Семинар 8

доцент Волков Н.П.

Занятие 8

Смешанные задачи на тему „Прямая и плоскость в пространстве"

1011) $M_1(-6;6;-5)$, $M_2(12;-6;1)$, $M_1, M_2 \in \ell$

$\ell \cap xOy = N_1 = ?$, $\ell \cap xOz = N_2 = ?$, $\ell \cap yOz = N_3 = ?$

Решение: $6 \cdot \vec{\tau} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{18;-12;6\}$

$\Rightarrow \vec{\tau} = \{3;-2;1\} \Rightarrow \ell: \begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 6 - 2t \\ z = -5 + t \end{cases}$

N_1: xOy: $z = 0 \Rightarrow -5 + t = 0 \Rightarrow t = 5$

$\Rightarrow \boxed{N_1(9;-4;0)}$

N_2: xOz: $y = 0 \Rightarrow 6 - 2t = 0 \Rightarrow t = 3$

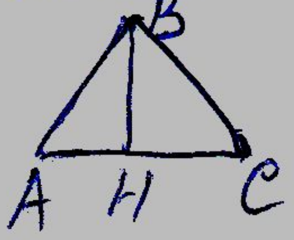
$\Rightarrow \boxed{N_2(3;0;-2)}$

N_3: yOz: $x = 0 \Rightarrow -6 + 3t = 0 \Rightarrow t = 2$

$\Rightarrow \boxed{N_3(0;2;-3)}$

1015 $\triangle ABC$: $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$, $C(5;1;-7)$

BH – ?



<u>Решение</u>: $\vec{r}=\lambda\vec{a}=\vec{AC}\times(\vec{AB}\times\vec{AC})$

$$\vec{b}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&1\\4&3&-3\end{vmatrix}=-12\vec{i}+10\vec{j}-6\vec{k}$$

$$\vec{a}=\vec{AC}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&3&-3\\-12&10&-6\end{vmatrix}=12\vec{i}+60\vec{j}+76\vec{k}$$

$$\vec{r}=\{3;15;19\}$$

$$\Rightarrow \boxed{l:\begin{cases}x=3+3t\\y=1+15t\\z=-3+19t\end{cases}}$$

$\boxed{1018}$ $l_1 - ?$ $l_1 \ni M_1(2;3;-5)$, $l_1 \parallel l: \begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$

Решение $\vec{\tau}_1 = \lambda\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (2-6)\vec{i} - (-6-2)\vec{j} + (9+1)\vec{k} = \{-4;8;10\}$$

$\Rightarrow \vec{\tau}_1 = \{-2;4;5\}$

$$\boxed{l_1: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{5}}$$

$\boxed{1025}$ $l_1: \begin{cases} x-y-4z-5=0 \\ 2x+y-2z-4=0 \end{cases}$, $l_2: \begin{cases} x-6y-6z+2=0 \\ 2x+2y+9z-1=0 \end{cases}$

$(l_1 \hat{,} l_2) = ?$

Решение $\vec{\tau}_1 = \vec{n}_{11} \times \vec{n}_{12} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \{6;-6;3\}$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{n}_{21} \times \vec{n}_{22} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & -6 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \{-42;-21;14\}$$

$\vec{\tau}_1' = \{2;-2;1\}$, $\vec{\tau}_2' = \{6;3;-2\}$

$$\cos(\vec{\tau}_1' \hat{,} \vec{\tau}_2') = \frac{\vec{\tau}_1' \cdot \vec{\tau}_2'}{|\vec{\tau}_1'||\vec{\tau}_2'|} = \frac{12-6-2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{49}} = \frac{4}{7\cdot 3} = \frac{4}{21}$$

$$\boxed{\cos(l_1 \hat{,} l_2) = \frac{4}{21}}$$

1031) $l_1: \begin{cases} x = 3t - 7 \\ y = -2t + 4 \\ z = 3t + 4 \end{cases}$, $l_2: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 8 \\ z = -t - 12 \end{cases}$

$l - ?$ $l \perp l_1$, $l \perp l_2$

Решение $M_1(-7; 4; 4)$, $\vec{\tau}_1 = \{3; -2; 3\}$

$M_2(1; -8; -12)$, $\vec{\tau}_2 = \{1; 2; -1\}$

$$\vec{\tau}' = \vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$$

$\vec{\tau} = \{-2; 3; 4\}$

Π: $\Pi \ni l_1$, $\Pi \ni \vec{\tau}$

$$\Pi: \begin{vmatrix} x+7 & y-4 & z-4 \\ 3 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$(x+7)(-17) + (y-4)(-18) + (z-4) \cdot 5 = 0$

$\Pi: 17x + 18y - 5z + 67 = 0$

$M_0 = l_2 \cap \Pi$: $17(t+1) + 18(2t-8) - 5(-t-12) + 67 = 0$

$\Rightarrow 17t + 17 + 36t - 144 + 5t + 60 + 67 = 0$

$58t = 0 \Rightarrow t = 0$

$\Rightarrow M_0(1; -8; -12)$

$$\boxed{l: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = -12 + 4t \end{cases}}$$

1039) $l: \begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$

$П: 4x-3y+7z-7=0 \qquad l \overset{?}{\in} П$

Решение Пучок плоскостей

$\alpha(5x-3y+2z-5)+\beta(2x-y-z-1)=0$

$\Rightarrow (5\alpha+2\beta)x+(-3\alpha-\beta)y+(2\alpha-\beta)z-5\alpha-\beta=0$

$\begin{cases} 5\alpha+2\beta=4 \\ -3\alpha-\beta=-3 \end{cases} \Big| \cdot 2^{+} \Rightarrow -\alpha=-2 \Rightarrow \alpha=2, \beta=-3$

$\Rightarrow 2\alpha-\beta=7$ и $-5\alpha-\beta=-7$

Итак, при $\alpha=2$, $\beta=-3$ плоскость П принадлежит пучку плоскостей с осью l. $\Rightarrow l \in П$.

1041) l - ? $\quad l \ni M_0(2;-4;-1)$

$l_1: \begin{cases} 3x+4y+5z-26=0 \\ 3x-3y-2z-5=0 \end{cases}$

$П_1: 5x+3y-4z+11=0; \quad П_2: 5x+3y-4z-41=0$

Решение. $M_1=l_1 \cap П_1$, $M_2=l_1 \cap П_2$

$M_1: \begin{cases} 3x+4y+5z-26=0 \\ 3x-3y-2z-5=0 \\ 5x+3y-4z+11=0 \end{cases} \Big| \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}+ \Rightarrow \begin{cases} 21x+7z-98=0 \\ 8x-6z+6=0 \end{cases} \Big| \begin{matrix} 6 \\ 7 \end{matrix}+$

$\Rightarrow 182x=546 \Rightarrow x=3, z=5, y=-2$

$\Rightarrow M_1(3;-2;5)$

$$M_2:\begin{cases}3x+4y+5z-26=0\\3x-3y-2z-5=0\\5x+3y-4z-41=0\end{cases}\left|\begin{matrix}\frac{3}{4}+\\ \\ +\cdot\frac{1}{2}\end{matrix}\right.\begin{cases}21x+7z-98=0\\4x-3z-23=0\end{cases}\left|\begin{matrix}3\\ \cdot\\ 7\end{matrix}\right.$$

$\Rightarrow 91x=455\Rightarrow x=5,\ z=-1,\ y=4$

$M_2(5;4;-1)$

$\Rightarrow M_c\left(\frac{3+5}{2};\frac{-2+4}{2};\frac{5-1}{2}\right)=M_c(4;1;2)$

$\overrightarrow{M_0M_c}=\{2;5;3\}$

$$\boxed{l:\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{5}=\frac{z+1}{3}}$$

<u>1045</u>| $l:\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2};\ \Pi: x-3y+6z+7=0$

$l\parallel\Pi\qquad m-?$

<u>Решение</u> $l\parallel\Pi\Rightarrow\vec{\tau}\perp\vec{n}\Rightarrow\vec{\tau}\cdot\vec{n}=0$

$\vec{\tau}=\{3;m;-2\},\ \vec{n}=\{1;-3;6\}$

$\Rightarrow\vec{\tau}\cdot\vec{n}=3-3m-12=0\Rightarrow\boxed{m=-3}$

<u>1051</u>| $P(4;1;6),\ l:\begin{cases}x-y-4z+12=0\\2x+y-2z+3=0\end{cases}$

? Q – точка симметричная к точке P относительно прямой l.

<u>Решение</u> Построим плоскость $\Pi\perp l,\ \Pi\ni P$

$\vec{n}'=\vec{\tau}_l=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&-4\\2&1&-2\end{vmatrix}=6\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$

$\Rightarrow\vec{n}=\{2;-2;1\}$

$\Pi: 2(x-4)-2(y-1)+(z-6)=0$

$\Pi: 2x-2y+z-12=0$

$$l \cap \Pi = O \Rightarrow \begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \\ 2x-2y+z-12=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} +\ 3x-6z+15=0 \\ \cdot 2 \\ +\ 6x-3z-6=0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2z+5=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases} \Big|_{\cdot(-2)}^{+} \Rightarrow -3x+9=0 \Rightarrow x=3$$

$\Rightarrow z=4 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow O(3;-1;4)$

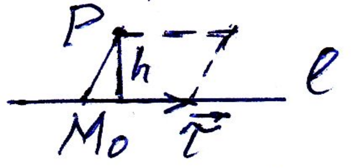
$$\begin{aligned} x_Q &= 2x_O - x_P = 6-4=2 \\ y_Q &= 2y_O - y_P = -2-1=-3 \\ z_Q &= 2z_O - z_P = 8-6=2 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{Q(2;-3;2)}$$

<u>1062)</u> $P(1;-1;-2)$; $l: \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$

$\rho(P,l)=?$

<u>Решение</u> $M_0(-3;-2;8)$, $\vec{\tau}=\{3;2;-2\}$

$$\rho(P,l)=h=\frac{|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|}$$



$$\overrightarrow{M_0P}\times\vec{\tau}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=\{18;-22;5\}$$

$$\rho(P,l)=\frac{\sqrt{324+484+25}}{\sqrt{9+4+4}}=\frac{\sqrt{833}}{\sqrt{17}}=\sqrt{49}=\boxed{7}$$

1065) $M_0(1;2;-3)$ $\quad l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$

$l_2: \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$

$\Pi - ?$ $\quad \Pi \ni M_0, \quad \Pi \parallel l_1, \quad \Pi \parallel l_2$

Решение $\quad \vec{\tau}_1=\{2;-3;3\}, \quad \vec{\tau}_2=\{3;-2;-1\}$

$\forall$ точки $M(x,y,z)\in\Pi \quad \overrightarrow{M_0M}, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \in \Pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2=0$

$$\Rightarrow \Pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (x-1)9+(y-2)11+ +(z+3)5=0$$

$$\boxed{\Pi: 9x+11y+5z-16=0}$$

1079) $\Pi - ?$ $\quad \Pi \ni l: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$

$\Pi \perp \Pi_1: 3x+2y-z-5=0$

Решение $\quad \vec{n}_1=\{3;2;-1\}\in\Pi$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$(x-1)(-1)+(y+2)8+(z-2)13=0$

$$\boxed{\Pi: x-8y-13z+9=0}$$

1083 2) $l_1: \begin{cases} x = 2t-4 \\ y = -t+4 \\ z = -2t-1 \end{cases}$, $l_2: \begin{cases} x = 4t-5 \\ y = -3t+5 \\ z = -5t+5 \end{cases}$

$\rho(l_1, l_2)$ - ?

Решение $M_1(-4, 4; -1)$, $\vec{\tau}_1 = \{2; -1; -2\}$

$M_2(-5; 5; 5)$, $\vec{\tau}_2 = \{4; -3; -5\}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1; 1; 6\}$

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2|}{|\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2|}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 12 = -9$$

$$\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|-9|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{3} = \boxed{3}$$

Дома: К. 1006, 1012, 1020, 1024, 1030, 1036, 1038, 1042, 1053, 1064, 1068, 1076, 1082, 1083(ост.)