



2. Коды с низкой плотностью проверки на четность

2.1 Стандартные коды LDPC

2.2 Укороченные коды LDPC

2.1. СТАНДАРТНЫЕ КОДЫ LDPC

LDPC коды (*LDPC – Low-Density Parity-Check codes*) - коды с низкой плотностью проверок на чётность или коды Галлагера (*Gallager codes*) это систематические линейные блочные коды с проверочной матрицей H , каждая строка и столбец которой имеют малое число единичных элементов.

Регулярный код Галлагера (*regular Gallager code*) - это LDPC код, каждая строка проверочной матрицы H которого имеет постоянный вес j , а каждый столбец имеет постоянный вес k .

Наряду с регулярными LDPC кодами существуют не регулярные LDPC коды. Строки и (или) столбцы проверочных матриц таких кодов имеют не постоянные веса.

Рассмотрим регулярный LDPC код со скоростью $R=1/4$, длиной кодового слова $n=16$, числом проверочных символов $r=12$, параметрами $j=3$ и $k=4$.

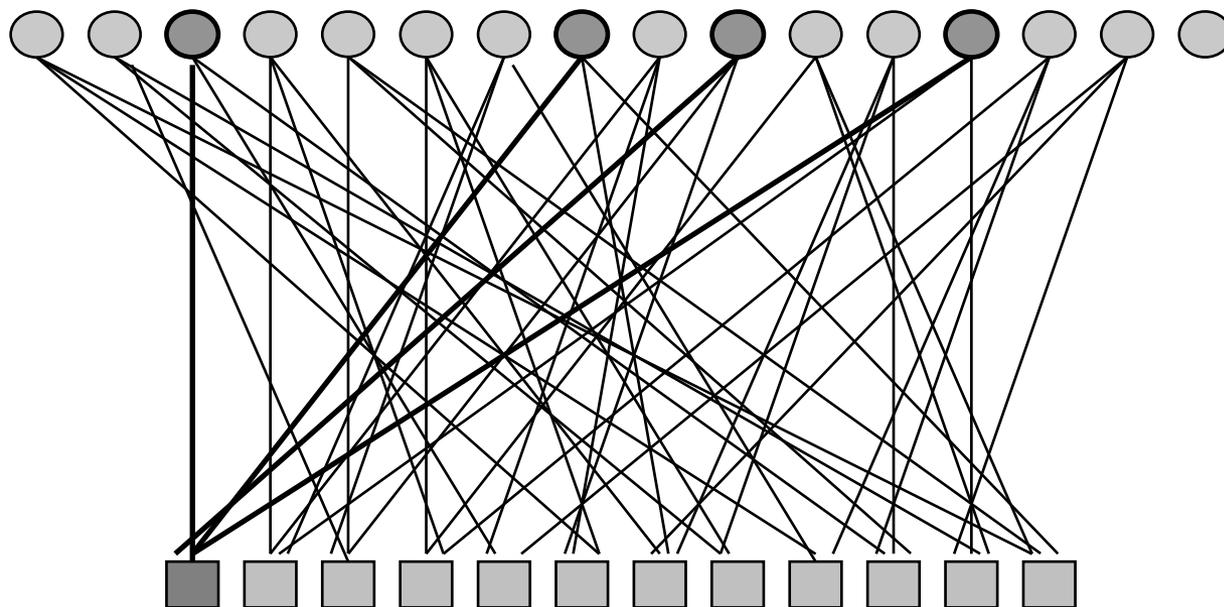
$$G = \begin{bmatrix} 1000111100111000 \\ 0100111001111011 \\ 0010111110010100 \\ 0001000100101000 \end{bmatrix}$$

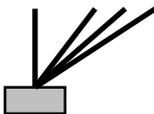
$$H = \begin{bmatrix} 1110100000 & 000000 \\ 1110010000 & 000000 \\ 1110001000 & 000000 \\ 1011000100 & 000000 \\ 0010000010 & 000000 \\ 0100000001 & 000000 \\ 1101000000 & 100000 \\ 1110000000 & 010000 \\ 1101000000 & 001000 \\ 0010000000 & 000100 \\ 0100000000 & 000010 \\ 0100000000 & 000001 \end{bmatrix}$$

С помощью перестановок строк матрицы и сложения их по модулю два матрицу H можно привести к виду

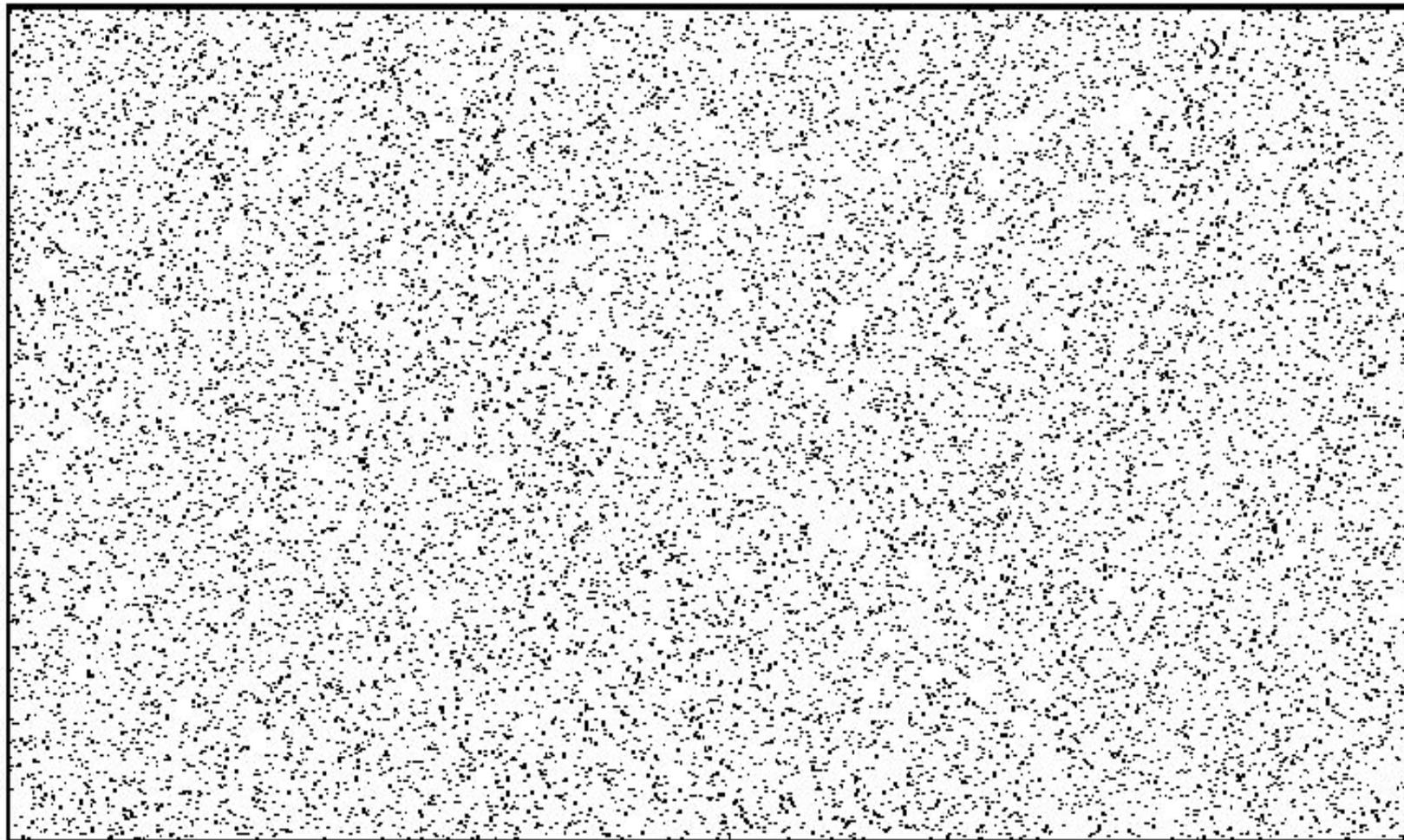
$$H = \begin{bmatrix} 0010000101001000 \\ 0001001010001000 \\ 0100101001000000 \\ 0000010000100100 \\ 0010000010000011 \\ 1000010011000000 \\ 0001000100010010 \\ 0100010000010001 \\ 1000001000000101 \\ 0010100000010100 \\ 0100000000101010 \\ 1000100100100000 \end{bmatrix}$$

Граф LDPC кода со скоростью $R=1/4$, длиной кодового слова $n=16$, числом проверочных символов $r=12$, параметрами $j=3$ и $k=4$



-  - соответствуют символам кодового слова LDPC кода;
-  - соответствует проверке на чётность;
-  - показывает, какие символы кодового слова участвуют в проверке на чётность.

Проверочная матрица LDPC кода с параметрами:
 $N=20000$, $K=R=10000$, $j=3$, $k=6$



H =

Принцип исправления ошибок в LDPC кодах

В LDPC кодах общая идея исправления ошибок основывается на следующем. После проведения r проверок на чётность исправляется тот символ кодового слова, который вошёл в наибольшее число проверок с отрицательным результатом.

Рассмотрим простейший алгоритм декодирования на примере регулярного LDPC кода со скоростью $R=1/4$, длиной кодового слова $n=16$, числом проверочных символов $r=12$, параметрами $j=3$ и $k=4$.

Последовательность символов кодового слова обозначим как

$$X_j = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Последовательность результатов проверок, то есть сумм по модулю два обозначим как

$$S_k = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}.$$

Для примера закодируем последовательность символов вида

$$\{1, 0, 1, 1\}.$$

Соответствующее кодовое слово LDPC кода примет вид:

$$\{1, 0, 1, 1, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, 1, 1, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, 1, \underline{0}, \underline{0}\}.$$

Произведём $r=12$ проверок в соответствии с проверочной матрицей H .

Позиции символов, участвующих в каждой проверке, их значения и результаты проверок s_k (сумма по модулю два)

№ проверки	Символы кодового слова X_i , участвующие в проверке	Результаты проверок (сумма по модулю два) s_k
1	$x_3 \oplus x_8 \oplus x_{10} \oplus x_{13} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0$	0
2	$x_4 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{13} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$	0
3	$x_2 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_{10} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$	0
4	$x_4 \oplus x_6 \oplus x_{11} \oplus x_{14} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1$	0
5	$x_3 \oplus x_9 \oplus x_{15} \oplus x_{16} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0$	0
6	$x_1 \oplus x_6 \oplus x_9 \oplus x_{10} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$	0
7	$x_4 \oplus x_8 \oplus x_{12} \oplus x_{15} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0$	0
8	$x_2 \oplus x_6 \oplus x_{12} \oplus x_{16} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$	0
9	$x_1 \oplus x_7 \oplus x_4 \oplus x_6 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$	0
10	$x_3 \oplus x_5 \oplus x_{12} \oplus x_{14} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1$	0
11	$x_2 \oplus x_{11} \oplus x_{13} \oplus x_{15} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$	0
12	$x_1 \oplus x_5 \oplus x_8 \oplus x_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$	0

Последовательность результатов проверок (фактически синдром кодового слова)

$$S_k = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

Рассмотрим особенности нахождения позиций ошибочных символов в LDPC кодах на основе анализа вида получаемого синдрома.

Внесём в кодовое слово LDPC кода ошибку (инвертируем символ x_3). Тогда получим последовательность

$$X_i = \{1, 0, \underline{0}, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\}.$$

Результаты проверок на чётность символов искажённого кодового слова:

№ проверки	Символы кодового слова X_i , участвующие в проверке	Результат проверки (сумма по модулю два) S_k
1	$x_3 \oplus x_8 \oplus x_{10} \oplus x_{13} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0$	<u>1</u>
2	$x_4 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{13} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$	0
3	$x_2 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_{10} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$	0
4	$x_4 \oplus x_6 \oplus x_{11} \oplus x_{14} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1$	0
5	$x_3 \oplus x_9 \oplus x_{15} \oplus x_{16} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0$	<u>1</u>
6	$x_1 \oplus x_6 \oplus x_9 \oplus x_{10} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$	0
7	$x_4 \oplus x_8 \oplus x_{12} \oplus x_{15} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0$	0
8	$x_2 \oplus x_6 \oplus x_{12} \oplus x_{16} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$	0
9	$x_1 \oplus x_7 \oplus x_4 \oplus x_6 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$	0
10	$x_3 \oplus x_5 \oplus x_{12} \oplus x_{14} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1$	<u>1</u>
11	$x_2 \oplus x_{11} \oplus x_{13} \oplus x_{15} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$	0
12	$x_1 \oplus x_5 \oplus x_8 \oplus x_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$	0

Теперь синдромная последовательность приняла вид:

$$S_k = \{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\}.$$

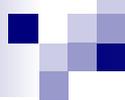
Подсчитаем, сколько раз каждый символ кодового слова участвует в проверках с отрицательным результатом (отрицательный результат проверки - сумма по модулю два $S_k=1$). Обобщённые данные наглядно представлены в таблице.

№ проверки	Символы искажённого кодового слова																Синдромная последовательность
	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	
	Проверочная матрица H																
1	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	<u>1</u>	0	0	<u>1</u>	0	0	0	1
2	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	0	<u>1</u>	<u>1</u>	1
6	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
8	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
9	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
10	0	0	<u>1</u>	0	<u>1</u>	0	0	0	0	0	0	<u>1</u>	0	<u>1</u>	0	0	1
11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
12	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Число проверок с отрицательным результатом, в которых участвовал каждый символ кодового слова																	
	0	0	<u>3</u>	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

Как видим, третий символ кодового слова максимальное число раз (три раза) участвует в проверках на чётность с отрицательным результатом. Инвертировав этот символ, и, вновь вычислив синдромную последовательность, можно убедиться, что она принимает вид:
 $S_k = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$.

Проверочные матрицы *нерегулярных* кодов построены таким образом, что различные символы кодового слова участвуют в различном числе проверок на чётность. Допустим, в принятом кодовом слове присутствует два искажённых символа. Пусть первый искажённый символ участвует в 9-ти проверках на чётность, а второй – в 3-х. Пусть на какой-то итерации первый символ встретится 7 раз в проверках с отрицательным результатом, а второй – 3 раза.

№ пров.	Символы искажённого кодового слова																Синдр. послед.
	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	
Проверочная матрица H																	
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
6	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
8	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
9	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
10	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
12	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Число проверок с отрицательным результатом, в которых участвовал каждый символ кодового слова,																	
M_i	0	0	3	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	
Общее число проверок, в которых участвовал каждый символ кодового слова, N_i																	
N_i	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Вероятность ошибки символа кодового слова, $P_i = M_i / N_i$																	
P_i	0	0	1	0	0,3	0	0	0,3	0,3	0,3	0	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	

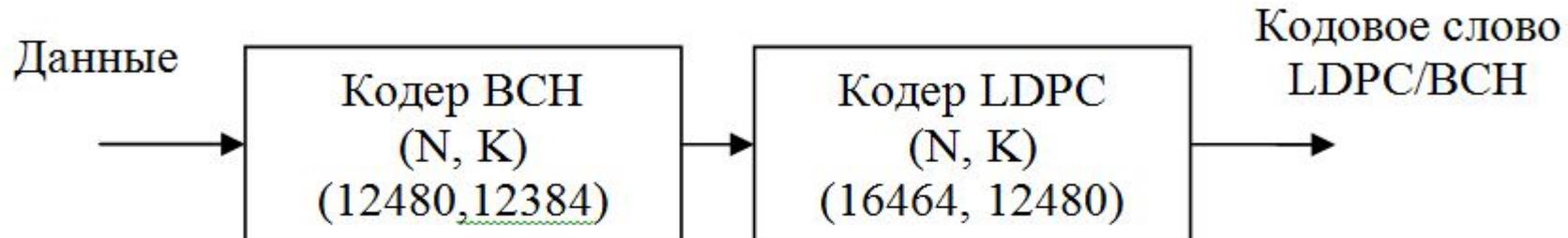


На этапе корректирования кодового слова декодирование LDPC кода возможно реализовать двумя способами.

Первый из них заключается в том, что на каждой итерации исправляется лишь один символ кодового слова, вероятность ошибки которого максимальна. При этом в кодовом слове могут присутствовать и другие символы с такими же вероятностями ошибок. Например, из всех символов с одинаково максимальными вероятностями ошибок исправляется только символ, расположенный ближе к началу кодового слова.

При декодировании вторым способом на каждой итерации исправляются все символы, вероятности ошибок которых одинаковы и максимальны. Первый способ требует больших вычислительных и временных затрат. Однако он предпочтительнее в случае большого числа ошибок в кодовом слове. Второй способ требует меньших вычислительных и временных затрат, но при большом числе ошибок он уступает первому в исправляющей способности. Заметим, что на практике могут использоваться также и проверки на нечётность.

Пример сигналов с LDPC(16464.12480)/VCH(12480.12384) кодированием



Для использования LDPC/VCH кодирования организуется кадровая структура длиной 16512 бит, из которых первые 48 бит – уникальное слово вида –
0101 1101 1000 1111 1001 1010 0100 0011 0011 0101 1110 0000

The image shows a visual representation of a frame structure. On the left, there are several vertical green bars of varying widths, representing the unique word. The rest of the image is a dense, noisy green and black pattern, representing the rest of the frame. A white speech bubble with a black border points to the unique word area.

Уникальное слово

2.2 УКРОЧЕННЫЕ КОДЫ С НИЗКОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ПРОВЕРОК НА ЧЁТНОСТЬ VERSAFEC

VersaFEC это система кодов LDPC с короткими блоками, которые были разработаны, во-первых, как альтернатива малого времени обработки сигнала по отношению к существующим кодам LDPC компании Comtech EF Data, а во-вторых, как набор кодов для применения в системе DVB-S2, определенных в спецификации EN 302307, ратифицированной Европейским институтом по телекоммуникационным стандартам (ETSI).

Набор кодов VersaFEC был разработан с двумя принципиальными целями:

- обеспечить расширенный выбор комбинаций способов модуляции и кодирования, которые реализуют аналогичные характеристики кодоисправляющей способности, что и существующие коды LDPC компании Comtech EF Data, и в то же время существенно уменьшить задержку времени при обработке сигнала;

- обеспечить комбинации способов модуляции и кодирования, которые пригодны не только для приложений с постоянным кодированием и модуляцией (CCM), но и являются основой для запатентованной системы с адаптивным кодированием и модуляцией (ACM). Реализация кодов VersaFEC для системы ACM будет возможна спустя короткое время после внедрения CCM.

Характерной особенностью LDPC кодов VersaFEC является отсутствие кода БЧХ.

Компанией Comtech EF Data предлагается набор из двенадцати кодов VersaFEC для различных режимов способа модуляции и скорости кодирования, которые реализованы в спутниковом модеме CDM-625

Способ модуляции	Скорость кодирования	Спектральная плотность, бит/Гц	Размер блока, кбит	Отношение Eb/N0 при BER=5*10 ⁻⁸ , дБ	Время задержки, мсек	Минимальная информационная скорость, кбит/с	Максимальная информационная скорость, Мбит/с
ФМ2	0,488	0,49	2,0	2,4	26	18	5,7
ФМ4	0,533	1,07	4,1	2,2	53	20	10,0
ФМ4	0,631	1,26	4,1	2,7	59	23	10,0
ФМ4	0,706	1,41	4,1	3,4	62	26	10,0
ФМ4	0,803	1,61	4,1	3,8	66	28	12,0
КАМ8	0,642	1,93	6,1	4,6	89	35	12,0
КАМ8	0,711	2,13	6,1	5,2	93	39	12,0
КАМ8	0,780	2,34	6,1	5,6	97	43	12,0
КАМ16	0,731	2,93	8,2	6,3	125	53	12,0
КАМ16	0,780	3,12	8,2	7,0	129	57	14,0
КАМ16	0,829	3,32	8,2	7,5	131	60	14,0
КАМ16	0,853	3,41	8,2	8,0	132	62	14,0

Основные характеристики LDPC кодов VersaFEC:

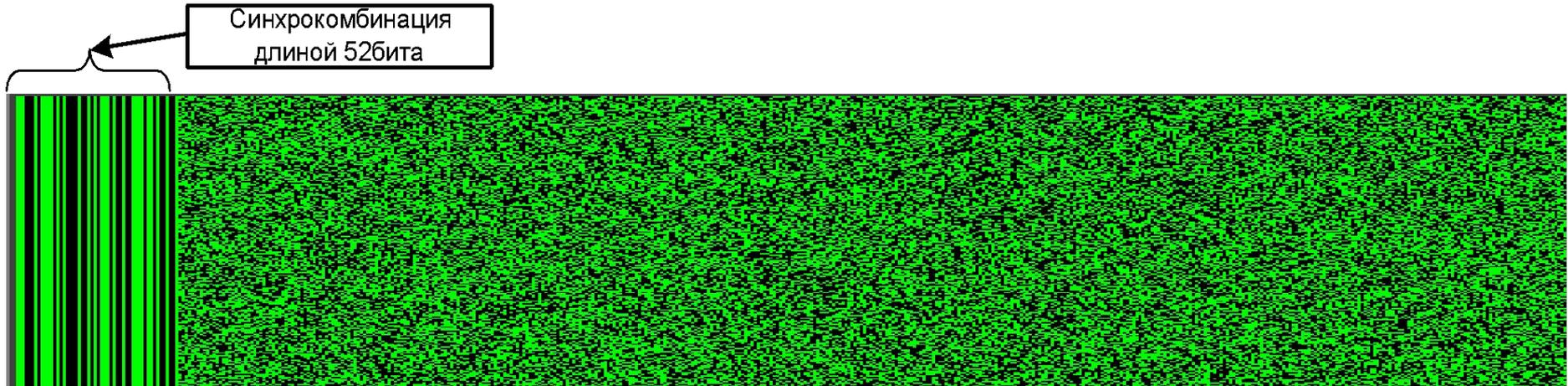
- синхрокомбинация для всех видов модуляции передаётся за 52 такта модулятора и состоит из двух чередующихся символов, стоящих на противоположных концах сигнального созвездия. Длина синхрокомбинации (вид символов): для ФМ2 – 52 бита, для ФМ4 – 104 бита, для КАМ8 – 156 бит, для КАМ16 – 208 бит;

- за время наблюдения отмечено применение скремблирования информационной части всех кодов мультипликативным скремблером СС (3,20), причём данный скремблер применяется даже если в информационной части передаётся уже скремблированный поток (например EDMAC с АС(9,11));

- для многопозиционных видов модуляции (КАМ8 и КАМ16) применения перемежения не отмечено;

- длина кадра без синхрокомбинации равна множителю 2040, умноженному на количество позиций для соответствующего вида модуляции и составляет: для ФМ2 – 2040 бит, для ФМ4 – 4080 бит, для КАМ8 – 6120 бит, для КАМ16 – 8160 бит.

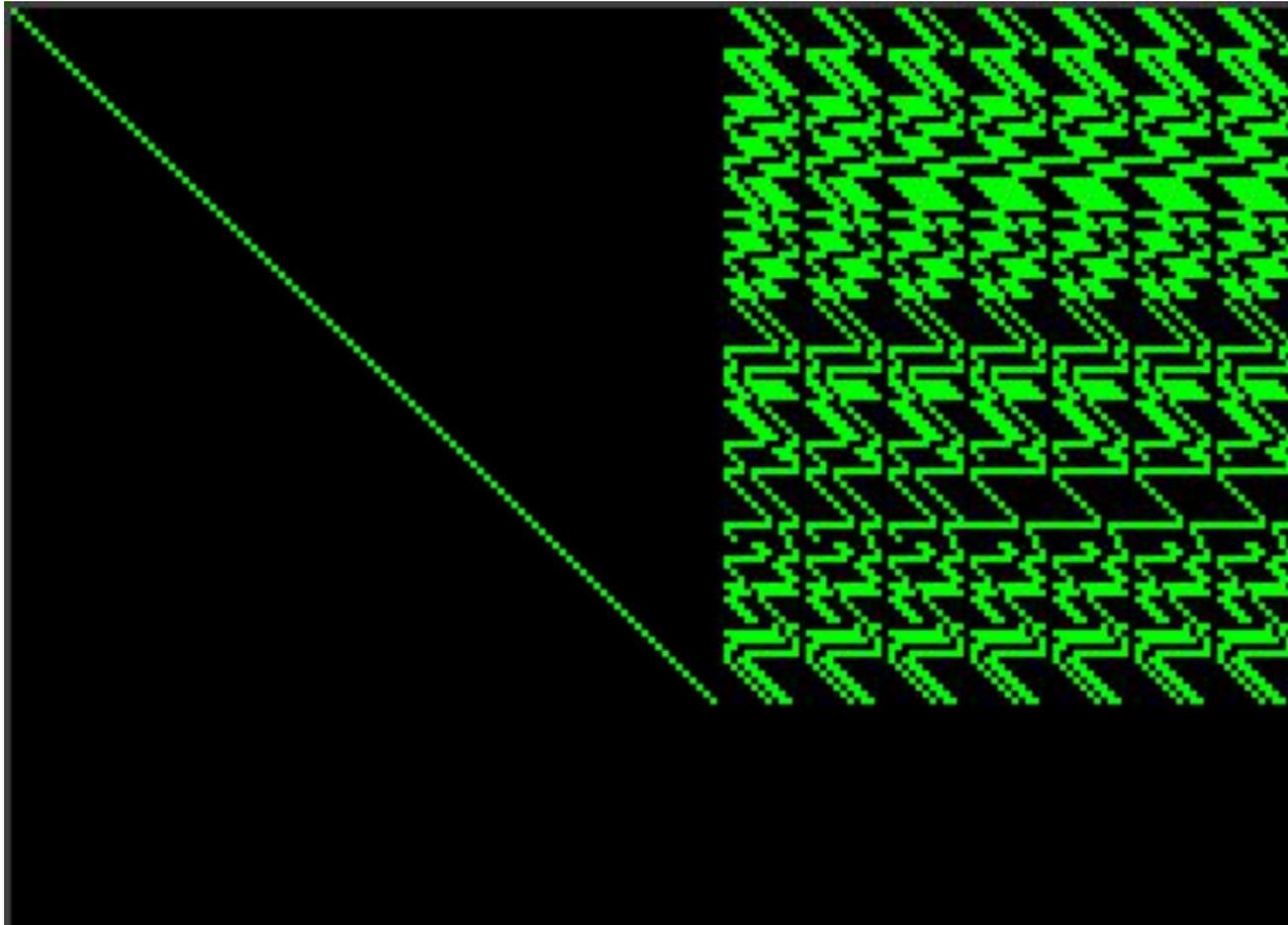
Пример LDPC кода VersaFEC со скоростью кодирования $R=0,488$ на периоде 2092



Синхрокомбинация 52 бита	Информационные символы 1020 бит	Проверочные символы 1020 бит
2092 бита		

Структура кадра LDPC кода VersaFEC со скоростью кодирования $R=0,488$ на периоде 2092 бита

Фрагмент порождающей матрицы кода после решения системы линейных уравнений методом Жордано-Гаусса с параметрами: число информационных символов – 1020, общее число символов кодового слова – 2040



В результате решения системы линейных уравнений в конце матрицы сформировалась последовательность из 85 блоков по 12 бит