Отношения. Функции.

План:

1. n-местные отношения (предикат)
2. Свойства. Операции над предикатами.
3. Понятие функции и её виды.
4. Решение примеров

I

Часто при решении задач необходимо выбирать элементы, связанные некоторым соотношением (« меньше либо равно).

ОПР.12: *n- местным отношением* или *n- местным предикатом P* на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется любое подмножество прямого произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Другими словами, элементы x_1, x_2, …… x_n (где $|x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$)связаны соотношением $P(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$)т и т.т., когда $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \in P$.

ОПР.13: при n=1 отношение Р является подмножеством множества A_1 и называется *унарным* отношением или *свойством.*

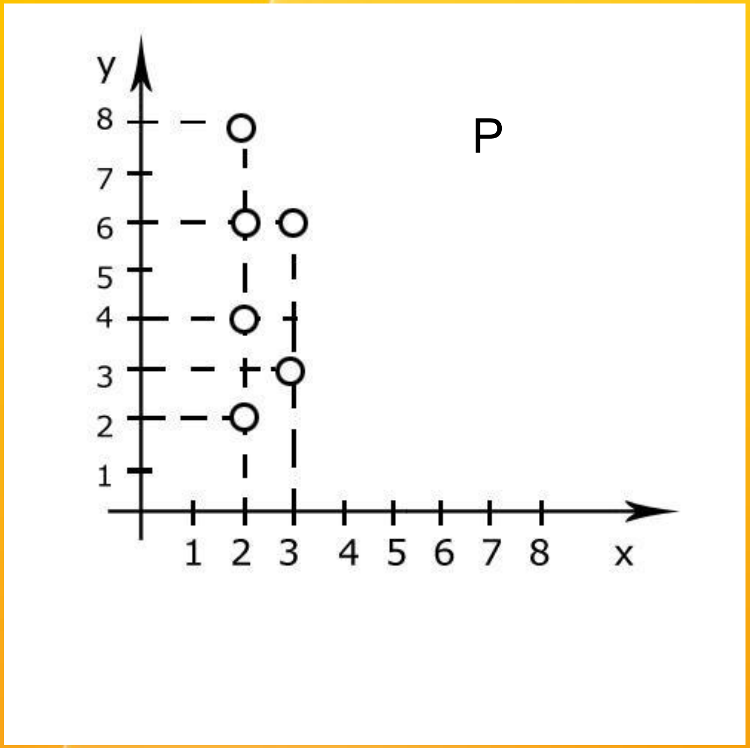
ОПР.14: двухместные отношения (n=2)называются *бинарными* отношениями или *соответствиями.* Т.о. соответствием Р между множествами А и В является подмножество множества $A \times B$.

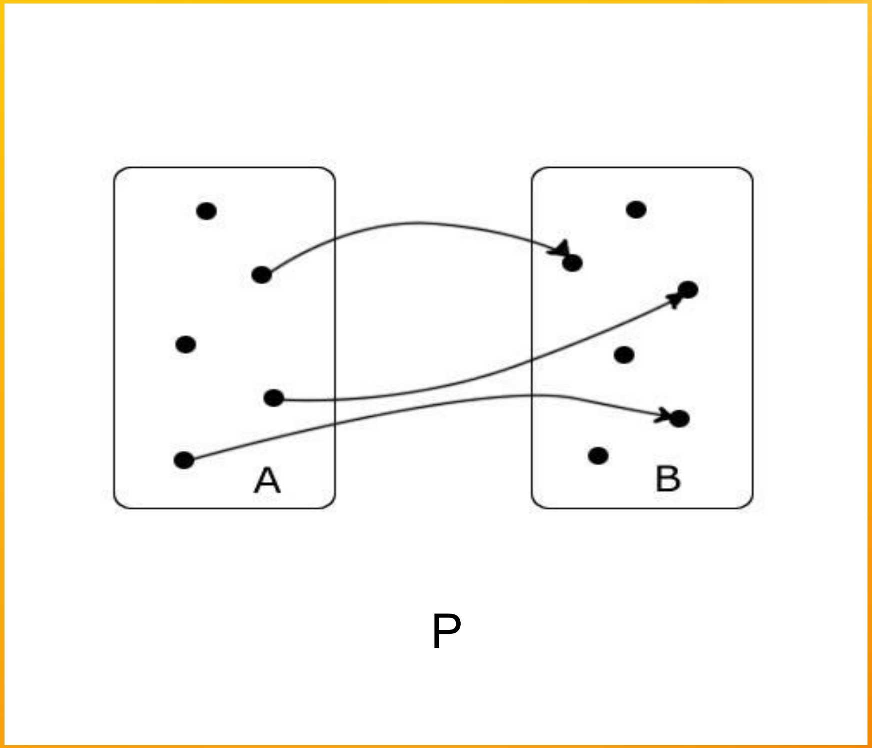
ОПР.15: Отношение $P \subseteq A^n$ называется *n- местным отношением (предикатом) на множестве А.*

ПР: Если А=$\{2,3,4,5,6,7,8,\}$, то бинарное отношение Р=$\{x, y\} | x, y \in A,$ х делит у и

$x \leq 3$ $\}$ можно записать в виде Р=$\{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6)\}$

Бинарные отношения $P \subseteq AxB$ иногда удобно изображать графически.


P
y
8
7
6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6 7 8
x


A
B
P

ОПР.16: для любого множества A определим *тождественное отношение* $id_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ и *универсальное отношение* $U_A = A^2$. Отношение id_A называется *диагональю*, а U_A - *полным отношением*.

II

Пусть P – некоторое бинарное отношение.

ОПР.17: *областью определения* отношения P называется множество

$$\delta_p = \left\{ x \middle| (x, y) \in \mathrm{P} \text{ для} \quad \text{некоторого} \quad y \right\},$$

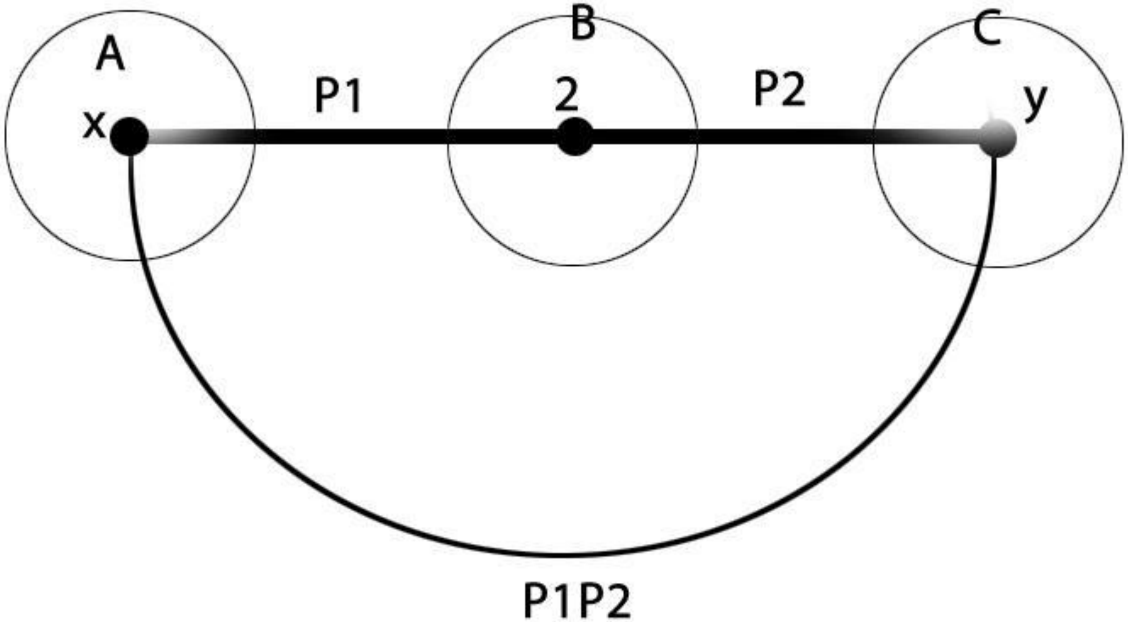
ОПР.18: *областью значений* отношения P называется множество

$$\rho_p = \left\{ y \middle| (x, y) \in P \quad \text{для} \quad \text{некоторого} \quad x \right\}.$$

ОПР.19: *обратным к P отношением* называется множество

$P^{-1}=\{(y, x) \mid (x, y) \in P \}$.

ОПР 20: *произведением* бинарных отношений $P_1 \subseteq A \times B$ и $P_2 \subseteq B \times C$ или *композицией* P_1 и P_2 называется множество $P_1 \circ P_2=\{(x, y) \mid x \in A, y \in C$, и найдётся элемент $z \in B$ такой, что $(x,z) \in P_1$ и $(z,y) \in P_2\}$. Обозначается $P_1 \circ P_2$.



Для любых бинарных отношений P,Q,R выполняются следующие **свойства**:

1. $(P^{-1})^{-1} = P$
2. $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$
3. $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ (ассоциативность композиции).

III

ОПР.21: отношение $f \subseteq A \times B$ называется *функцией* или *отображением* из множества A в множество B, если $\delta_f = A$, $\rho_f \subseteq B$ и из $(x,y_1) \in f$, $(x,y_2) \in f$ следует $y_1 = y_2$. Если вместо $\delta_f = A$ выполняется $\delta_f \subseteq A$, то f называется *частичной функцией*.

ОПР.22: функция f из A в B обозначается через $f: A \to B$ и $A \xrightarrow{f} B$. Если $(x, y) \in f$, то пишут $y=f(x)$ (*y - значение функции f* при значении *аргумента x*).

ПР: Отношение $\{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ - функция,

отношение $\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ - не является функцией.