

Кафедра математической физики

Обратные задачи определения источника в
уравнении
теплопроводности

Научный руководитель: Денисов А.М.

Студент : Жанагизова А.К.

2017 год

Прямая задача

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} + f(x)g(t), \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T \quad (1) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (2) \\ u(x, 0) = 0. \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3) \end{array} \right.$$

Формулировка обратной задачи

Пусть функция $f(x)$ задана, а $g(t)$ неизвестна.

Требуется определить $g(t)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (1) - (3)

$$u'_x(0, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

Теорема 1 Пусть $f(x) \in C^5[0, 1]$, $f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $h(t) \in C^1[0, 1]$, $h(0) = 0$. Тогда существует единственная функция $g(t) \in C[0, T]$, являющаяся решением обратной задачи (1)-(4).

Для решения обратной задачи получим следующее интегральное уравнение:

$$K(0)g(t) + \int_0^t K'_t(t - \tau)g(\tau) d\tau = h'(t),$$

$$K'_t(t - \tau) = -a^2\pi^3 \sum_{n=1}^{\infty} f_n n^3 e^{-(a\pi n)^2(t-\tau)}.$$

$$K(0) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} f_n n = f'(0) \neq 0,$$

Рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x)g(t), & 0 < x < 1, 0 < t \leq T & (5) \\ u'_x(0, t) = u'_x(1, t) = 0 & 0 \leq t \leq T & (6) \\ u(x, 0) = 0. & 0 \leq x \leq 1 & (7) \end{cases}$$

Функция $f(x)$ задана, а $g(t)$ неизвестна.

Задана дополнительная информация о

решении задачи (5) - (7)

$$u(0, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq t \quad (8)$$

Рассмотрим обратную задачу в случае, когда $f(0) = 0$.

Теорема 2 *Предположим, что $f(x) \in C^6[0, l]$,*

$f'(0) = f'(1) = f'''(0) = f'''(1) = 0, f(0) = 0$ и $f''(0) \neq 0,$

Тогда, если $h(t) \in C^2[0, T], h(0) = 0$ и $h'(0) = 0,$ то существует единственное решение $g(t) \in C[0, T]$ обратной задачи.

$$\int_0^t K(t - \tau) g(\tau) d\tau = h(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Так как $K(0) = f(0) = 0,$ а $f''(0) \neq 0,$ то

продифференцировав уравнение по переменной t 2 раза,

получим уравнение Вольтерра 2-го рода:

$$K_t(0) g(t) + \int_0^t K_{tt} g(\tau) d\tau = h''(t),$$

Численный метод решения обратных задач

Рассмотрим обратную задачу для первой краевой задачи.

Для её решения нужно решить интегральное уравнение

$$g(t) + \int_0^t B(t - \tau) g(\tau) d\tau = p(t),$$

где

$$B(t - \tau) = \frac{K'_t(t, \tau)}{K(0)},$$

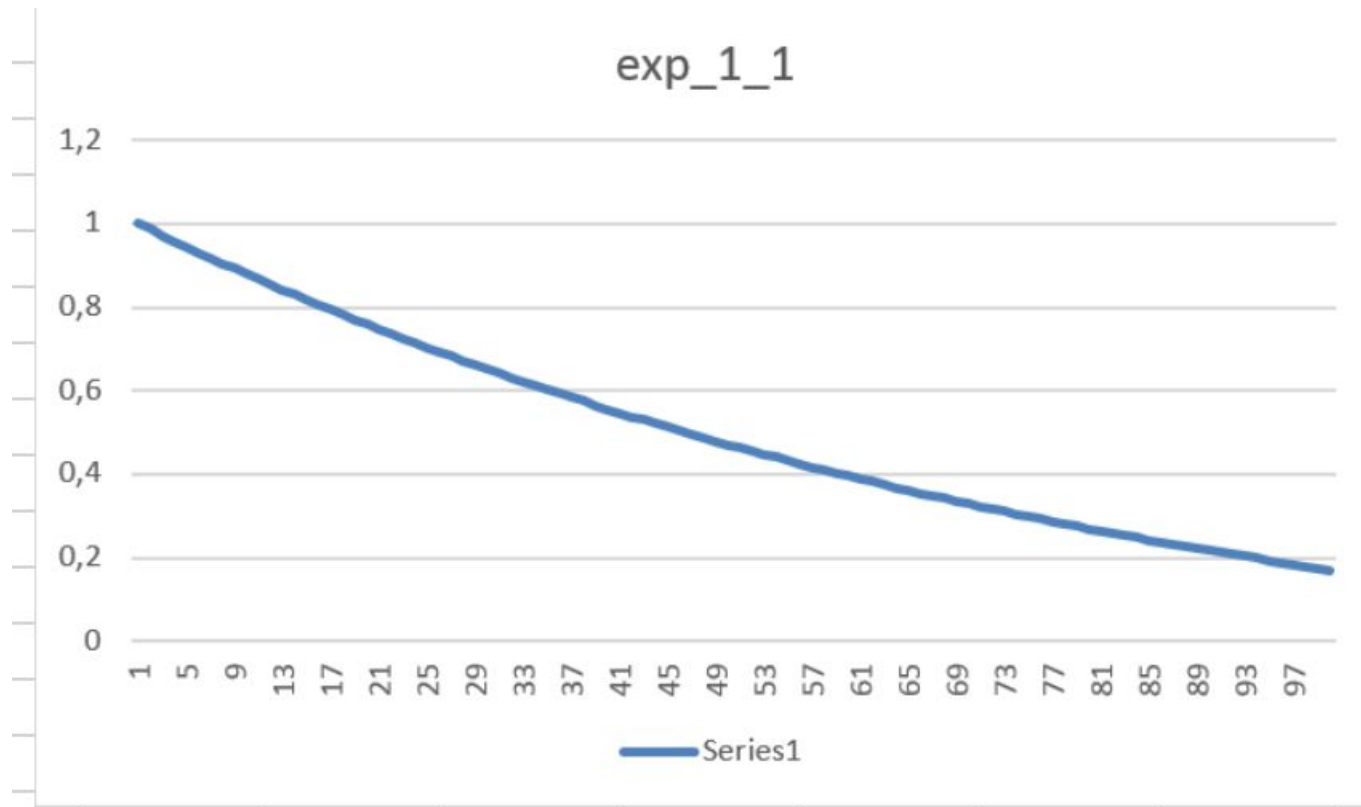
$$p(t) = \frac{h'(t_i)}{K(0)}.$$

Заменяя интеграл по формуле левых прямоугольников, получим

$$\tilde{g}(t_i) + \sum_{j=0}^i \frac{K'_t(t_i, t_j)}{K(0)} \tilde{g}(t_j) \tau = \frac{h'(t_i)}{K(0)}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\tilde{g}(t_0) = g(0) = \frac{h'(0)}{K(0)}.$$

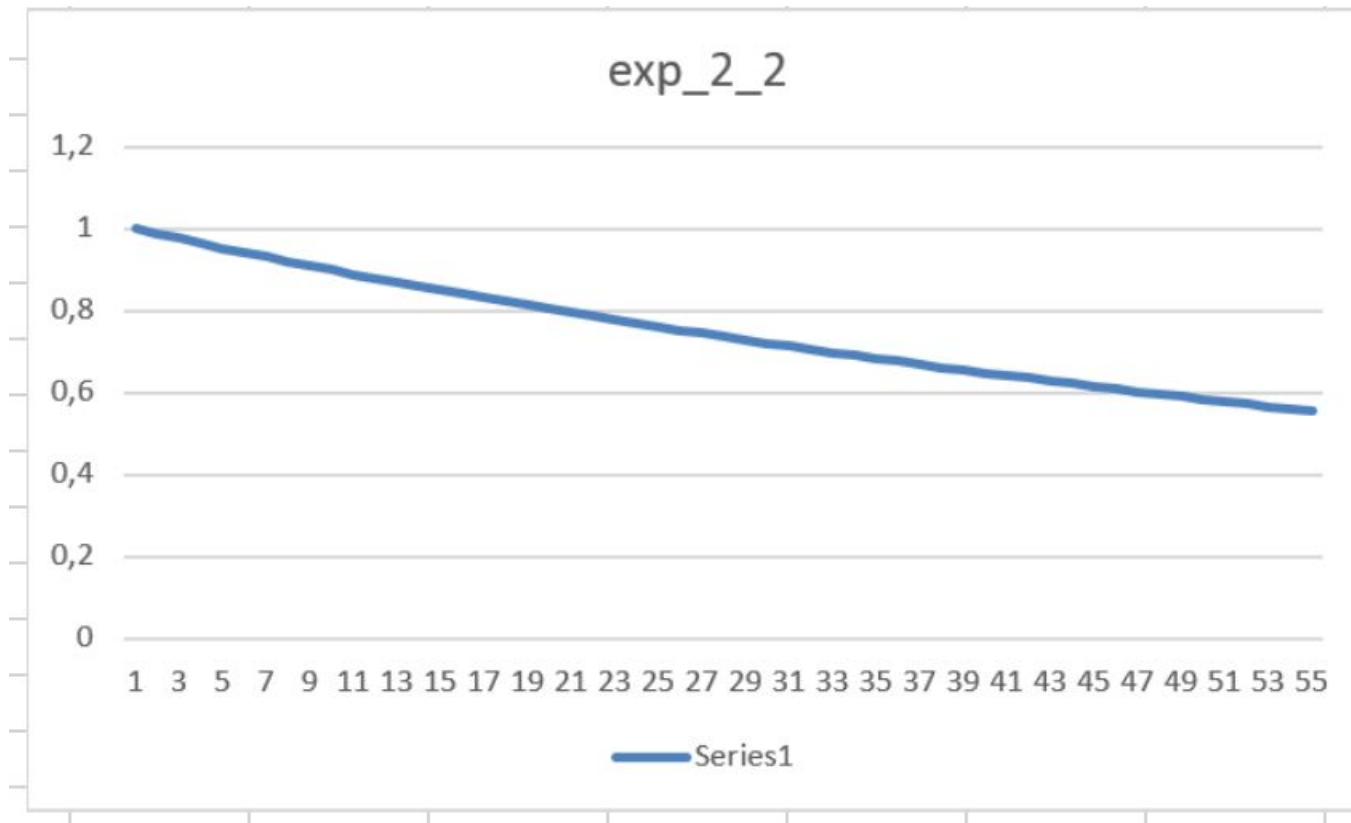
Результаты расчётов



$$f(x) = \sin \pi x,$$

$$g(t) = e^{-t}$$

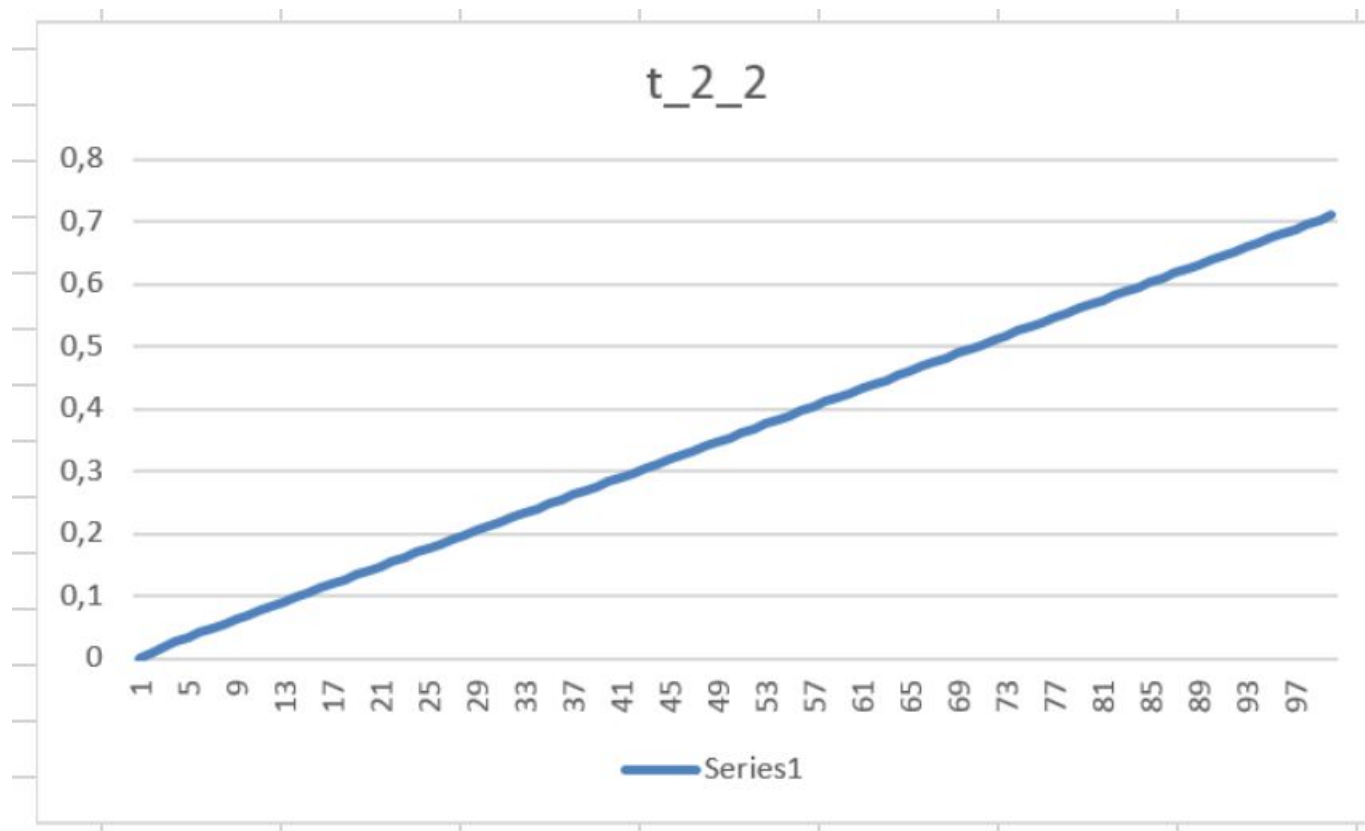
Результаты расчётов



$$f(x) = \cos \pi x$$

$$g(t) = e^{-t}$$

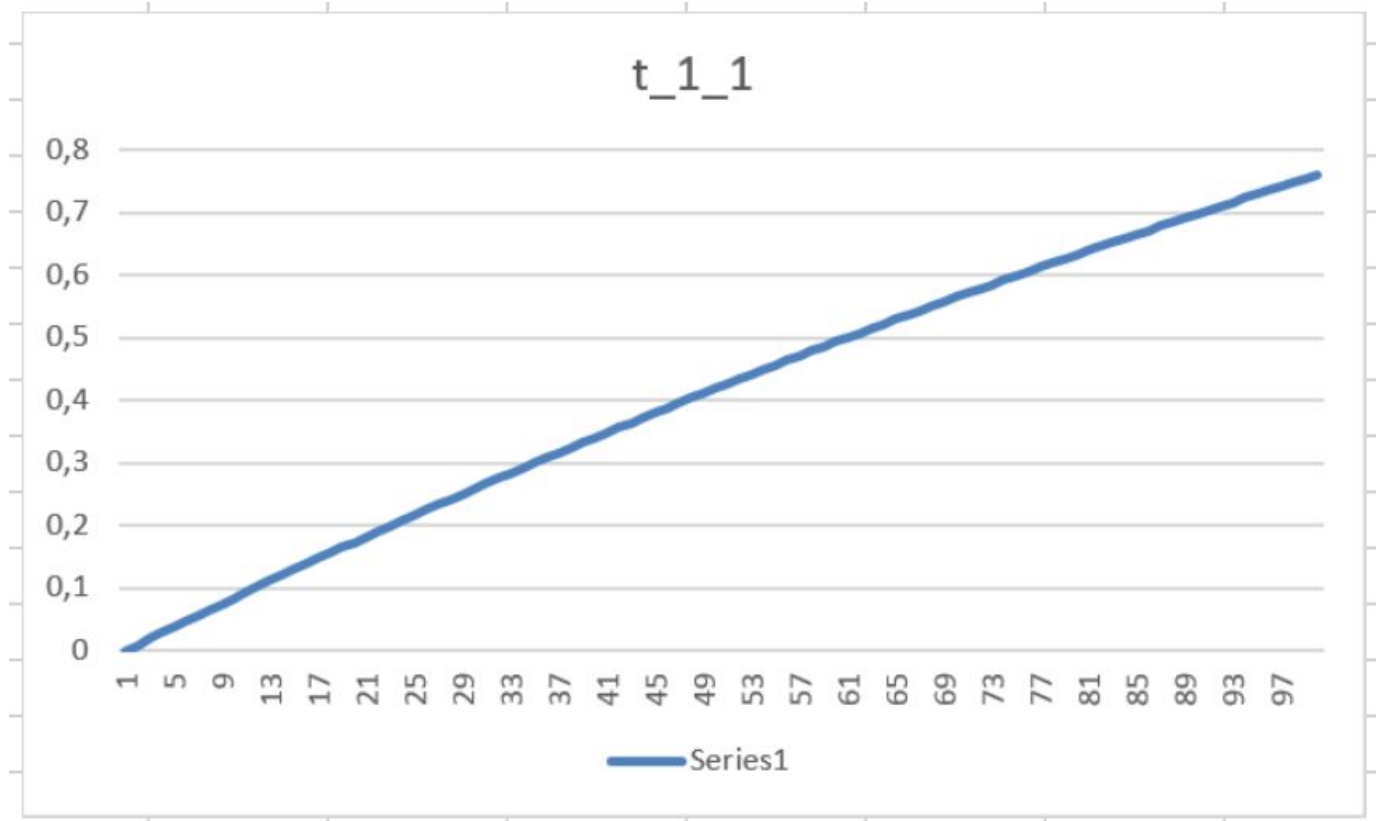
Результаты расчётов



$$f(x) = 1 + \cos 2\pi x$$

$$g(t) = t$$

Результаты расчётов



$$f(x) = \sin \pi x$$

$$g(t) = t$$

Заключение

- Исследованы обратные задачи для уравнения теплопроводности, состоящие в определении неизвестных функций, входящих в источник
- Доказаны существование и единственность решений этих обратных задач
- Выведены интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода для определения неизвестных функций
- Предложены численные методы решения обратных задач
- Проведён ряд вычислительных экспериментов, иллюстрирующих работу предложенного ЧМ.