

Понятие обратной функций



Цель обучения:

*Знать определение обратной функции
и находить функцию обратную
данной и знать свойство расположения
графиков взаимно обратных функций*

Определение 1:

Функция $y = f(x)$ называется **монотонной** на множестве X , если она на этом множестве или **убывает** или **возрастает**.

$y = a^x$ - возрастающая при $x \in D(x)$
 \Rightarrow **монотонная**;

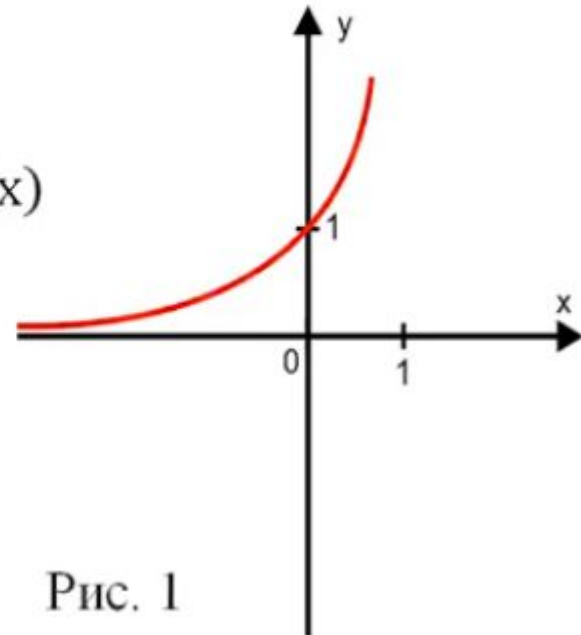


Рис. 1

Определение 2:

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ принимает любое свое значение только в одной точке множества X , то функцию называют **обратимой**.

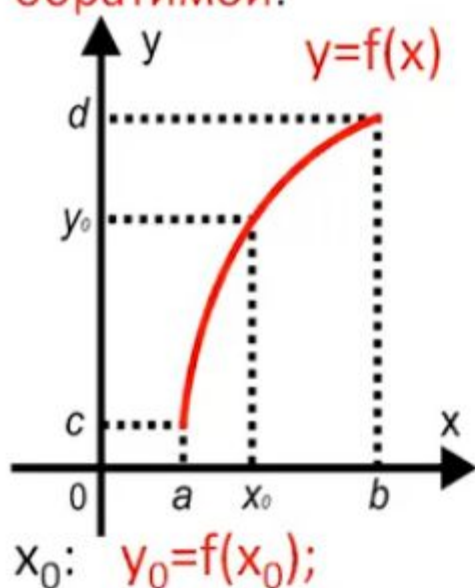


Рис. 2

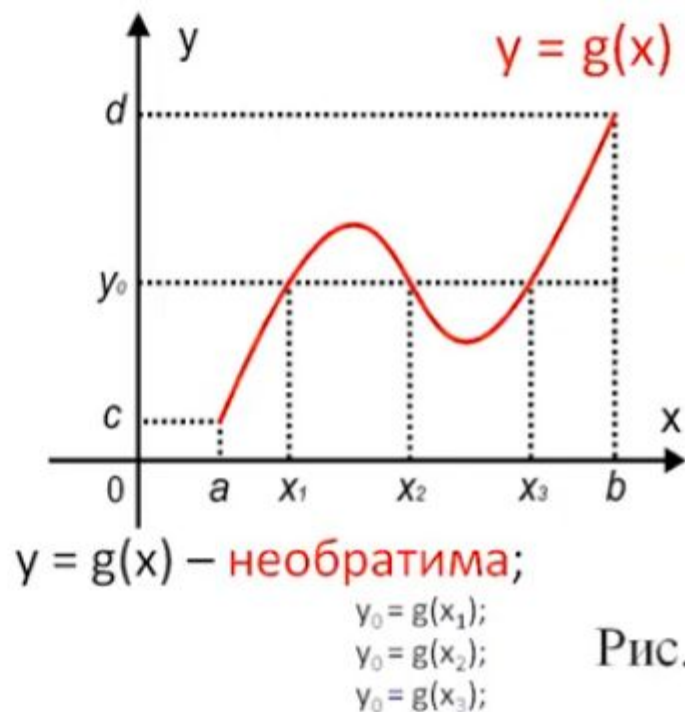


Рис. 3

Определение 3:

Пусть $y=f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определённое число x из области определения, такое, что $f(x)=y$. Это соответствие определяет функцию x от y , которую обозначим $x=g(y)$. Поменяем местами x и y : $y = g(x)$.

Функцию $y=g(x)$ называют **обратной** к функции $y=f(x)$. Обозначают $f^{-1}(x)$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ **взаимно обратные**

Алгоритм нахождения обратной функции:

1. Убедиться, что функция **МОНОТОННА**.
2. Выразить переменную **x** через **y**.
3. Переобозначить переменные.

Вместо $x=f^{-1}(y)$ пишут $y=f^{-1}(x)$;

Пример 1.

Найдите функцию, обратную данной $y = 7x - 4$

Решение:

Линейная функция $y = 7x - 4$, $E(f) = \mathbb{R}$;

$$x_2 > x_1 \Rightarrow 7x_2 > 7x_1 \Rightarrow 7x_2 - 4 > 7x_1 - 4 \Rightarrow y_2 > y_1$$

$y = 7x - 4$ - **возрастающая**;

$$7x - 4 = y$$

$$7x = y + 4$$

$$x = \frac{y + 4}{7}$$

$$y = \frac{x + 4}{7} \text{ - обратная функция}$$

$$\text{Ответ: } f^{-1}(x) = \frac{x + 4}{7}$$

Свойства обратных функций

1. Область определения обратной функции $f^{-1}(x)$ совпадает с множеством значений исходной функции $f(x)$, а множество значений обратной функции $f^{-1}(x)$ совпадает с областью определения исходной функции $f(x)$:

$$D(f^{-1}) = E(f), E(f^{-1}) = D(f).$$

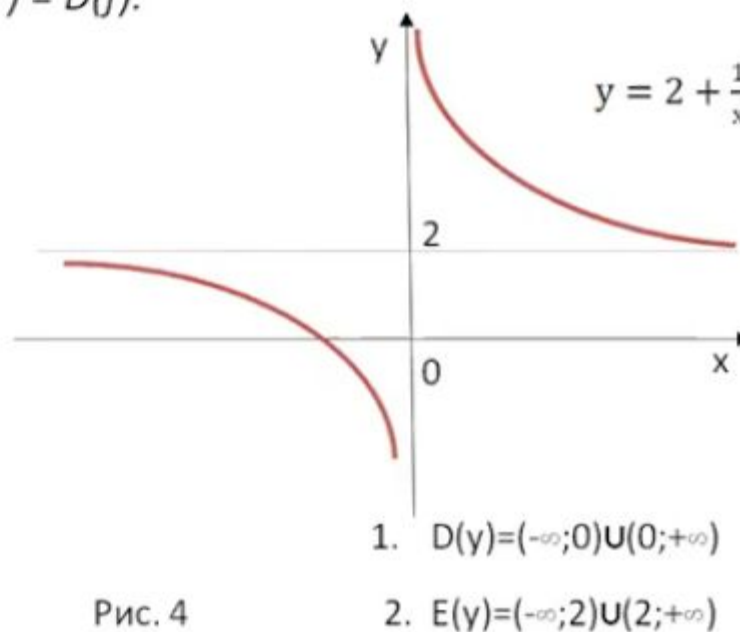
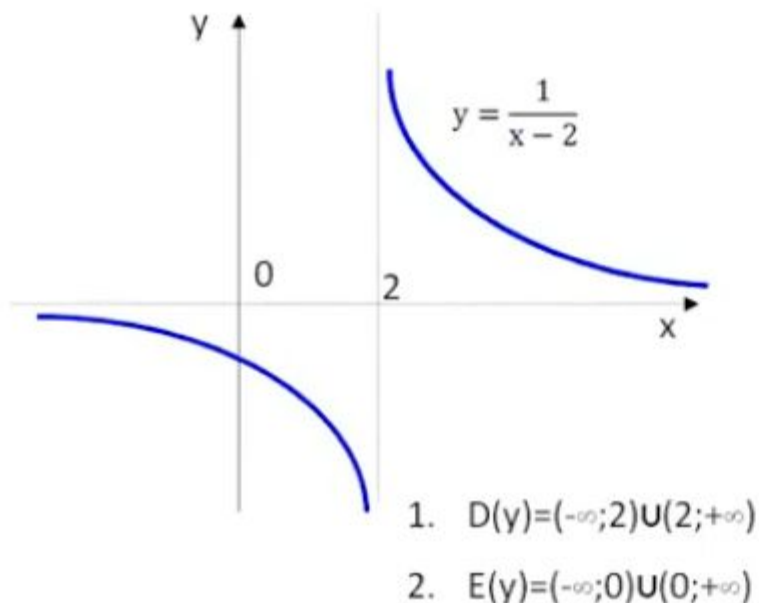


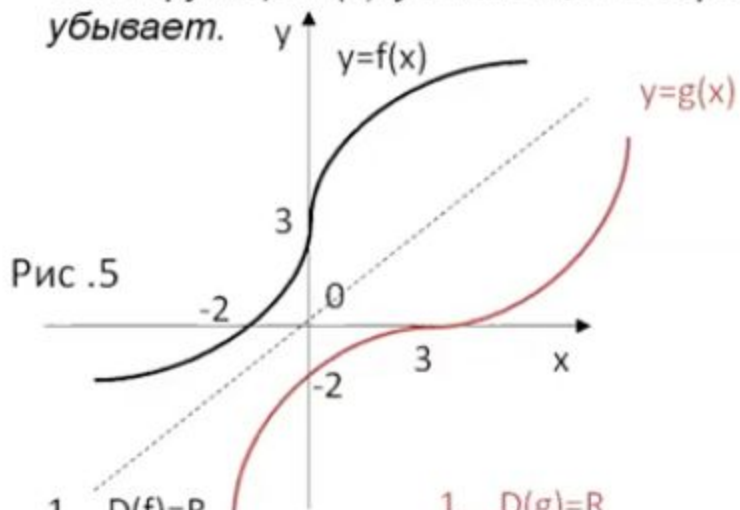
Рис. 4

Свойства обратных функций

2. Монотонная функция является обратимой:

если функция $f(x)$ возрастает, то обратная к ней функция $f^{-1}(x)$ также возрастает;

если функция $f(x)$ убывает, то обратная к ней функция $f^{-1}(x)$ также убывает.



1. $D(f)=\mathbb{R}$

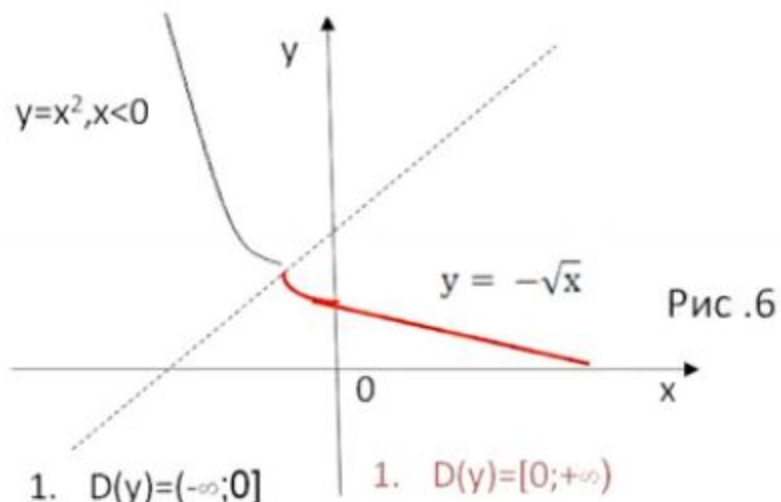
2. $E(f)=\mathbb{R}$

3. возрастающая

1. $D(g)=\mathbb{R}$

2. $E(g)=\mathbb{R}$

3. возрастающая



1. $D(y)=(-\infty; 0]$

2. $E(y)=[0; +\infty)$

3. убывающая

1. $D(y)=[0; +\infty)$

2. $E(y)=(-\infty; 0]$

3. убывающая

Свойства обратных функций

3. Если функция имеет обратную функцию, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.

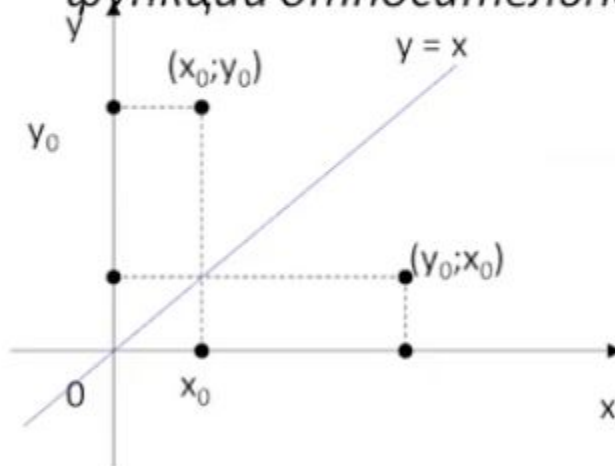
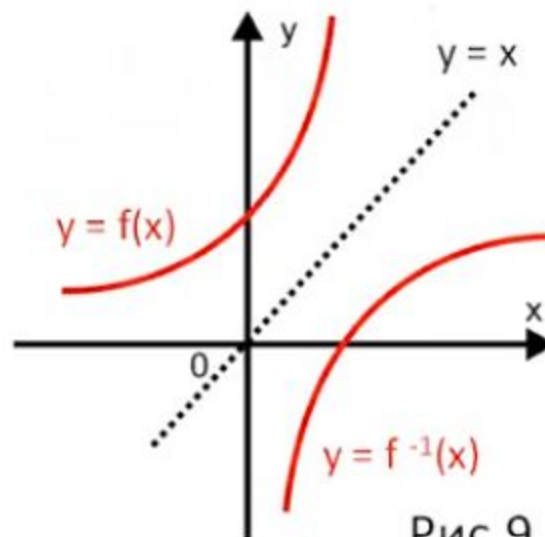


Рис. 7

Запомни:

чтобы получить график функции $y = f^{-1}(x)$,
обратной к функции $y = f(x)$,
надо график функции $y = f(x)$
отразить симметрично
относительно прямой $y = x$.



Пример 2. Найти функцию обратную для $y = 6 - 2x$, построить их графики в одной координатной плоскости.

Решение.

$$y = 6 - 2x;$$

$$2x = 6 - y;$$

$$x = \frac{6 - y}{2}$$

$$x = 3 - 0,5y;$$

$y = 3 - 0,5x$ – обратная функция;

Ответ: $y = 3 - 0,5x$.

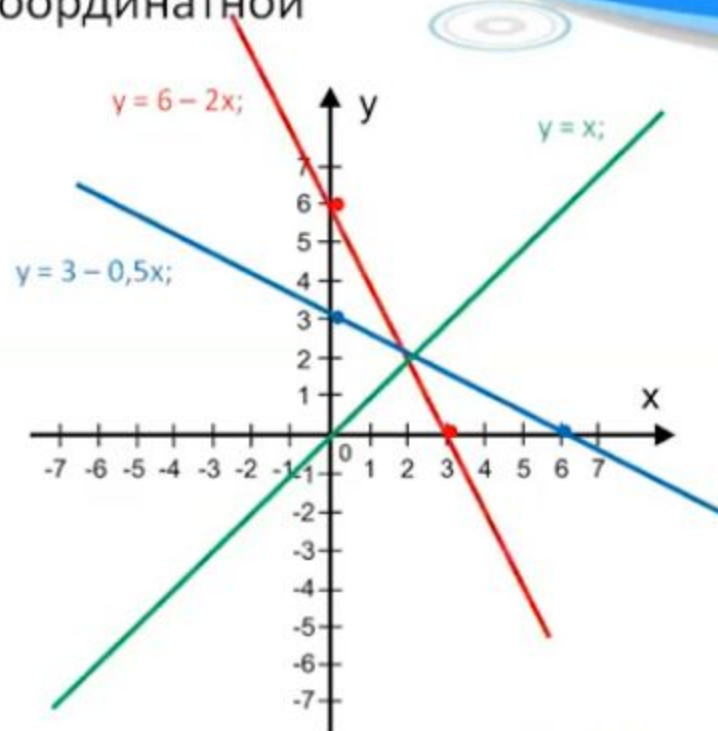


Рис.10