ПРОИЗВОДНАЯ

Числовые последовательности

(продолжение)

VI. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Пусть (b_n) – бесконечная геометрическая прогрессия ($b_1 \neq 0$). Рассмотрим суммы членов этой прогрессии.

$$\boldsymbol{S_1} = b_1$$
$$\boldsymbol{S_2} = b_1 + b_2$$
$$\boldsymbol{S_3} = b_1 + b_2 + b_3$$
$$\boldsymbol{S_4} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$
$$\boldsymbol{S_5} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$
$$\dots$$
$$\boldsymbol{S_n} = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

Если последовательность $\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}, \boldsymbol{S_3}, \dots, \boldsymbol{S_n}$ сходится, т.е. имеет некоторый предел S, то число S называется *суммой бесконечной геометрической прогрессии.*

Знаем формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$\boldsymbol{S_n} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$ (q – знаменатель геометрической прогрессии)

Найдем предел $\boldsymbol{S_n}$ при n, стремящемся к бесконечности, если $|q| < 1$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1}{q - 1} \lim_{n \to \infty} (\underbrace{q^n}_{\to 0} - 1) = \frac{b_1}{q - 1}(-1) = \frac{b_1}{1 - q} \quad \Rightarrow S = \frac{b_1}{1 - q}$$

VI. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

$|q| < 1.$

Примеры (выполнить запись, как в образце)

№ 38.23(г)

Дано: (b_n) – г.п.

$18; -6; 2; -\frac{2}{3}; \ldots$

S – ?

1) $b_1 = 18.$

2) $q = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}.$

$|q| < 1$, значит $S = \frac{b_1}{1-q}.$

3) $S = \frac{18}{1+\frac{1}{3}} = 18 : \frac{4}{3} = 18 \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{2} = 13{,}5.$

Ответ: 13,5.

1. Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -5$, $q = -0{,}1$.
2. Найдите знаменатель и сумму геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 3$, $b_2 = \frac{1}{3}$.
3. Найдите сумму геометрической прогрессии $24; -8; \frac{8}{3}; -\frac{8}{9}$.
4. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если $S = -21$, $q = \frac{1}{7}$.
5. Найдите n-й член геометрической прогрессии (b_n), если $S = 21$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 3$.

VI. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

$|q| < 1.$

Пример 6.

Дано: (b_n) – бесконечная геометрическая прогрессия, $|q| < 1$.

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + \ldots = 9;$

$(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2 + (b_4)^2 + \ldots + (b_n)^2 + \ldots = 40{,}5.$

Найти: b_5.

Решение: 1) Если (b_n) сходится, то $(b_n)^2$ тоже сходится, $|q^2| < 1$.

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5; \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 9(1-q), \\ \dfrac{9^2(1-q)^2}{1-q^2} = 40{,}5; \end{cases} \qquad \ldots$$

2) $b_5 = b_1 q^4 \ldots$

Ответ: …