Кафедра математической физики

Обратные задачи определения источника в уравнении теплопроводности

Научный руководитель: Денисов А.М.
Студент : Жанагизова А.К.

2017 год

Прямая задача

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx} + f(x)\,g(t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T & (1)\\
u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T & (2)\\
u(x,0) = 0. \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 & (3)
\end{cases}
$$

Формулировка обратной задачи

Пусть функция f(x) задана, а g(t) неизвестна. Требуется определить g(t), если известна дополнительная информация о решении задачи (1) - (3)

$$u'_x(0,t) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \quad (4)$$

Теорема 1 *Пусть* $f(x) \in C^5[0,1]$, $f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $h(t) \in C^1[0,1]$, $h(0) = 0$. *Тогда существует единственная функция* $g(t) \in C[0,T]$, *являющаяся решением обратной задачи (1)-(4).*

Для решения обратной задачи получим следующее интегральное уравнение:

$$K(0)\, g(t) + \int_0^t K'_t(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = h'(t),$$

$$K'_t(t-\tau) = -a^2\pi^3 \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, n^3\, e^{-(a\pi n)^2 (t-\tau)}.$$

$$K(0) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, n = f'(0) \neq 0,$$

Рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x)\,g(t), \quad 0 < x < 1,\, 0 < t \leqslant T & (5) \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T & (6) \\ u(x,0) = 0. \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 & (7) \end{cases}$$

Функция $f(x)$ задана, а $g(t)$ неизвестна.

Задана дополнительная информация о

решении задачи (5) - (7)

$u(0,t) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t \quad (8)$

Рассмотрим обратную задачу в случае, когда $f(0) = 0$.

Теорема 2 *Предположим, что* $f(x) \in C^6[0, l]$,
$f'(0) = f'(1) = f'''(0) = f'''(1) = 0, f(0) = 0$ *и* $f''(0) \neq 0$,
Тогда, если $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(0) = 0$ *и* $h'(0) = 0$, *то существует единственное решение* $g(t) \in C[0, T]$ *обратной задачи.*

$$\int_0^t K(t - \tau)\, g(\tau)\, d\tau = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Так как $K(0) = f(0) = 0$, а $f''(0) \neq 0$, то

продифференцировав уравнение по переменной t 2 раза,

получим уравнение Вольтерра 2-го рода:

$K_t(0)\, g(t) + \int_0^t K_{tt}\, g(\tau)\, d\tau = h''(t)$,

Численный метод решения обратных задач

Рассмотрим обратную задачу для первой краевой задачи.

Для её решения нужно решить интегральное уравнение

$g(t) + \int_0^t B(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = p(t),$

где

$B(t-\tau) = \frac{K'_t(t,\tau)}{K(0)},$

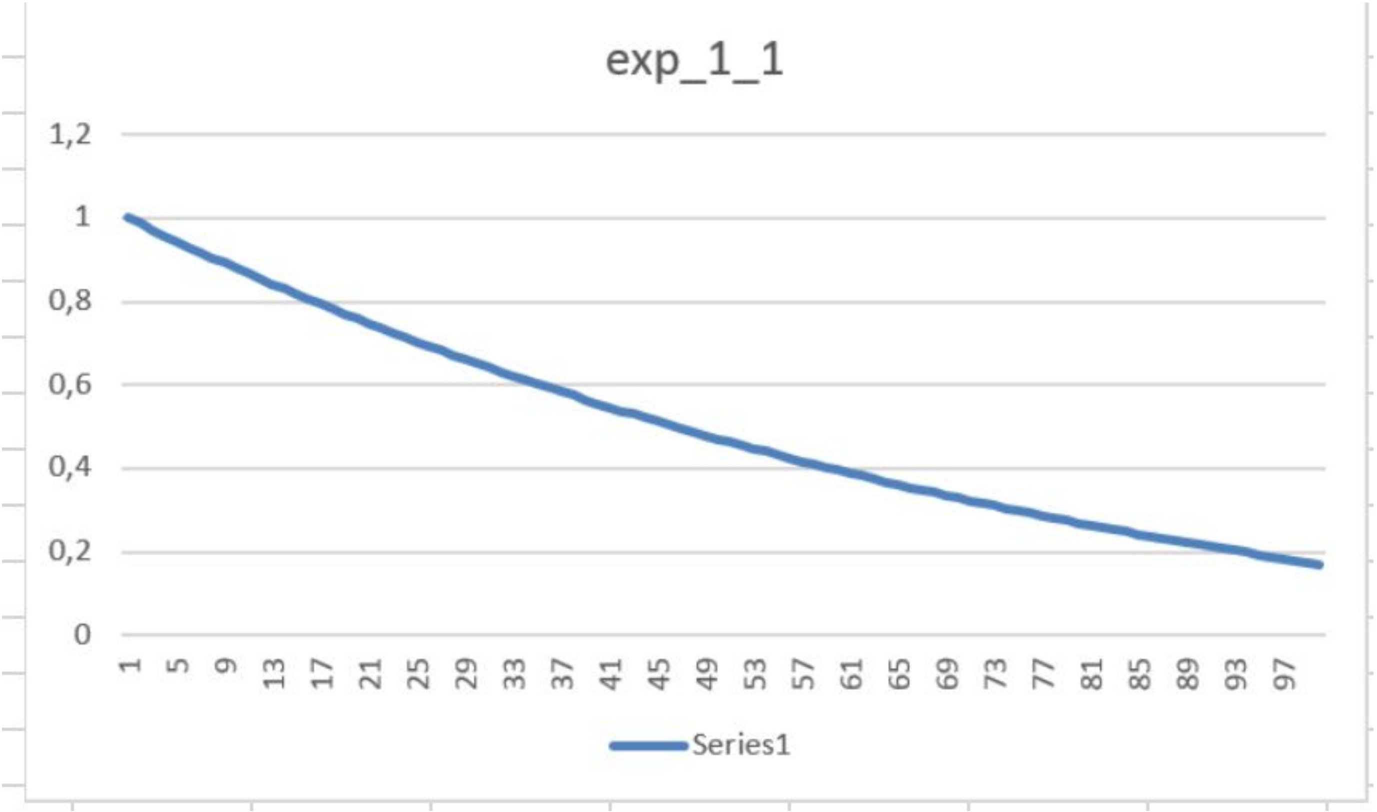
$p(t) = \frac{h'(t_i)}{K(0)}.$

Заменяя интеграл по формуле левых прямоугольников, получим

$$\widetilde{g}(t_i) + \sum_{j=0}^{i} \frac{K'_t(t_i,t_j)}{K(0)}\, \widetilde{g}(t_j)\, \tau = \frac{h'(t_i)}{K(0)}, \quad i = 1, \ldots, N$$

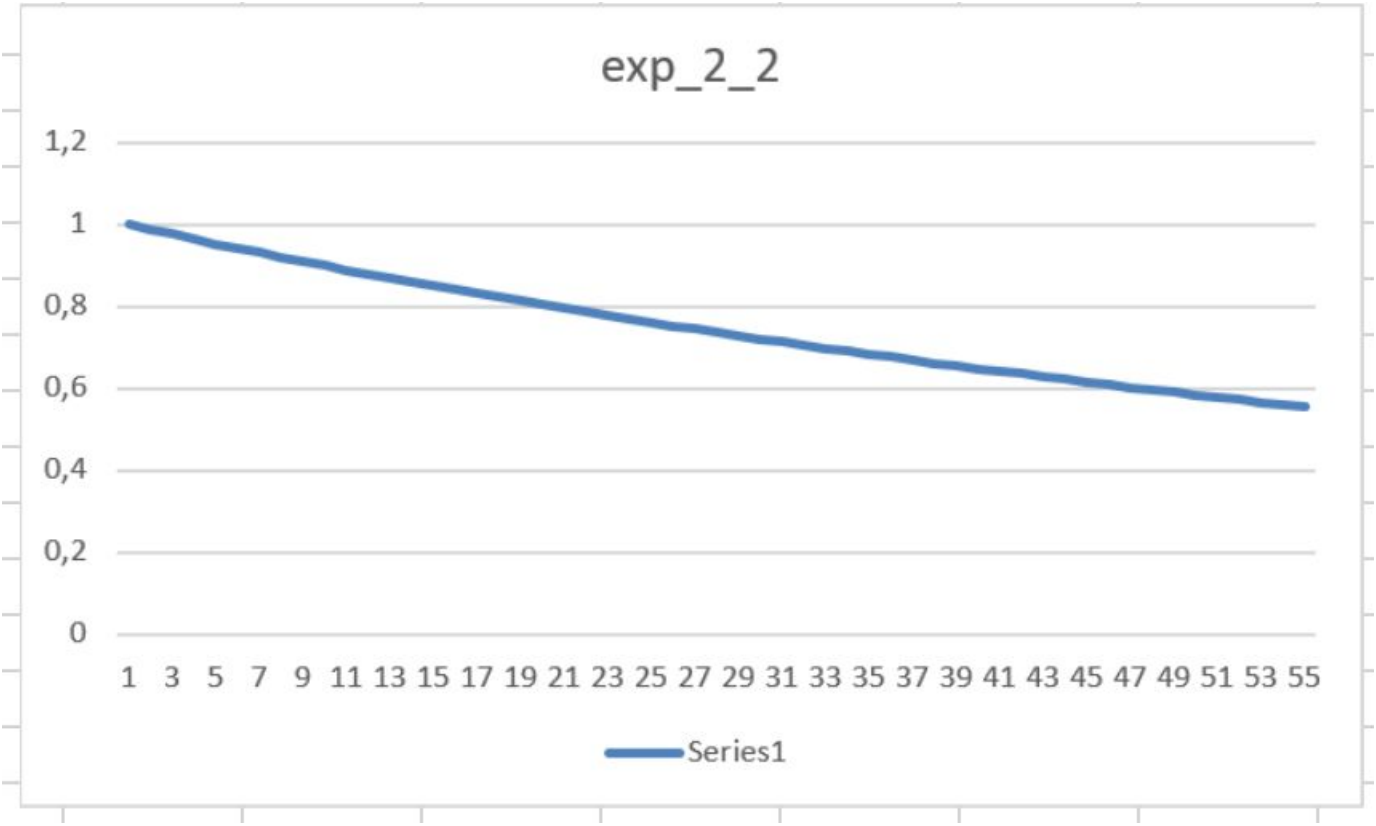
$$\widetilde{g}(t_0) = g(0) = \frac{h'(0)}{K(0)}.$$

Результаты расчётов



$f(x) = \sin \pi x$,
$g(t) = e^{-t}$

Результаты расчётов

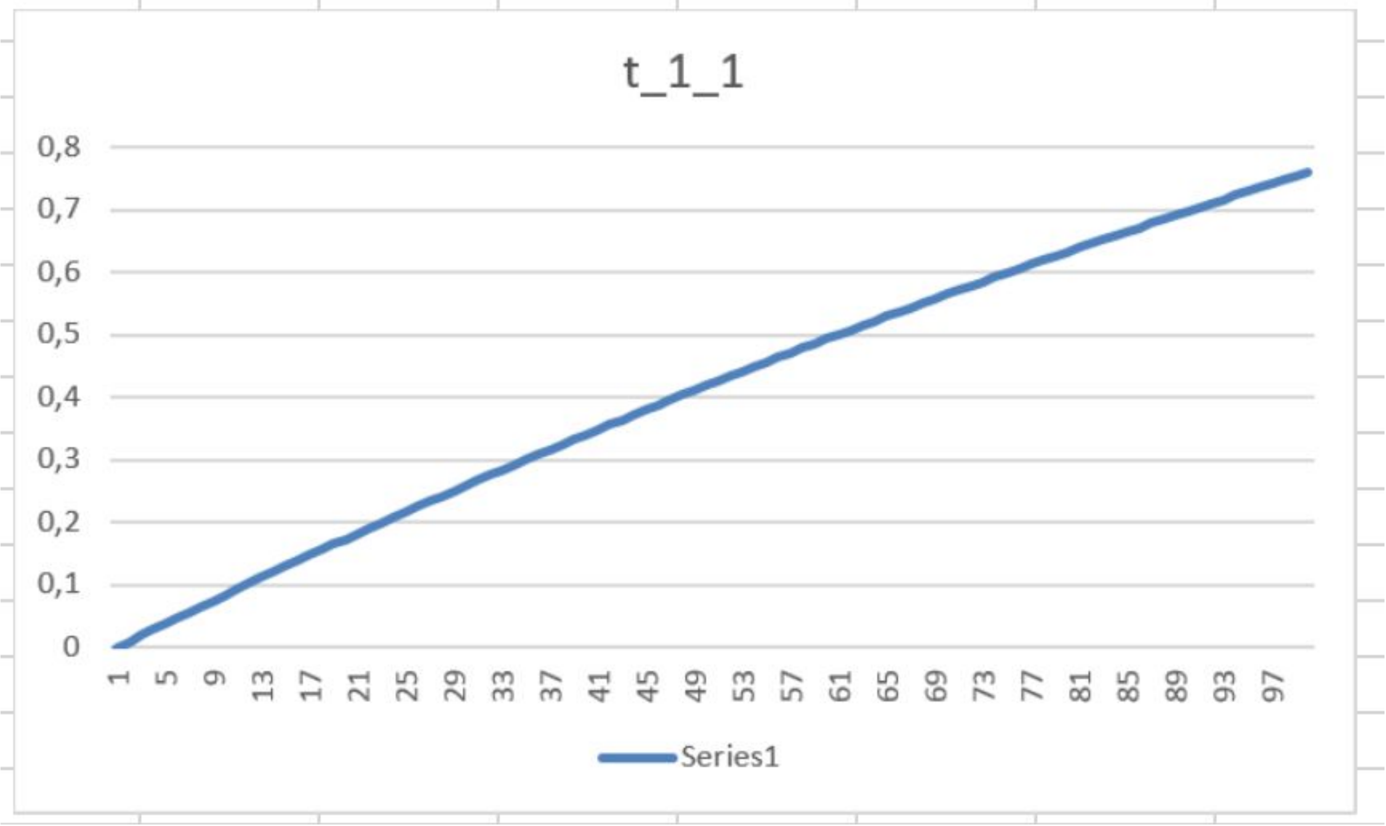


f (x) = cos πx
g(t) = e −t

Результаты расчётов

f (x) = 1 + cos 2πx
g(t) = t

Результаты расчётов



f (x) = sin πx
g(t) = t

Заключение

- Исследованы обратные задачи для уравнения теплопроводности, состоящие в определении неизвестных функций, входящих в источник

- Доказаны существование и единственность решений этих обратных задач

- Выведены интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода для определения неизвестных функций

-Предложены численные методы решения обратных задач

-Проведён ряд вычислительных экспериментов, иллюстрирующих работу предложенного ЧМ.