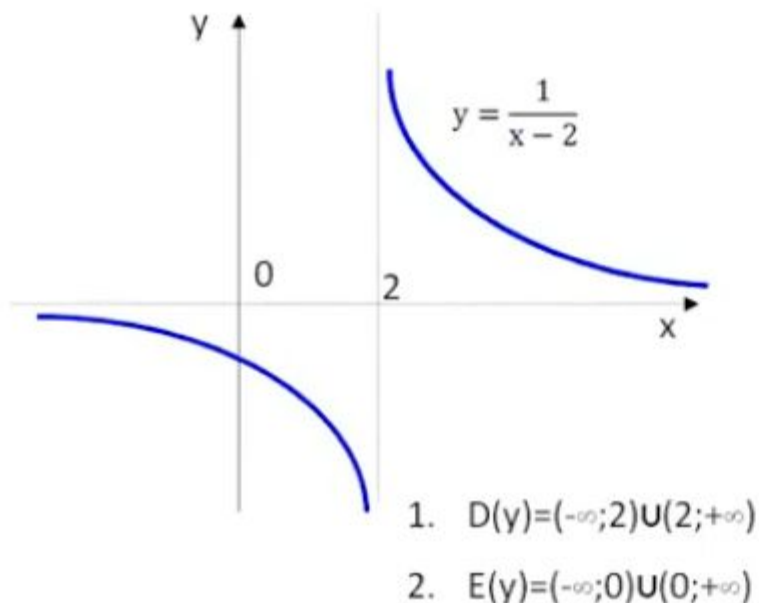


Рис. 4

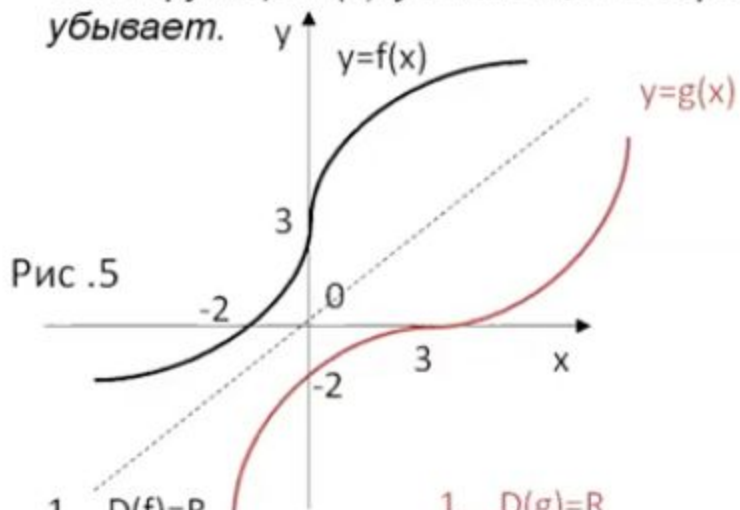


## Свойства обратных функций

2. Монотонная функция является обратимой:

если функция  $f(x)$  возрастает, то обратная к ней функция  $f^{-1}(x)$  также возрастает;

если функция  $f(x)$  убывает, то обратная к ней функция  $f^{-1}(x)$  также убывает.



1.  $D(f)=\mathbb{R}$

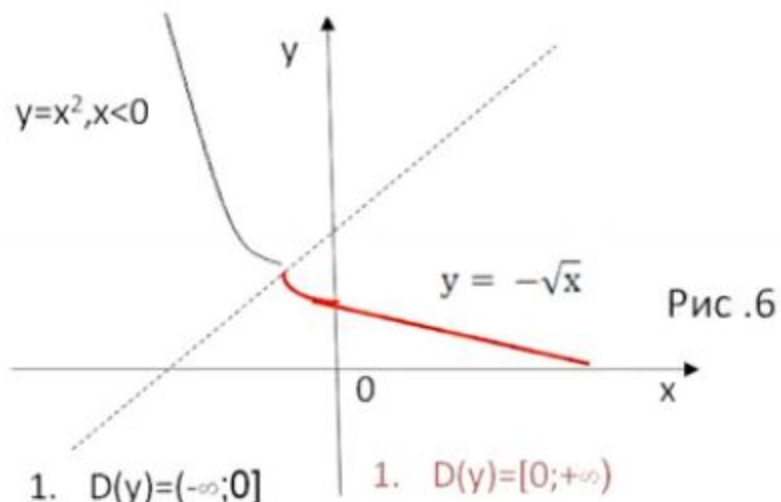
2.  $E(f)=\mathbb{R}$

3. возрастающая

1.  $D(g)=\mathbb{R}$

2.  $E(g)=\mathbb{R}$

3. возрастающая



1.  $D(y)=(-\infty; 0]$

2.  $E(y)=[0; +\infty)$

3. убывающая

1.  $D(y)=[0; +\infty)$

2.  $E(y)=(-\infty; 0]$

3. убывающая

## Свойства обратных функций

3. Если функция имеет обратную функцию, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой  $y = x$ .

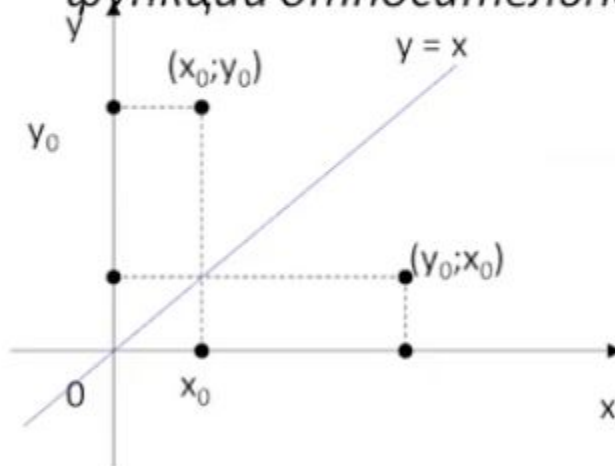
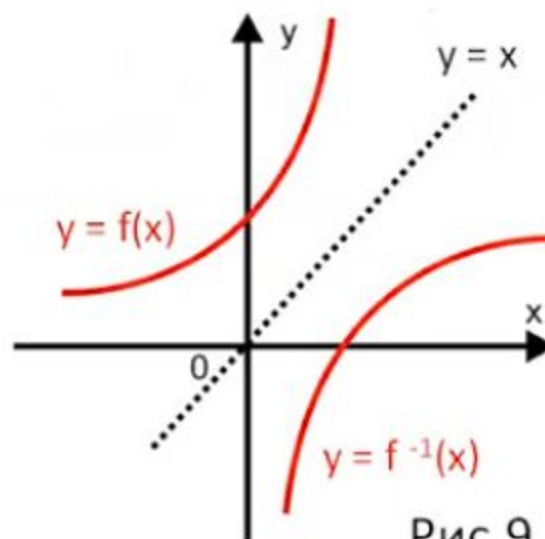


Рис. 7

Запомни:

чтобы получить график функции  $y = f^{-1}(x)$ ,  
обратной к функции  $y = f(x)$ ,  
надо график функции  $y = f(x)$   
отразить симметрично  
относительно прямой  $y = x$ .



Пример 2. Найти функцию обратную для  $y = 6 - 2x$ , построить их графики в одной координатной плоскости.

Решение.

$$y = 6 - 2x;$$

$$2x = 6 - y;$$

$$x = \frac{6 - y}{2}$$

$$x = 3 - 0,5y;$$

$y = 3 - 0,5x$  – обратная функция;

Ответ:  $y = 3 - 0,5x$ .

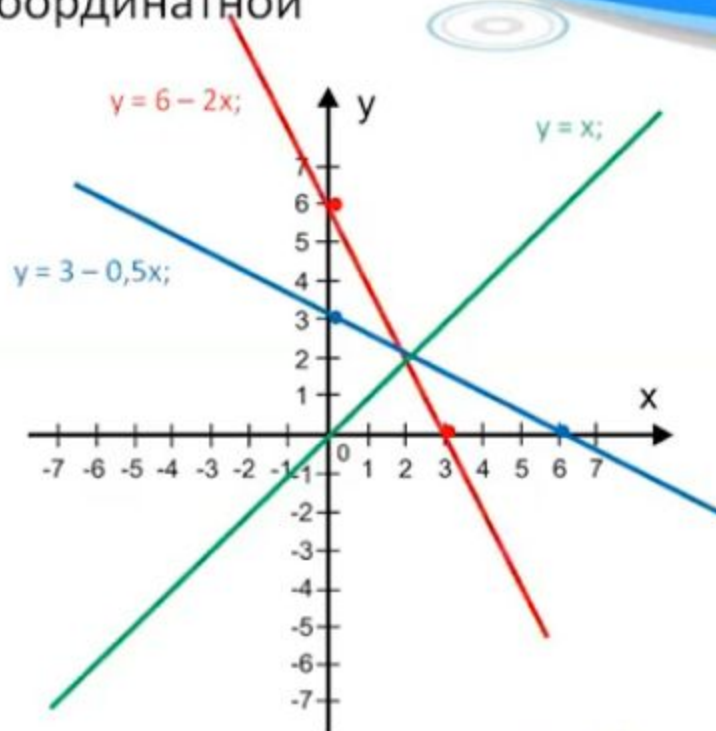


Рис.10