



5



7



3



ПОДГОТОВКА К ГИА

Теория 2016

вероятностей





5



7



3



СОБЫТИЯ

- **Случайное событие** - это событие, которое либо произойдёт, либо нет.
- Примеры:
- Вы купили лотерейный билет. Он либо выигрышный, либо нет. *Случайное событие - выигрыш.* Оно может произойти, а может и нет.
- Вы подбросили монету. **Выпадение орла** - *случайное событие.* **Выпадение решки** тоже *случайное событие.*
- Студент сдаёт экзамен. **Выпадение определённого билета** – *случайное событие.* Сдаст или не сдаст тоже *случайное событие.*



5



7



3



ИСХОДЫ

- **Испытание** - любое действие, которое может привести к одному или нескольким результатам.



- **Исход** - конечный результат испытания. Значит испытание может иметь один или несколько исходов.

Благоприятный исход - желаемый исход

- Примеры:
- Бросаете монету. Хочу, чтобы выпала решка, => *благоприятный исход = выпала решка*. Значит выпадение орла – неблагоприятный исход.
- Сдаю экзамен. Из 20 билетов 10 знаю на отлично, 5 на хорошо, 3 на удовлетворительно и 2 не знаю. Хочу сдать на хорошо. Тогда *благоприятный исход = сдать на хорошо*. А какова вероятность сдать на хорошо?

Ответ:
 $5/20=1/4$.



5



7



3





БРОСАЮТ МОНЕТУ

(это испытание)

ВОЗМОЖНЫЕ ИСХОДЫ

• ***ВЫПАЛ***

«орел»



• ***ВЫПАЛА***

«решка»



**Вероятность
каждого
исхода**

$$P = \frac{1}{2}$$

5



7



3



БРОСАЮТ ИГРАЛЬНУЮ КОСТЬ (испытание) ВОЗМОЖНЫЕ ИСХОДЫ

- Выпало **1** очко
- Выпало **2** очка
- Выпало **3** очка
- Выпало **4** очка
- Выпало **5** очков
- Выпало **6** очков

6 ВОЗМОЖНЫХ
ИСХОДОВ



Загадали: «выпадет **3**
очка»

ВЕРОЯТНОСТЬ этого
события:

$$P = \frac{1}{6}$$



5



7



3





5



7



3



ФОРМУЛА ВЕРОЯТНОСТИ

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- Эта формула называется классической формулой вероятности или классическим определением вероятности. Где:

$P(A)$ – вероятность события A .

m – число (количество) благоприятных исходов,

n – число (количество) всех исходов.

ПРАВИЛО: Вероятность всегда равна от 0 до 1. Ни меньше, ни больше!



5



7



3



В МЕШКЕ 25 ЯБЛОК

- 7 красных

Вероятность того, что из мешка достанут **красное** яблоко:

$$P_1 = \frac{7}{25}$$

- 18 зеленых

Вероятность того, что из мешка достанут **зеленое** яблоко:

$$P_2 = \frac{18}{25}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{7}{25} + \frac{18}{25} = 1$$



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 1

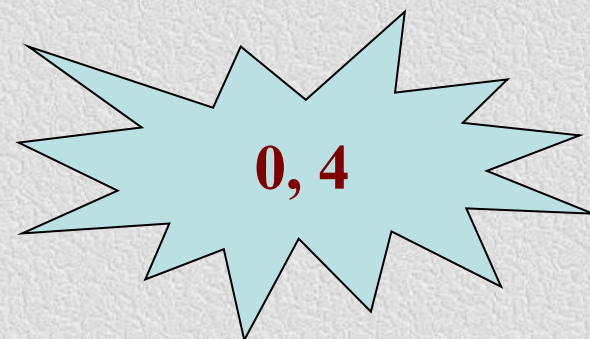
РЕШЕНИЕ

- В группе туристов **5 человек**. С помощью жребия они выбирают **двух человек**, которые должны идти в село за продуктами. Турист **А.** хотел бы сходить в магазин, но он **подчиняется жребию**. Какова вероятность того, что А. пойдёт в магазин?

Всего возможных исходов **5**;

Благоприятных исходов **2**.

$$P = \frac{2}{5} = 0,4$$



5



7



3





РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 2

- В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что **орел выпадет ровно один раз**.



РЕШЕНИЕ

ВОЗМОЖНЫЕ
ИСХОДЫ
СОБЫТИЯ

| 1 бросок | 2 бросок |
|---|--|
| О | О |
|  О | Р |
| Р |  О |
| Р | Р |

$$P = \frac{2}{4} = 0,5$$

5



7



3





5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 3

На олимпиаде в вузе участники рассаживают по трём аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

РЕШЕНИЕ

Число благоприятных исходов:

$$250 - 120 - 120 = 10;$$

Возможных: 250.

$$P = \frac{10}{250} = \frac{1}{25} = 0,04$$

0,04





5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 4

- Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на три?

3

РЕШЕНИЕ

| | | |
|----|----|----|
| 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 |
| 19 | | |

$$P = \frac{3}{10} = 0,3$$

0,3



5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 5

- В классе **26 человек**, среди них два близнеца - Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят **на две группы по 13 человек** в каждой. Найдите вероятность того, что **Андрей и Сергей** окажутся в одной группе.



РЕШЕНИЕ



Андрей в одной из групп

Всего исходов: 25 (не считаем Андрея)

Делят по **13 человек (среди них Андрей)**, т.е в группу, где находится Андрей, надо добавить только 12 человек

Благоприятных исходов: 12

$$P = \frac{12}{25}$$

0,48



5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 6

В случайном эксперименте
бросают две игральные кости.
Найдите вероятность того, что в
сумме выпадет **5 очков**.
Результат округлите до сотых.





5



7



3



РЕШЕНИЕ

ВОЗМОЖНЫЕ ИСХОДЫ СОБЫТИЯ

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|------------|------------|------------|------------|-----|-----|
| 1 | 1 1 | 2 1 | ... | 4 1 | ... | ... |
| 2 | 1 2 | 2 2 | 3 2 | ... | ... | ... |
| 3 | 1 3 | 2 3 | ... | ... | ... | ... |
| 4 | 1 4 | 2 4 | ... | ... | ... | ... |
| 5 | 1 5 | 2 5 | ... | ... | ... | ... |
| 6 | 1 6 | 2 6 | ... | ... | ... | ... |



5



7



3



РЕШЕНИЕ

- Всего возможных комбинаций при бросании двух кубиков: $6 * 6 = 36$.
- Из них благоприятные исходы можно перечислить:
- Таким образом, всего **благоприятных исходов 4**.
- Вероятность найдем, как отношение числа 4 благоприятных исходов к числу **всех возможных комбинаций 36**.
- $4/36 = 0,111111\dots$
- Округлим до сотых.

Ответ: **0,**
11.



5



7



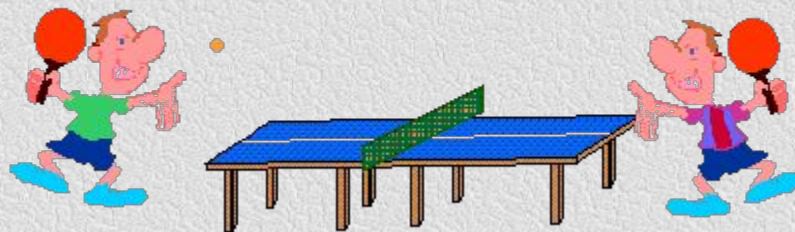
3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 7

- Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует **26 спортсменов**, среди которых **13 участников из России**, в том числе Владимир Егоров. Найдите вероятность того, что в первом туре Владимир Егоров будет играть с каким-либо спортсменом из России?





5



7



3



РЕШЕНИЕ

- Всего 26 спортсменов. Среди них - Егоров, который сам с собой играть не может.
- Следовательно: **ВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ – 25.**
- 13 участников из России, среди них Егоров. Следовательно: **12 партнеров из России.**

$$P = \frac{12}{25} = 0,48$$

0,48



5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 8

В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России **окажется во второй группе?**



РЕШЕНИЕ

Возможные исходы

1, 1, 1, 1

2, 2, 2, 2

3, 3, 3, 3

4, 4, 4, 4

$$P = \frac{4}{16} = 0,25$$

0,25



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 9

РЕШЕНИЕ

Перед началом футбольного матча судья **бросает монетку**, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет **три матча** с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» **выиграет жребий ровно два раза**.

Бросаем 1 раз



Бросаем 2 раз



Бросаем 3 раз



n – число бросаний,

2^n - число исходов

Число благоприятных исходов 3; всевозможных 8

$$P = \frac{3}{8} = 0,375$$

0,375



5



7



3

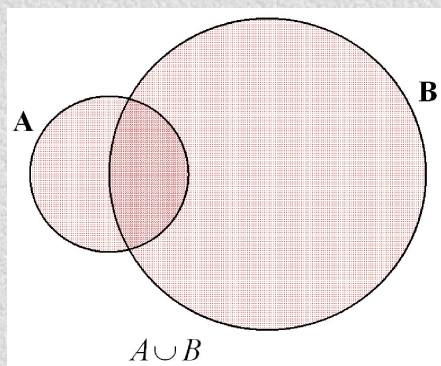


ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Определение. События называют *несовместными*, если они не могут происходить одновременно в одном и том же испытании.

Для несовместных событий пересечения не будет (рис.).

СУММА СОБЫТИЙ



Фразу «наступит **или** событие *A* **или** событие *B* **или** оба события *A* и *B*» обычно заменяют фразой «наступит хотя бы (по крайней мере) одно из данных событий».



5



7



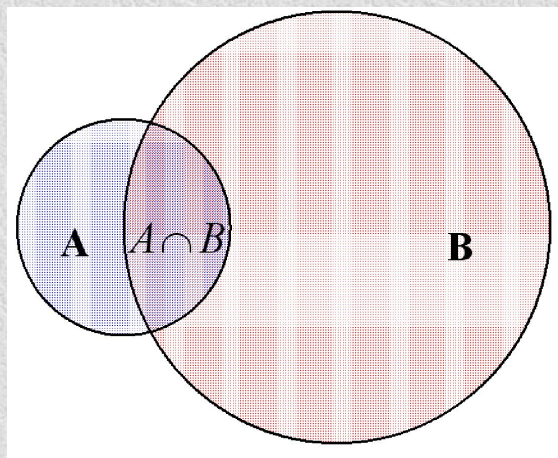
3



ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Определение. Два случайных события называют **независимыми**, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. В противном случае события называют зависимыми.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ



Определение. *Произведением (пересечением)* двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном выполнении события A и события B .



5



7



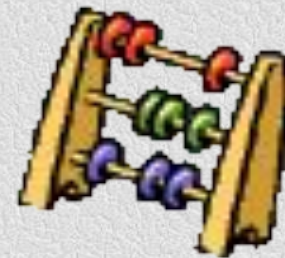
3



ВЕРОЯТНОСТИ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$



Сумма вероятностей **противоположных**
событий равна 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



5



7



3





ПРИМЕРЫ

- Вероятность, что при бросании игральной кости выпадет **либо 3 очка, либо 4 очка.**

$$\begin{aligned} P(A + B) &= P(A) + P(B) = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



5



7



3





5



7



3



ПРИМЕРЫ

- Вероятность, того что молодой человек **выиграет в лотерею 0,01**. А вероятность того, что он в этот же вечер **познакомится с красивой девушкой 0,4**. С какой вероятностью произойдут оба события?

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \\ = 0,01 \cdot 0,4 = 0,004$$





5



7



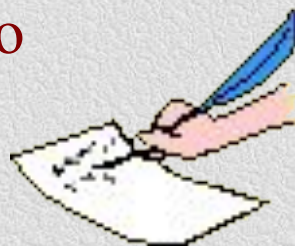
3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 10

- Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит **больше 11 задач, равна 0,67**. Вероятность того, что О. верно решит **больше 10 задач, равна 0,74**. Найдите вероятность того, что О. верно решит **ровно 11 задач**.



РЕШЕНИЕ

A+B

$n > 10$, n – число задач

$P = 0,74$

A

$n > 11$

$P_1 = 0,64$

B

$n = 11$

$P_2 = x$

$$0,67 + x = 0,74$$

$$x = 0,07$$

0,07



5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 11

- Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется **меньше 20** пассажиров, равна **0,94**. Вероятность того, что окажется **меньше 15** пассажиров, равна **0,56**. Найдите **вероятность** того, что число пассажиров будет **от 15 до 19**.



РЕШЕНИЕ

A+B

$n < 20$, n – число пас.

$$P = 0,94$$

A

$$n < 15$$

$$P_1 = 0,56$$

B

$$15 \leq n \leq 19$$

$$P_2 = x$$

$$P = P_1 + P_2$$

$$0,94 = 0,56 + x$$

$$x = 0,38$$

0,38



5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 12

- В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени **все три продавца заняты одновременно** (считайте, что клиенты заходят **независимо** друг от друга).



РЕШЕНИЕ

- Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна:

$$P = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,027$$

0,027



5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 13

- Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью **0,52**. Если А. играет **черными**, то А. выигрывает у Б. с вероятностью **0,3**. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. **выиграет оба раза**.



РЕШЕНИЕ

| | выиграл | проиграл |
|----------|----------------|----------|
| Б | 0,52 | 0,48 |
| Ч | 0,3 | 0,7 |

$$P = 0,52 \cdot 0,3 = 0,156$$

0,156



5



7



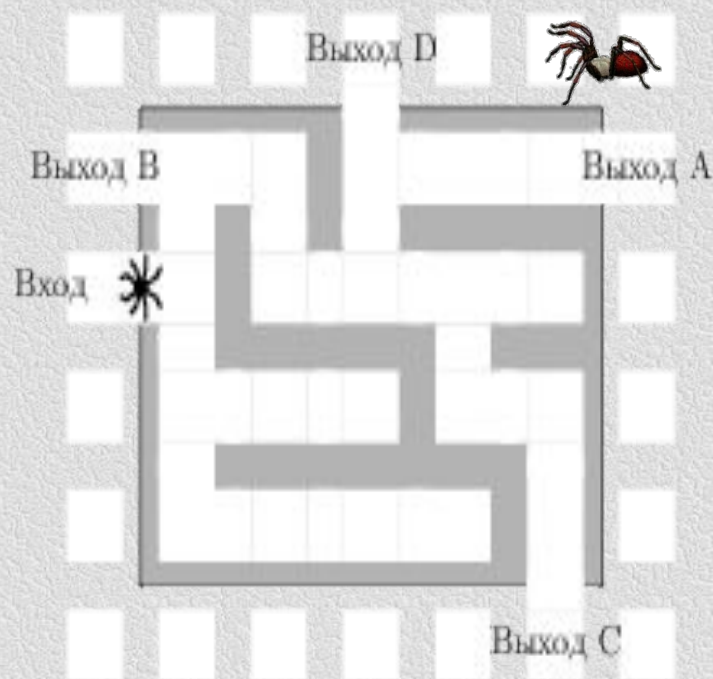
3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 14

- На рисунке изображен лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому еще не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придет к выходу D .





5



7



3

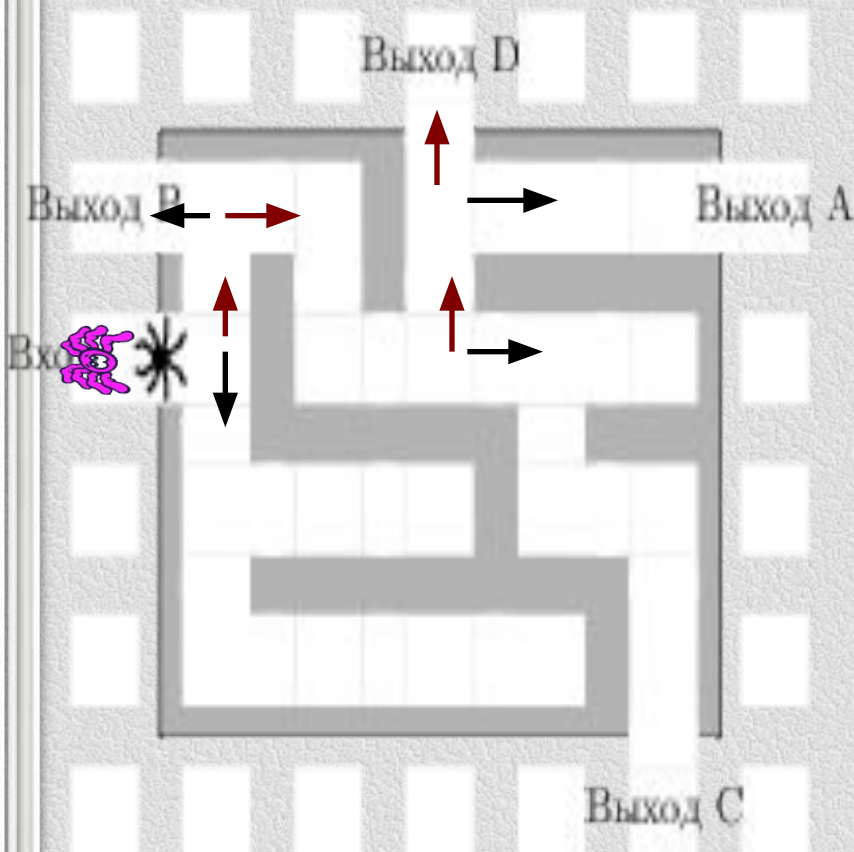


РЕШЕНИЕ

- Вероятность произведения **независимых событий** равна **произведению вероятностей** этих событий. Поэтому вероятность того, что жук придет к выходу D:

$$P = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625$$

0,0625





5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 15

- Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна **0,8**. Найдите вероятность того, что биатлонист **первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся**. Результат округлите до сотых.



РЕШЕНИЕ

| | попал | промах |
|-------|--------------|---------------|
| 1 раз | 0,8 | 0,2 |
| 2 раз | 0,8 | |
| 3 раз | 0,8 | |
| 4 раз | | 0,2 |
| 5 раз | | 0,2 |

$$P = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot$$

$$\cdot 0,2 \cdot 0,2$$

0,02



5



7



3



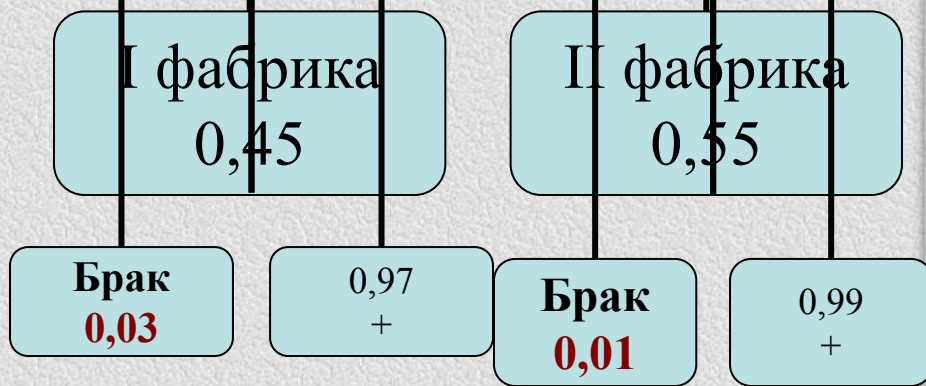
ЗАДАЧА № 16

- Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая - 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая - 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.



РЕШАЕМ

РЕШЕНИЕ



$$P = 0,45 \cdot 0,03 + 0,55 \cdot 0,01 = 0,019$$

0,019



5



7



3



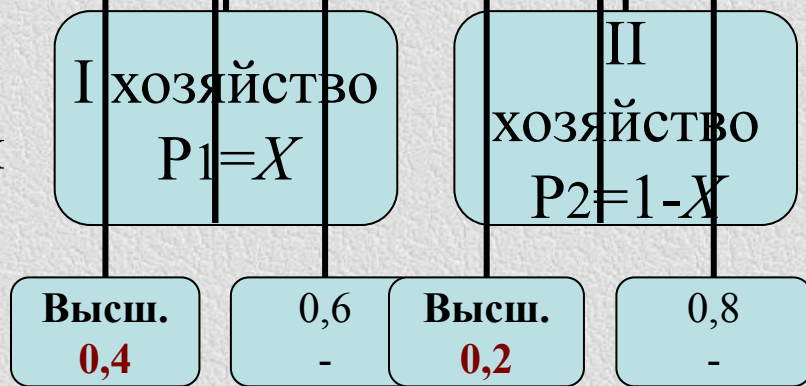
РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 17

- Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства - яйца высшей категории, а из второго хозяйства - 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

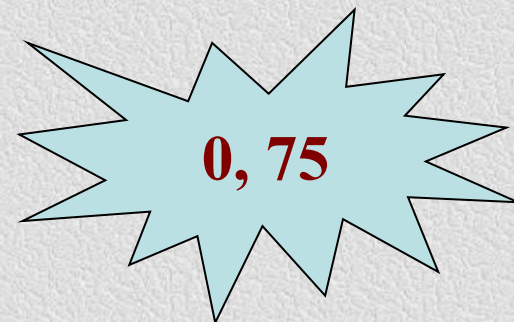


РЕШЕНИЕ



$$0,4x + 0,2(1 - x) = 0,35$$

$$x = 0,75$$





5



7

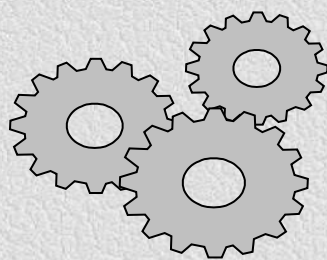


3



ЗАДАЧА № 18

- В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,07 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

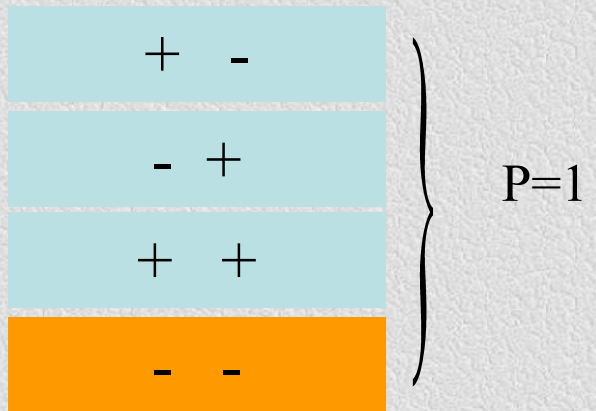


РЕШАЕМ

РЕШЕНИЕ

| | Исправен + | Неисправен - |
|-----------|------------|--------------|
| 1 автомат | 0,95 | 0,05 |
| 2 автомат | 0,95 | 0,05 |

ВОЗМОЖНЫЕ ИСХОДЫ



$$P = 1 - 0,05 \cdot 0,05 = 0,9975$$





5



7



3



РЕШАЕМ

РЕШЕНИЕ

ЗАДАЧА № 19

- Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.



Найдем вероятность того, что **перегорят обе лампы**. Эти события независимые, вероятность их произведения равно произведению вероятностей этих событий:
 $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$.

Событие, состоящее в том, что **не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное**.

Следовательно, его вероятность равна: $1 - 0,09 = 0,91$

0,91



5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 20



- Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов - **математика, русский язык** и **иностраннй язык**. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов - **математика, русский язык** и **обществознание**. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку - 0,8, по иностранному языку - 0,7 и по обществознанию - 0,5. Найдите вероятность того, что З. **сможет поступить** хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.



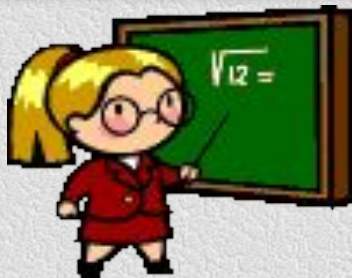
5



7



3



РЕШАЕМ

РЕШЕНИЕ

Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, **3.** нужно сдать и русский, и математику как минимум на **70 баллов**, а помимо этого еще сдать иностраный язык или обществознание не менее, чем на **70 баллов**.

| дисциплина | вероятность |
|----------------|-------------|
| Математика | 0,6 |
| Рус.яз. | 0,8 |
| Обществознание | 0,5 |
| Иностр.яз. | 0,7 |

И

| | + | - |
|------------|-----|-----|
| Обществ. | 0,5 | 0,5 |
| Иностр.яз. | 0,7 | 0,3 |

ИСХОДЫ

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | - | + | + |
| - | + | - | - |

$$P_1 = 1 - 0,5$$

$$P_2 = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,408$$

0,408



5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 21

- Ковбой Джон **попадает** в муху на стене с вероятностью **0,9**, если стреляет из **пристрелянного** револьвера. Если Джон стреляет из **непристрелянного** револьвера, то он **попадает** в муху с вероятностью **0,2**. На столе лежит **10 револьверов**, из них только **4 пристрелянные**. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон **промахнётся**.





5



7



3



РЕШАЕМ



РЕШЕНИЕ

Возможные исходы

Пристреленные
4 (из 10)
 $P_1=0,4$

НЕТ
6
 $P_2=0,6$

0,9
+

0,1
-

0,2
+

0,8
+

$$P = 0,4 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,52$$

0,52



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 22



- Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У **больных** гепатитом пациентов анализ даёт **положительный результат** с вероятностью **0,9**. Если пациент **не болен** гепатитом, то анализ может дать ложный **положительный результат** с вероятностью **0,01**. Известно, что **5%** пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно **больны гепатитом**. Найдите вероятность того, что **результат** анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет **положительным**.

5



7



3





5



7



3



РЕШАЕМ

РЕШЕНИЕ



Болеет
0,05

Не болеет
0,95

0,9

0,1

0,01

0,99



+

-



+

-

$$P = 0,05 \cdot 0,9 + 0,99 \cdot 0,01 = 0,545$$

0,545



5



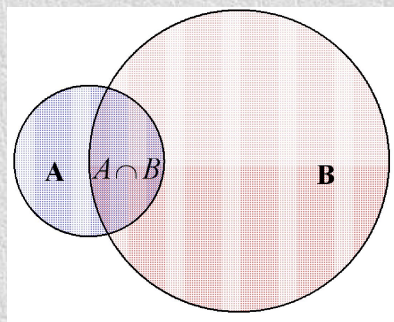
7



3



СОВМЕСТНЫЕ СОБЫТИЯ



События A и B **совместные** (зависимые),
вероятность суммы двух совместных
событий равна сумме вероятностей этих
событий, уменьшенной на вероятность их
произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$



5



7



3



РЕШАЕМ

ЗАДАЧА № 23

- В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня **в автомате закончится** кофе, равна $0,3$. Вероятность того, что кофе **закончится в обоих автоматах**, равна $0,12$. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе **останется в обоих автоматах**.



РЕШЕНИЕ

| | Кофе закончилось |
|-----------|------------------|
| 1 автомат | $0,3$ |
| 2 автомат | $0,3$ |

$0,12$

Не равно произведению, т.к. события зависимые (совместные)

ИСХОДЫ

+ -

- +

- -

+ +

$$P_1 = P(A) + P(B) - P(AB) =$$

$$= 0,3 + 0,3 - 0,12 = 0,48$$

$$P_2 = 1 - 0,48 = 0,52$$

0,52



5



7



3



Источники:

1. Высоцкий И. Р., Ященко И. В. ЕГЭ 2013. Математика. Задача В10. Теория вероятностей. Рабочая тетрадь / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – 2-е изд., доп– М.: МЦНМО, 2013. – 48 с.
2. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2013 (открытый банк заданий).
3. <http://alexlarin.net/ege14.html> – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.
4. <http://eek.diary.ru/> – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.
5. <http://reshuege.ru/?redir=1> – Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ. Математика».