

ПРОИЗВОДНАЯ

Числовые

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

(продолжение)

VI. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Пусть (b_n) – бесконечная геометрическая прогрессия ($b_1 \neq 0$).
Рассмотрим суммы членов этой прогрессии.

$$\begin{aligned}S_1 &= b_1 \\S_2 &= b_1 + b_2 \\S_3 &= b_1 + b_2 + b_3 \\S_4 &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\S_5 &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 \\&\dots \\S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n\end{aligned}$$

Если последовательность $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ сходится, т.е. имеет некоторый предел S , то число S называется *суммой бесконечной геометрической прогрессии*.

Знаем формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q - \text{знаменатель геометрической прогрессии})$$

Найдем предел S_n при n , стремящемся к бесконечности, если $|q| < 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1}{q - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n - 1) = \frac{b_1}{q - 1}(-1) = \frac{b_1}{1 - q} \Rightarrow S = \frac{b_1}{1 - q}$$

0

VI. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

$$|q| < 1.$$

Примеры (выполнить запись, как в образце)

1. Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = -5$, $q = -0,1$.
2. Найдите знаменатель и сумму геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = 3$, $b_2 = \frac{1}{3}$.
3. Найдите сумму геометрической прогрессии $24; -8; \frac{8}{3}; -\frac{8}{9}$.
4. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n) , если $S = -21$, $q = \frac{1}{7}$.

Handwritten example on grid paper showing the calculation of the sum of a geometric progression. The problem is: Find the sum S of a geometric progression (b_n) if $b_1 = 18$ and $q = -\frac{1}{3}$. The solution shows the formula $S = \frac{b_1}{1 - q}$ and the calculation: $S = \frac{18}{1 + \frac{1}{3}} = 18 \cdot \frac{3}{4} = 13,5$. The final answer is 13,5.

Упр. 38, 23(2)

Дано: (b_n) - г.п.
 $18; -6; 2; -\frac{2}{3}; \dots$

$S = ?$

1) $b_1 = 18$
2) $q = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$
 $|q| < 1$, значит,
 $S = \frac{b_1}{1 - q}$
3) $S = \frac{18}{1 + \frac{1}{3}} = 18 \cdot \frac{3}{4} =$
 $= 18 \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{2} = 13,5$
Ответ: 13,5.

5. Найдите n -й член геометрической прогрессии (b_n) , если $S = 21$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 3$.

VI. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

$$|q| < 1.$$

Пример 6.

Дано: (b_n) – бесконечная геометрическая прогрессия, $|q| < 1$.

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + \dots = 9;$$

$$(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2 + (b_4)^2 + \dots + (b_n)^2 + \dots = 40,5.$$

Найти: b_5 .

Решение: 1) Если (b_n) сходится, то $(b_n)^2$ тоже сходится, $|q^2| < 1$.

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1 - q} = 9, \\ \frac{b_1^2}{1 - q^2} = 40,5; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 9(1 - q), \\ \frac{9^2(1 - q)^2}{1 - q^2} = 40,5; \end{cases} \quad \dots$$

$$2) b_5 = b_1 q^4 \dots$$

Ответ: ...