Оглавление

Задача № 1.21

В окружность, диаметр которой равен √12, вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник в который вписана новая окружность. Найдите радиус этой окружности.

Дано:

Окружность $D=\sqrt{12}$

$\triangle$ *ABC- правильный* $\triangle$

CD – высота

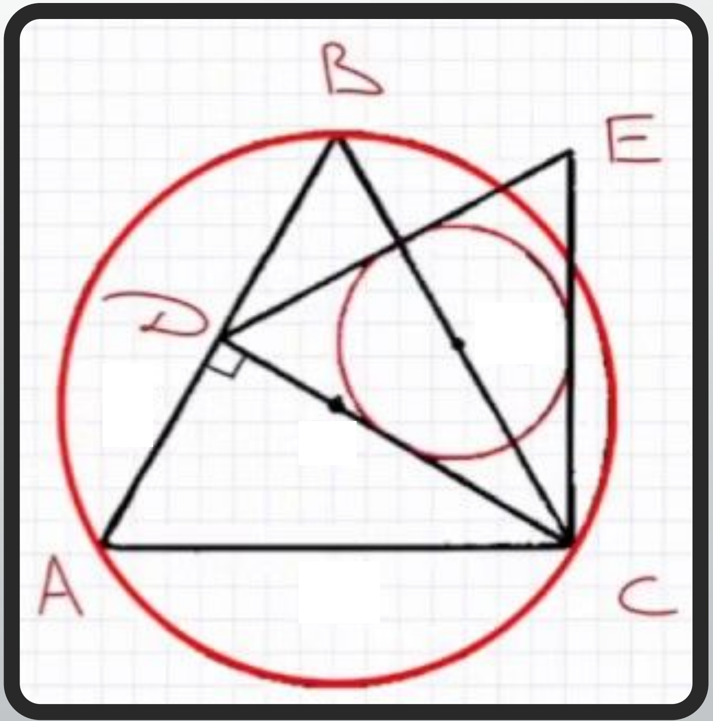
$\triangle$*CDE-правильный* $\triangle$

Окружность вписанная в $\triangle$*CDE*

r-радиус

Найти: r

Чертеж:



Решение:

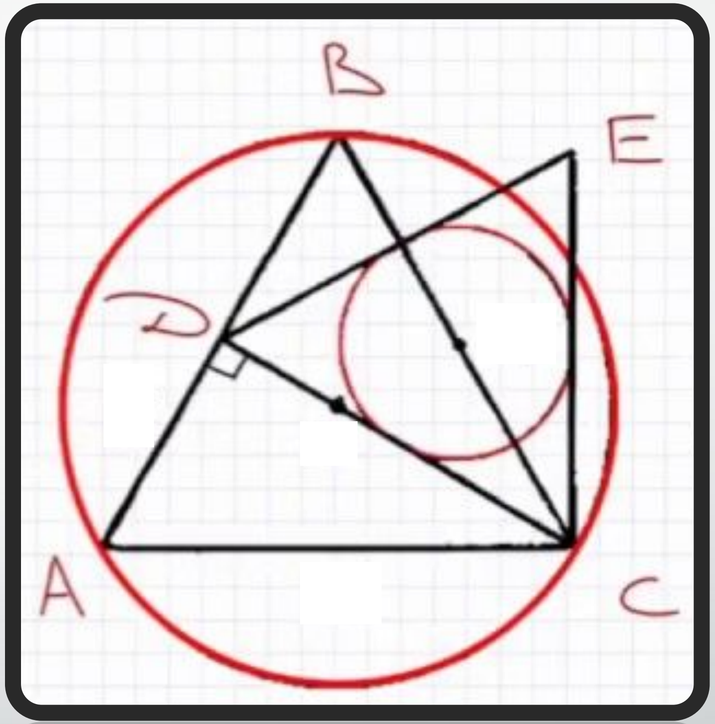
$$R=\frac{\sqrt{12}}{2}$$

$$\triangle ABC: \ AB=R\sqrt{3}=\frac{\sqrt{12}}{2}\cdot\sqrt{3}=3$$

$$CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{3^2-1{,}5^2}=\underline{1{,}5\sqrt{3}}$$

Радиус r вписанной окружности :

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{1{,}5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6}=\frac{3}{4}=0{,}75$$



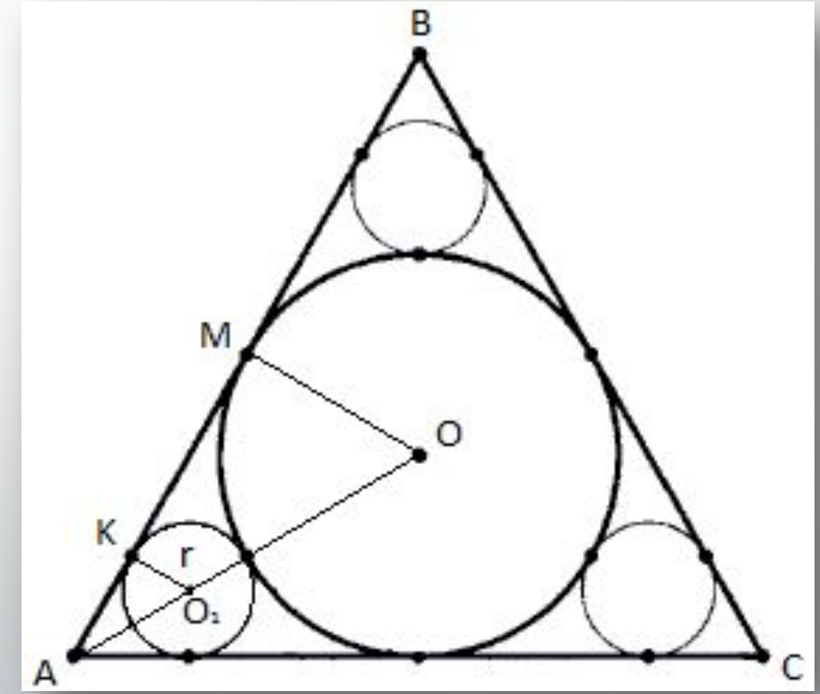
Ответ: 0,75

Задача № 1.22

В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности . Найти сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.

Чертёж

Дано:
△ ABC-равносторонний △
Окружность R=OM вписана в △ABC
Окружности $r=O_1K$



Найти: *r-радиус*

Решение:

1) a=AB *сторона* $\triangle$ *ABC*

R=OM радиус вписанной окружности.

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

2) *Проведём*

R=OM в точке касания

r=OK в точке касания

$\sqrt{3}$

3) $\triangle AOM \sim \triangle AO_1K$

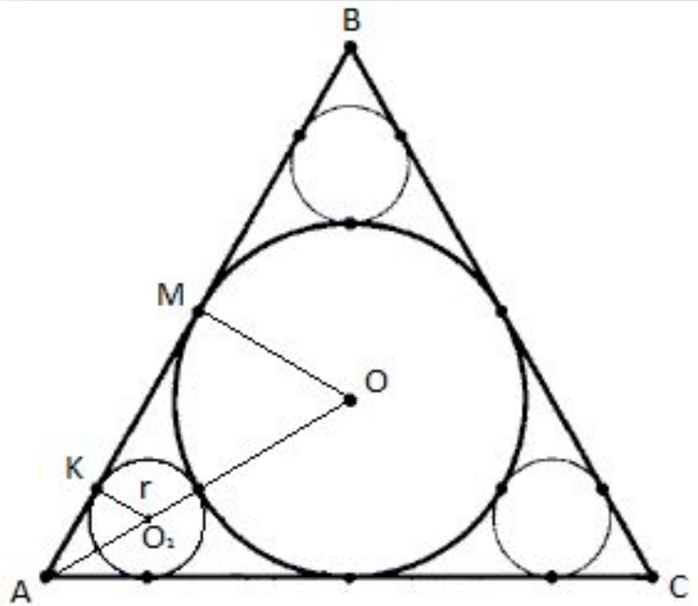
$$\frac{OM}{O_1K} = \frac{AO}{AO_1}$$

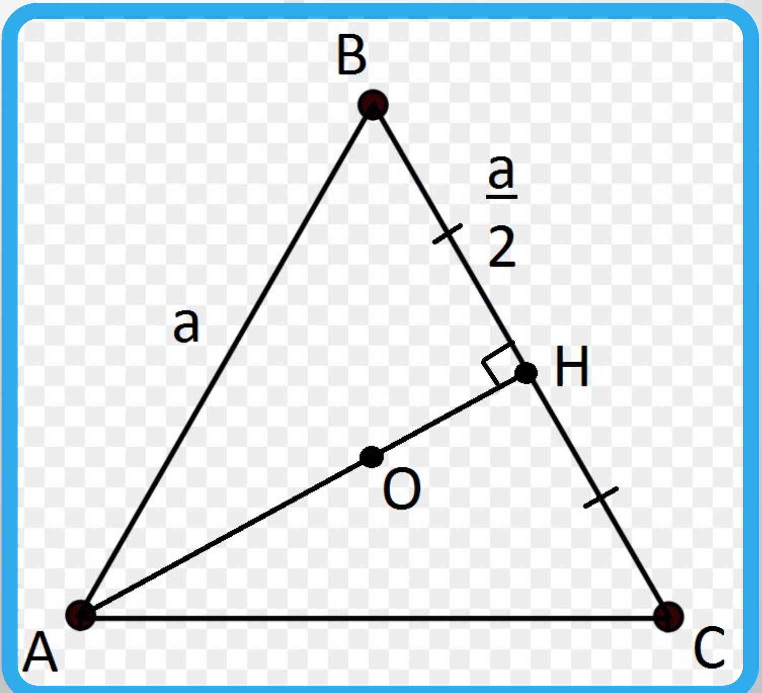
$$\boxed{AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$AH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$





$$\frac{R}{r}=\frac{AO}{AO-R-r} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{6\cdot r}=\frac{a\sqrt{3}}{3\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{a\sqrt{3}}{6}-r\right)}$$

$$6\cdot r=a\sqrt{3}-\frac{a\sqrt{3}}{2}-3r$$

$$9\cdot r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}=9\cdot r$$

$$a\sqrt{3}=18\cdot r$$

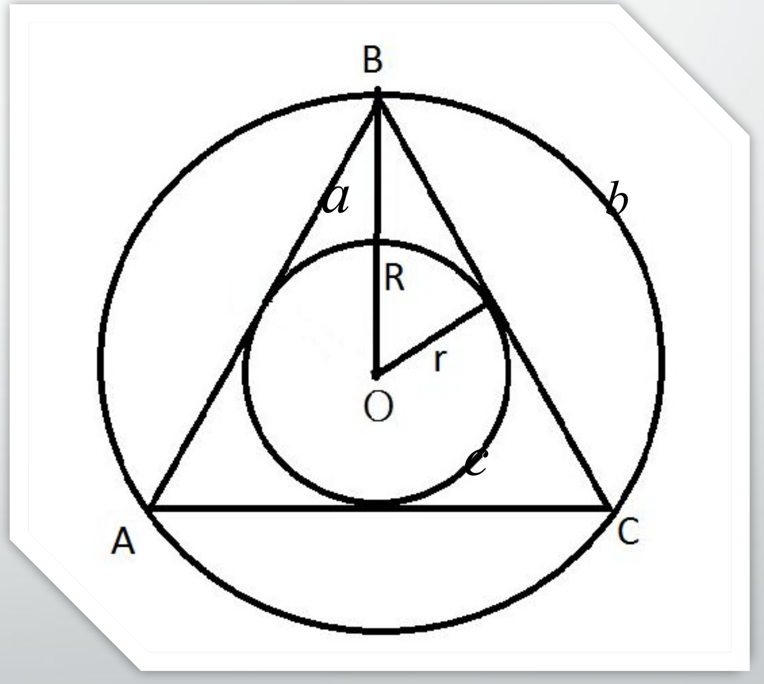
$$a=\frac{18\cdot r\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{18\cdot r\cdot\sqrt{3}}{3}=6\cdot r\cdot\sqrt{3}$$

Ответ: $6\cdot r\cdot\sqrt{3}$

Задача №1.23

Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Найти отношение площадей описанного и вписанного в треугольник кругов.

Чертёж:



Дано:

$\triangle ABC$

a=AB=13 см

b=BC=14 см

c=AC=15 см

r- радиус вписанной окружности

R- радиус описанной окружности

Найти: $\dfrac{S_{окр.\ R}}{S_{окр.\ r}}$

Решение:

1) $r = \dfrac{S}{p}$ S-площадь△, p- полупериметр

R= $\dfrac{abc}{4S}$

2) $\boxed{S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ -формула Герона}}$

$S_{\triangle} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \sqrt{7\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 7\cdot 2\cdot 3} = \sqrt{7^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4} = 7\cdot 2\cdot 3\cdot 2 = 84$

p= $\dfrac{13+14+15}{2} = \dfrac{42}{2} = 21$

3) $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{84}{21} = 4$

$R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84} = \dfrac{65}{8}$

4) $\dfrac{S_R}{S_r} = \dfrac{\pi R^2}{\pi\cdot r^2} = \left(\dfrac{65}{8\cdot 4}\right)^2 = \left(\dfrac{65}{32}\right)^2$

Ответ: $\left(\dfrac{65}{32}\right)^2$

Задача № 1.52

Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом 30° при основании. Определить стороны треугольника.

Дано:

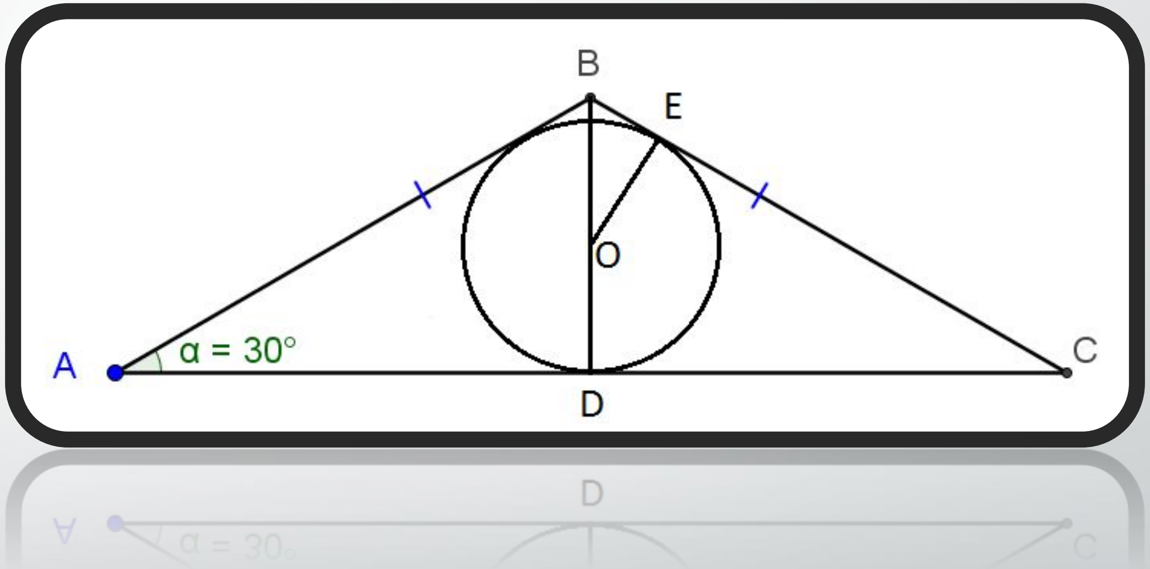
$\triangle$ *ABC- равнобедренный*

$\angle A = \angle C = 30°$

r =3 радиус вписанной окружности

Найти: стороны треугольника ABC

AB_1, BC_1, AC



Решение:

1) $r = OE \perp BC$

$\angle ABC = 180° - (30°+30°) = 120°$

BD- высота, медиана, биссектриса.

$\triangle BOE: \ \angle OBE = 60°$

$\angle OEB = 90°$

$\angle BOE = 30° \Rightarrow BE = \frac{1}{2} BO$ *(катет лежащий против $\angle 30°$)*

2) *Из* $\triangle BEO: BO^2 = OE^2 + BE^2$

$$BO^2 = 3^2 + \left(\frac{BO}{2}\right)^2$$

$$BO^2 - \frac{BO^2}{4} = 9$$

$$\frac{3}{4} BO^2 = 9 \qquad BO^2 = 9 \cdot \frac{4}{3} \qquad BO = \sqrt{\frac{36}{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Из $\triangle ADB$: $AB = 2\,BD$ (*катет лежащий против* $\angle 30°$)

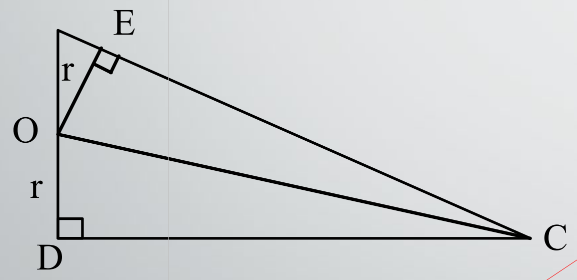
$$BD = BO + OD = 2\sqrt{3}+3 \Rightarrow AB = 2\left(2\sqrt{3}+3\right) = 4\sqrt{3}+6$$

$$\Rightarrow AB = BC = 4\sqrt{3}+6$$

4) $AC = 2DC = \boxed{2EC} = \boxed{2(BC-BE)} = 2\left(4\sqrt{3}+6-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\right) = 2\left(3\sqrt{3}+6\right) = 6\sqrt{3}+12$

$$\boxed{2(BC-BE) = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}}$$

$\triangle OEC = \triangle ODC$



$\left.\begin{cases} OE = OD = r \\ OC\text{- общая} \\ EC = DC \end{cases}\right\}$ *по* III признаку *равенства треугольников*

5) AC= $6\sqrt{3}+12$

Ответ: $\underline{4\sqrt{3}+6}$; $\underline{4\sqrt{3}+6}$; $\underline{6\sqrt{3}+12}$