ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В МЕТРОЛОГИИ

ЧАСТЬ 2

А.Я. Карпенко

Основные законы распределения вероятностей непрерывной случайной величины

- Равномерный закон распределения

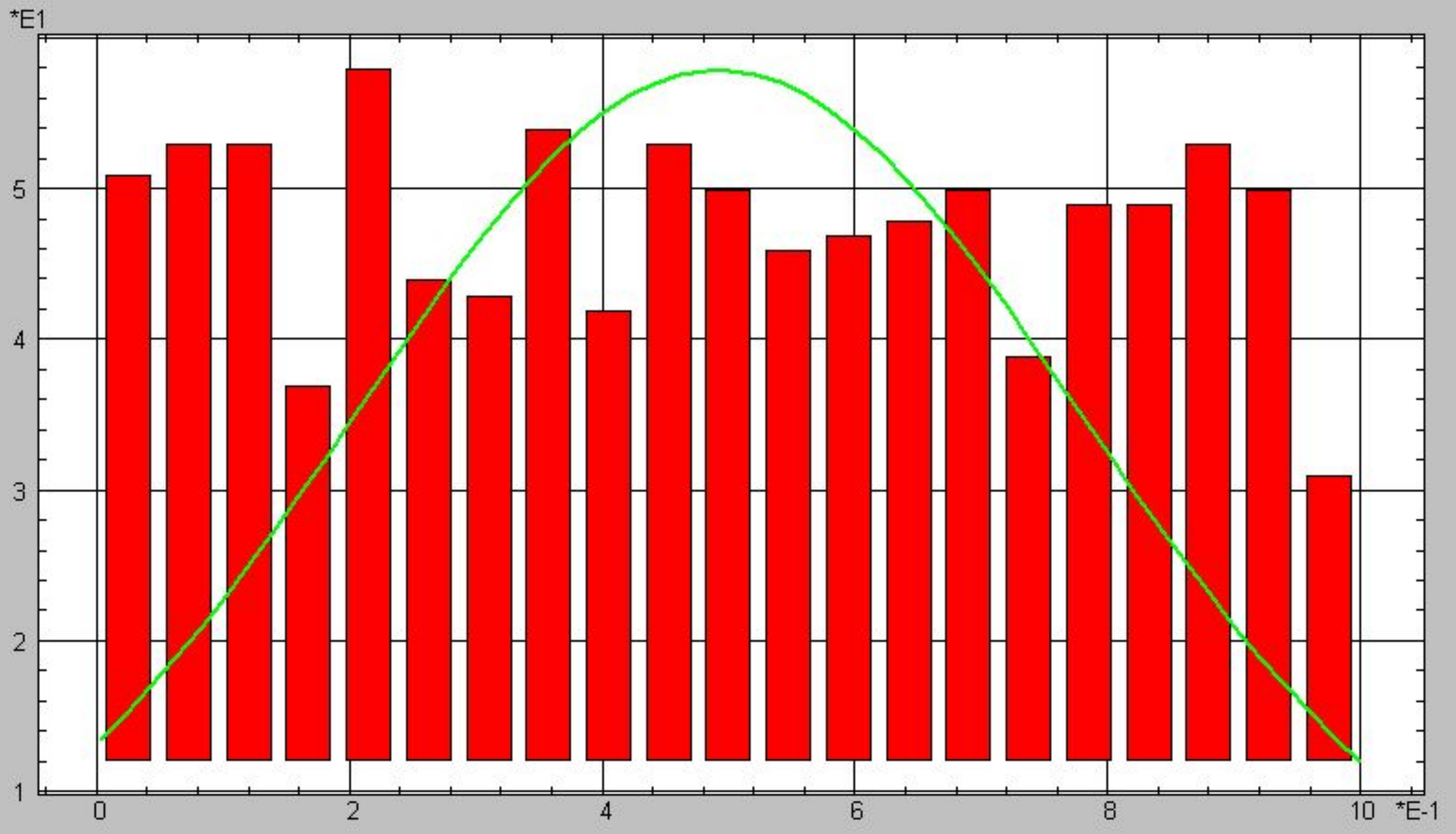
$$f(x)=\begin{cases}0, x\le a\\ \dfrac{1}{b-a}, a<x\le b\\ 0, x>b\end{cases}$$

$$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad M(x)=\frac{a+b}{2}$$

Задание

- **Выведите формулы для вычисления дисперсии и математического ожидания равномерного закона распределения.**
- **Для этого используйте определение этих характеристик.**

Гистограмма равномерного закона распределения



Примеры равномерного закона распределения

- Погрешности прямых измерений
- Погрешность округления.
- Случайная составляющая погрешности дискретного прибора при незначительном разбросе измерений (1-3 дискрета)

Пример из ГОСТ 8.207

- Оценку суммарного СКО результата измерения вычисляют

$$s_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i^2}{3} + s^2(\tilde{A})}$$

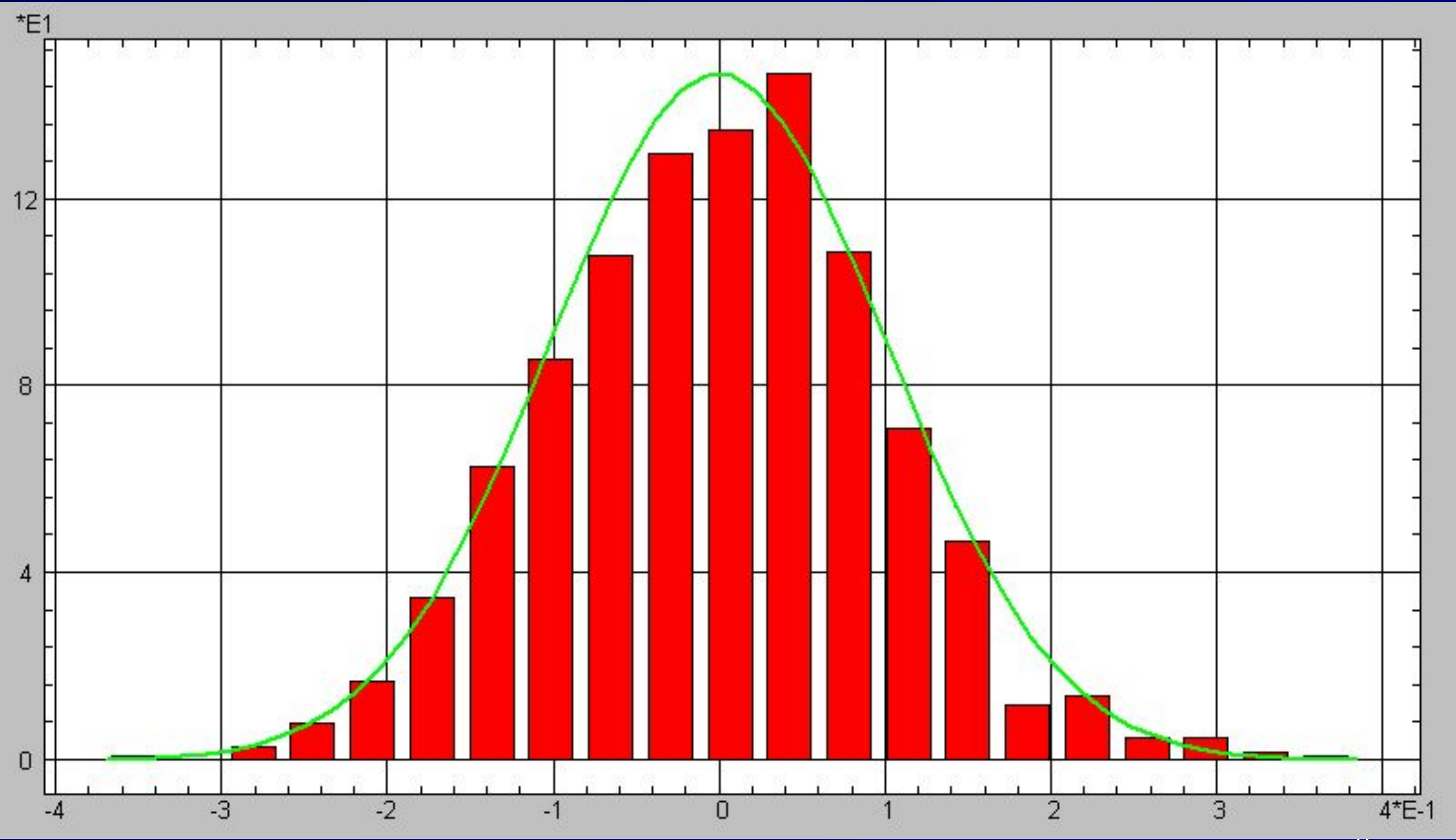
$$D(\Theta) = \frac{(b - a)^2}{12} = \frac{4\Theta^2}{12} = \frac{\Theta^2}{3}$$

Нормальный закон распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$N(m_x,\sigma_x)$

График функции плотности нормального закона распределения



Нормированная случайная величина

$$U = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$$

Задание:

- Доказать, что для нормированной случайной величины

  $M(u) = 0 \qquad \sigma^2(u) = 1$

Вопрос

- Пусть три случайные величины X,Y,Z имеют нормальное распределение с известными математическими ожиданиями и дисперсиями (предположим, имеются три измерительных канала температуры): $M(X)=50$, $D(X)=0{,}3$, $M(Y)=70$, $D(Y)=0{,}5$, $M(Z)=90$, $D(Z)=0{,}7$
- Постройте функции плотности распределения $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$.
- Постройте для них нормированные функции плотности распределения.

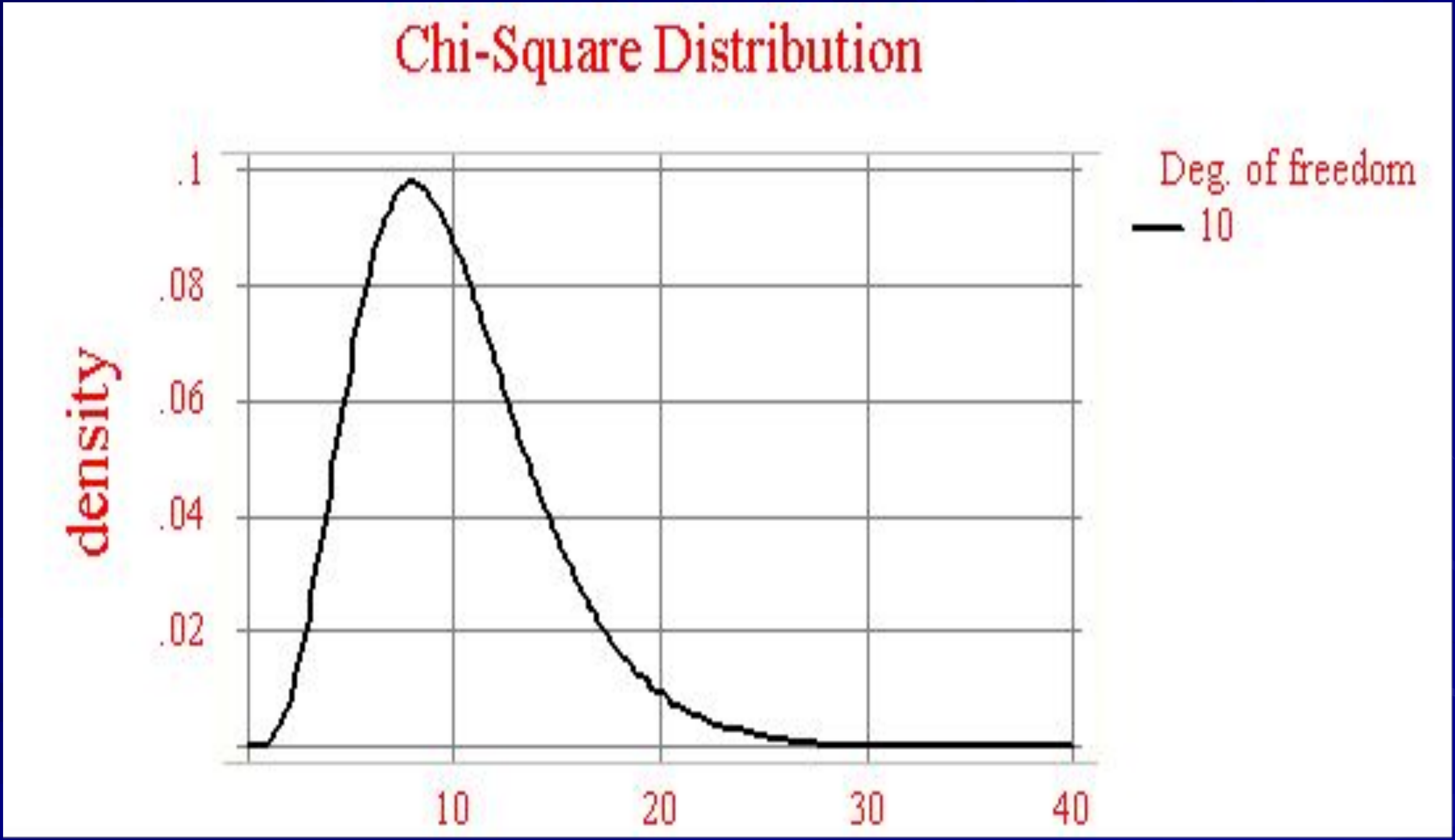
Распределение χ^2

- Пусть $Z_1, Z_2 \ldots Z_v$ независимые нормированные случайные величины $N(0, 1)$.
- $M(Z)=0, \ D(Z)=1$

$$U = \sum_{i=1}^{v} Z_i^2$$

- есть хи-квадрат ($\chi 2$) распределение с параметром v. Этот параметр называется числом степеней свободы.

Функция плотности распределения



Пример распределения χ^2

- Оценка дисперсии по выборке

$$S_x^2 = \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{m}_x)^2$$

$$\frac{S_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{1}{n-1}\sum\frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} \qquad \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} = \sum\frac{(x_i - x)^2}{\sigma_x^2}$$

В дальнейшем будем использовать эту статистику

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2}$$

Распределение Стъюдента

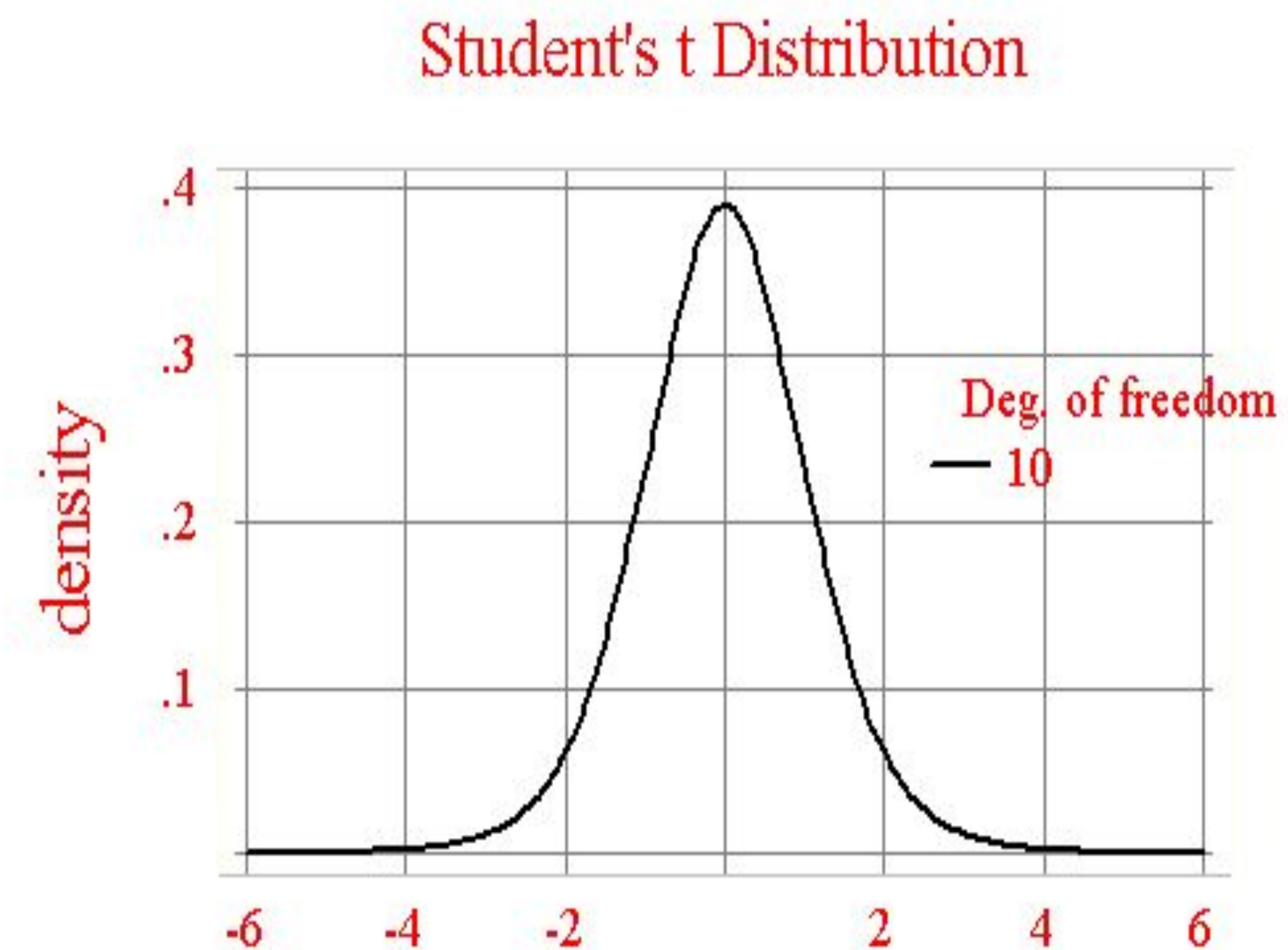
- $Z \to N(0,1)$, $V \to \chi^2(v)$
- Z,V – независимые

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{v}}}$$

M(t)=0   D(t)= v/v-2

- случайная величина t (t-статистика) ,
- - распределение Стъюдента

Функция плотности распределения



Пример

- В чем отличие $\dfrac{x - x}{\sigma_x}$ и $\dfrac{x - x}{S_x}$

$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{S_x^2}} = \frac{\dfrac{x - x}{\sigma_x}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_x^2}{(n-1)\sigma_x^2}}} = \frac{Z}{\sqrt{\dfrac{V}{(n-1)}}}$$

Вопрос :

- Приведите примеры использования распределения Стъюдента в Ваших практических задачах.

Распределение Фишера

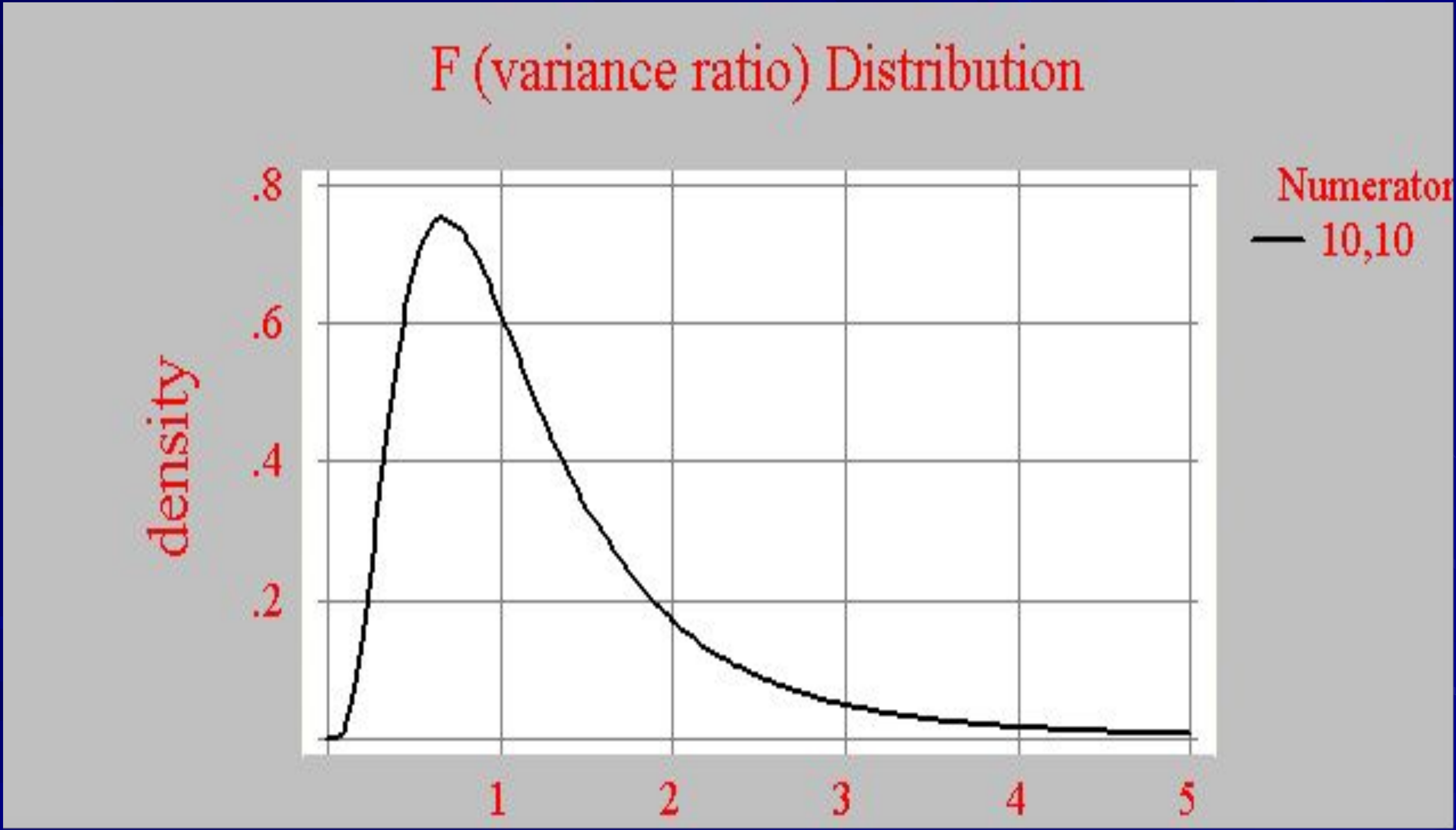
- Если U, V – независимые случайные величины,
- U – имеет $\chi^2(\nu_1)$ с ν_1 степенями свободы,
- V - имеет $\chi^2(\nu_2)$ с ν_2 степенями свободы

$$F = \frac{\dfrac{U}{\nu_1}}{\dfrac{V}{\nu_2}}$$

имеет распределение Фишера

с ν_1 и ν_2 степенями свободы

Функция плотности распределения Фишера



Пример

- Проверяется гипотеза о равенстве дисперсий двух выборок
- X: $x_1, x_2, ..., x_n$
- Y: $y_1, y_2, ..., y_m$
- Отношение двух выборочных нормированных дисперсий есть распределение Фишера с n-1 и m-1 степенями свободы.

$$F = \frac{\dfrac{S_x^2}{\sigma_x^2}}{\dfrac{S_y^2}{\sigma_y^2}} = \frac{\dfrac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2(n-1)}}{\dfrac{(m-1)S_y^2}{\sigma_y^2(m-1)}} = \frac{\dfrac{U}{n-1}}{\dfrac{V}{m-1}}$$

Вопрос: Приведите примеры использования распределения Фишера в Ваших практических задачах.

Что такое выборка?

- Выборкой называют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.
- ξ - случайная величина
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка

Показатели описательной статистики

Показатели положения (относительно среднего)

- **среднее арифметическое**

$$X = \hat{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- среднее геометрическое

$$x_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

- медиана $P(x \leq M) = P(x \geq M) = 1/2$
- мода - положение max

Показатели рассеяния

- Дисперсия $$S_x^2 = \hat{D}(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{m}_x)^2$$
- Стандартное отклонение $$S_x = \hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{D}(x)}$$
- Размах $X_{max} – X_{min}$
- Межквартальный размах – 50% выборки

Показатели формы

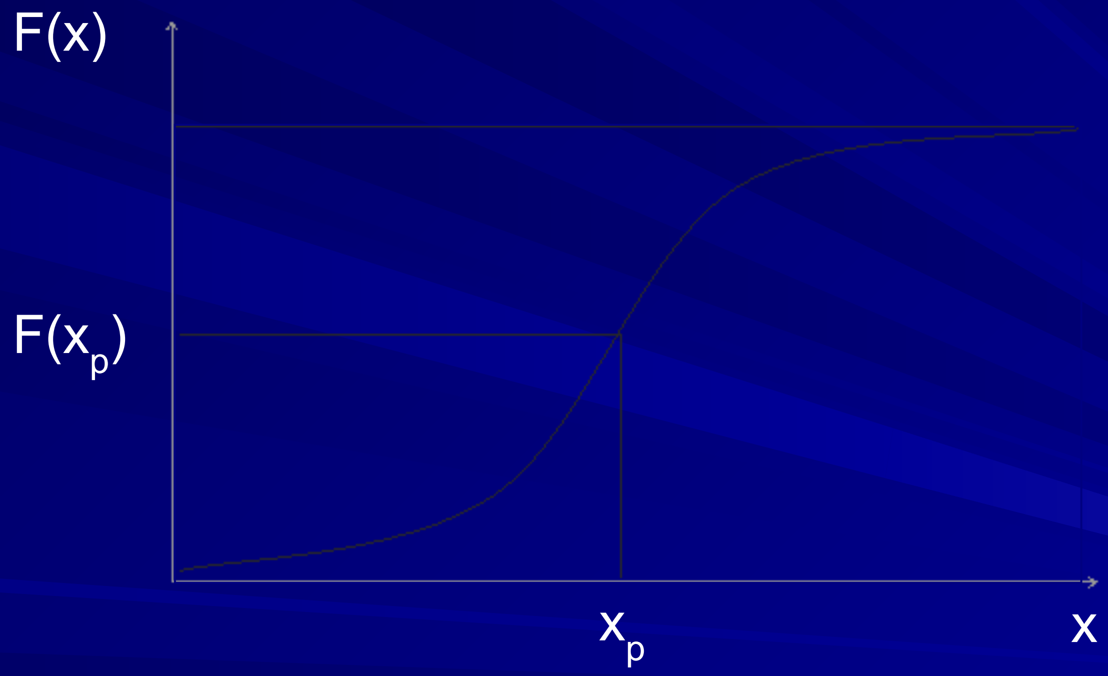
- Асимметрия $\dfrac{M[\xi - M(\xi)]^3}{[D(\xi)]^{3/2}}$ $\quad A_s = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$
- Эксцесс $\dfrac{M[\xi - M(\xi)]^4}{[D(\xi)]^2}$ $\quad E_k = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4}$
- Моменты $\mu_k = M[(X - M(X))^k]$

Квантиль

- Квантилью уровня α (или α – квантилью) непрерывной случайной величины ξ , имеющей непрерывную функцию распределения F(x), называется значение Xα для которого
- $P\ (\xi < X_\alpha) = \alpha$

  Часто встречающиеся в практике квантили.
- Медиана - квантиль, соответствующая значению α =0,5
- Верхняя квартиль – квантиль, соответствующий значению α =0,75
- Нижняя квартиль – квантиль, соответствующий значению α =0,25
- Децили – квантили уровней 0,1; 0,2; ... , 0,9.

Квантиль Xα случайной величины, имеющей функцию распределения F(x)



Примеры решения прямой задачи в EXCEL

- Для нормального закона распределения,

=НОРМСТРАСП(1.96) = 0.975002

=НОРМСТРАСП(-1.96) = 0.024998

- Для распределения Стъюдента

=СТЬЮДРАСП(1.96;100;1) = 0.026389

=СТЬЮДРАСП(1.96;200;1) = 0.025692

1.96 – заданное значение X,

100,200 – число степеней свободы,

1 - односторонний интервал

Примеры решения обратной задачи в EXCEL

- Для нормального закона распределения по заданной вероятности найдем квантиль

=НОРМСТОБР(0.025) = -1.96

=НОРМСТОБР(0.975) = 1.96

- Решение обратной задачи для распределения Стъюдента

=СТЬЮДРАСПОБР(0.05;500) = 1.96472

Соответствует P= 0.975

=СТЬЮДРАСПОБР(0.01;500) = 2.585698

Соответствует P= 0.995

Спасибо
за
Внимание !!!

Предела
для СОВЕРШЕНСТВА нет
!!!