

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В МЕТРОЛОГИИ

ЧАСТЬ 2

А.Я. Карпенко

Основные законы распределения вероятностей непрерывной случайной величины

- Равномерный закон распределения

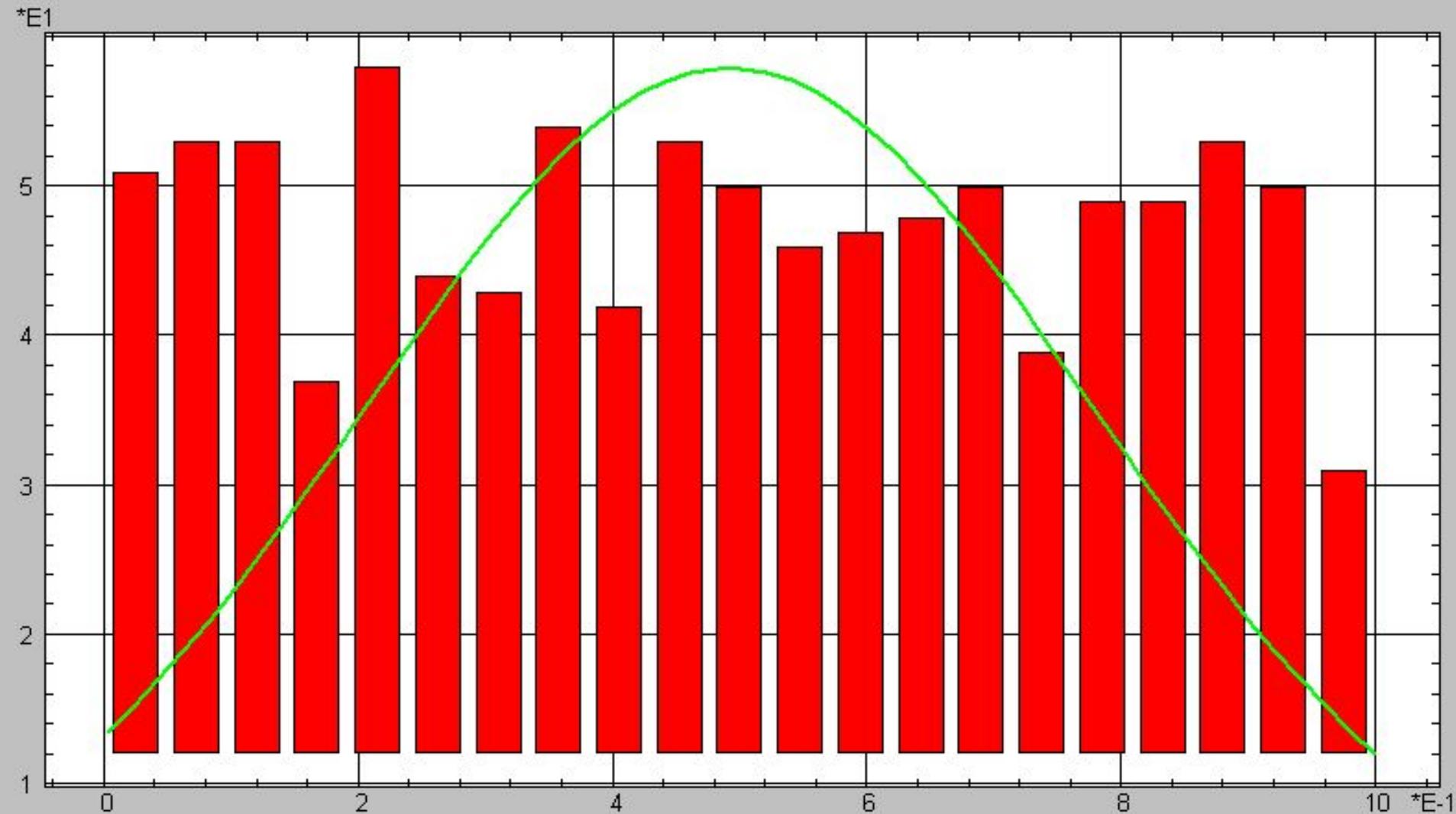
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad M(x) = \frac{a+b}{2}$$

Задание

- **Выведите формулы для вычисления дисперсии и математического ожидания равномерного закона распределения.**
- **Для этого используйте определение этих характеристик.**

Гистограмма равномерного закона распределения



Примеры равномерного закона распределения

- Погрешности прямых измерений
- Погрешность округления.
- Случайная составляющая погрешности дискретного прибора при незначительном разбросе измерений (1-3 дискрета)

Пример из ГОСТ 8.207

- Оценку суммарного СКО результата измерения вычисляют

$$s_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3} + s^2(\tilde{A})}$$

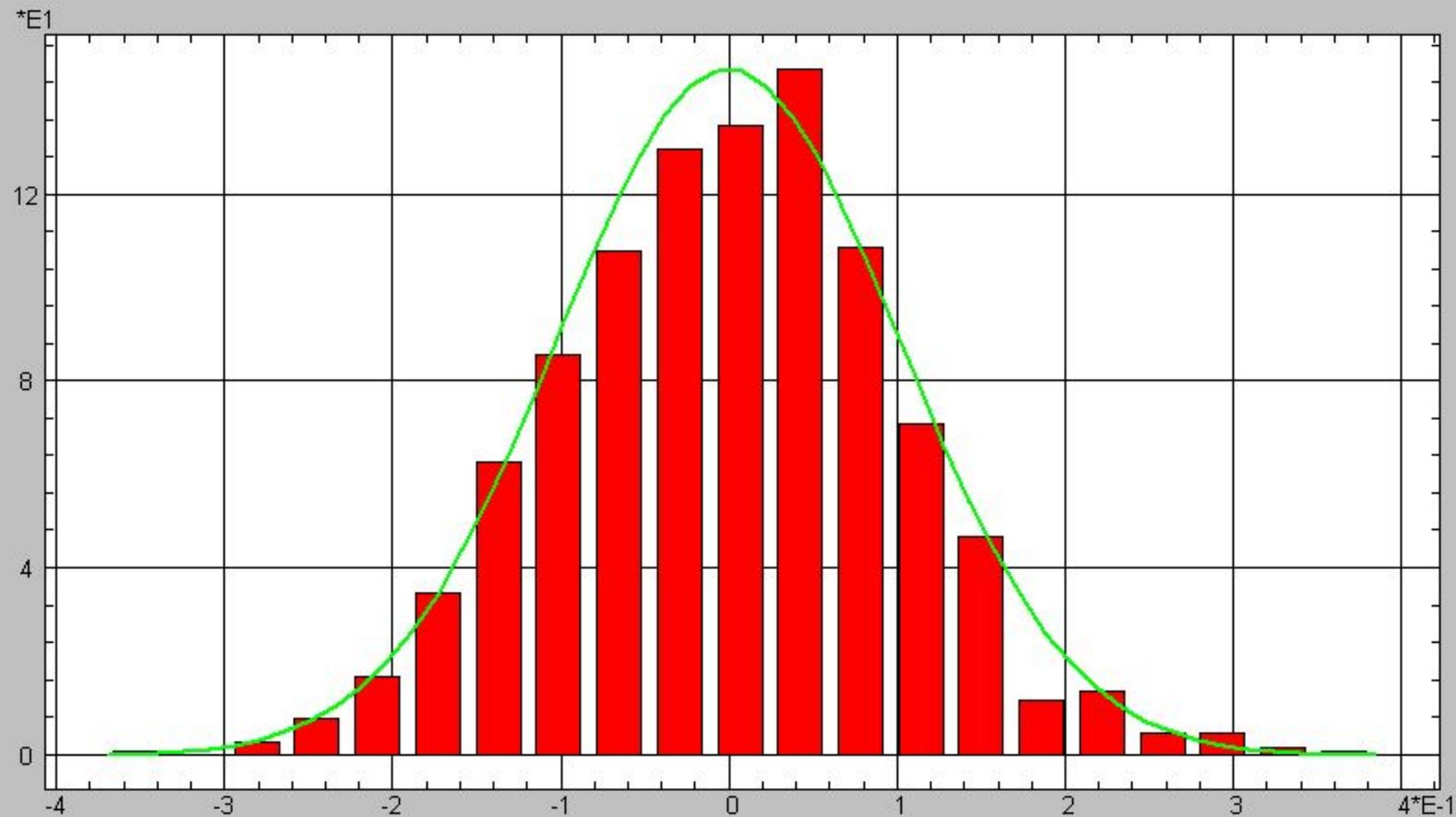
$$D(\Theta) = \frac{(b - a)^2}{12} = \frac{4\Theta^2}{12} = \frac{\Theta^2}{3}$$

Нормальный закон распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$N(m_x, \sigma_x)$

График функции плотности нормального закона распределения



Нормированная случайная величина

$$U = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$$

Задание:

- Доказать, что для нормированной случайной величины

$$M(u) = 0 \quad \sigma^2(u) = 1$$

Вопрос

- Пусть три случайные величины X, Y, Z имеют нормальное распределение с известными математическими ожиданиями и дисперсиями (предположим, имеются три измерительных канала температуры): $M(X)=50$, $D(X)=0,3$, $M(Y)=70$, $D(Y)=0,5$, $M(Z)=90$, $D(Z)=0,7$
- Постройте функции плотности распределения $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$.
- Постройте для них нормированные функции плотности распределения.

Распределение χ^2

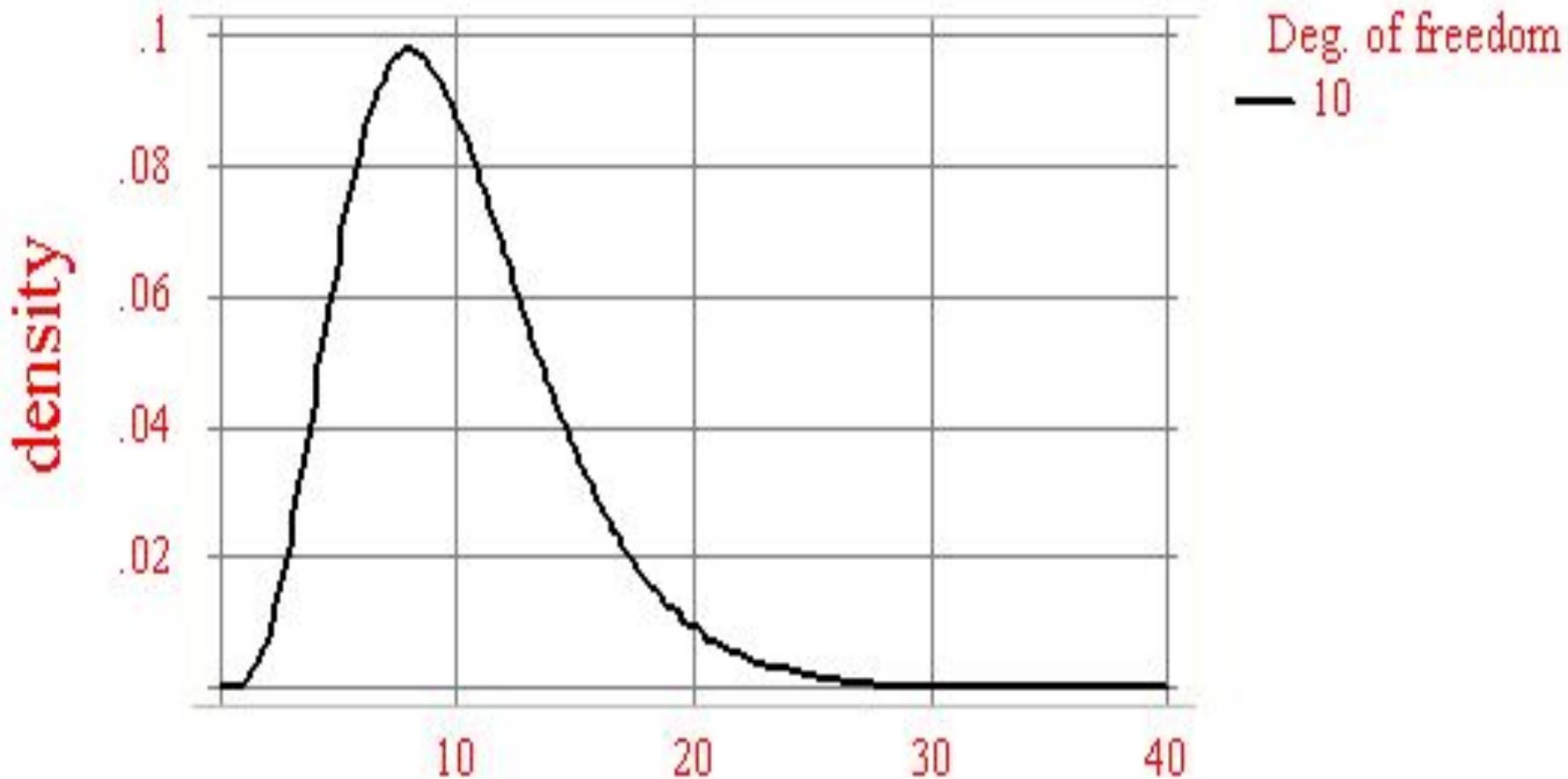
- Пусть $Z_1, Z_2 \dots Z_\nu$ независимые нормированные случайные величины $N(0, 1)$.
- $M(Z)=0, D(Z)=1$

$$U = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$$

- есть хи-квадрат (χ^2) распределение с параметром ν . Этот параметр называется числом степеней свободы.

Функция плотности распределения

Chi-Square Distribution



Пример распределения χ^2

- Оценка дисперсии по выборке

$$S_x^2 = \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}_x)^2$$

$$\frac{S_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{1}{n-1} \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}$$

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}$$

В дальнейшем будем
использовать эту статистику

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2}$$

Распределение Стьюдента

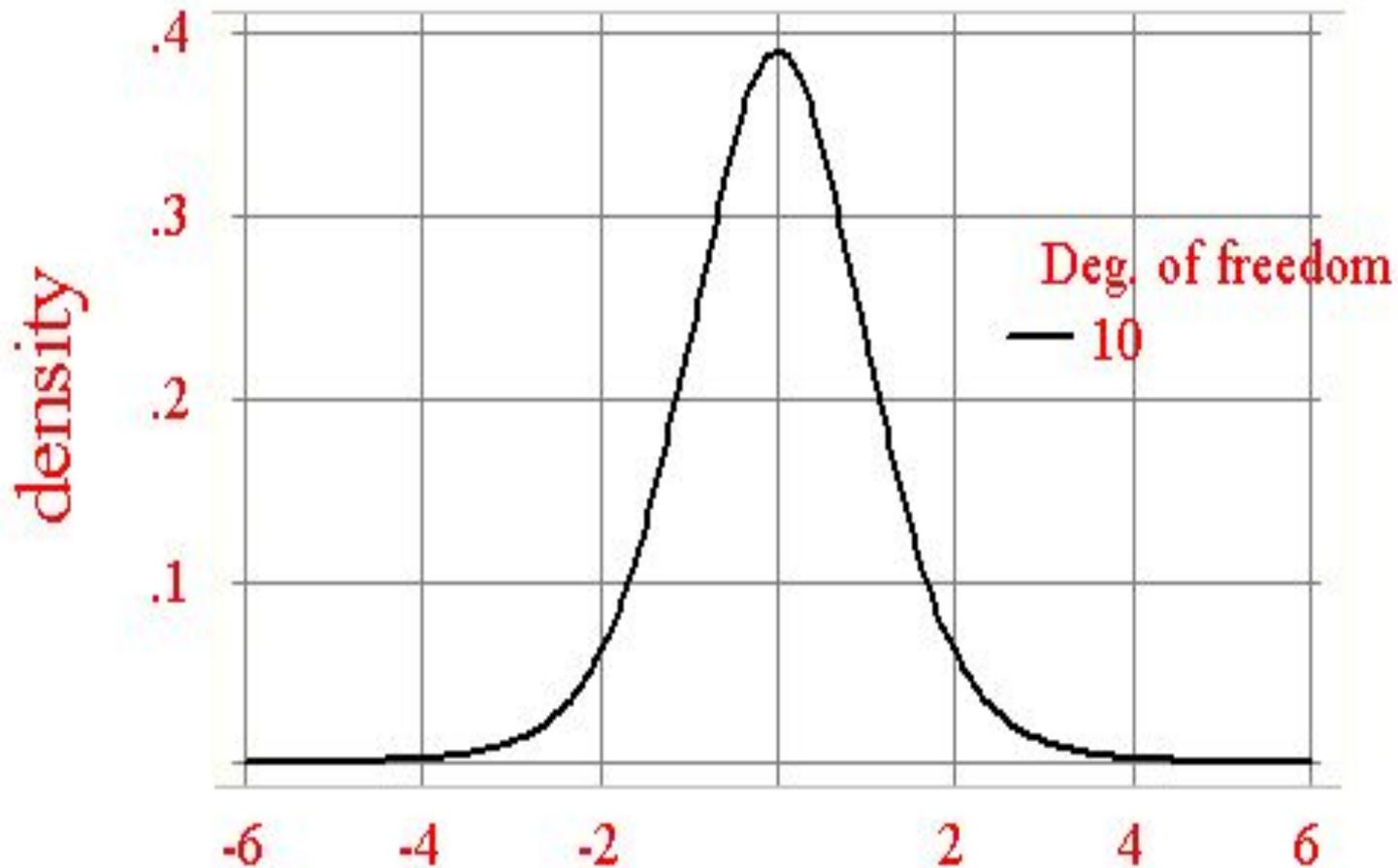
- $Z \rightarrow N(0,1), V \rightarrow \chi^2(v)$
- Z, V – независимые

$$t = \frac{Z}{\sqrt{V/v}} \quad M(t)=0 \quad D(t)= v/v-2$$

- случайная величина t (t -статистика) ,
- - распределение Стьюдента

Функция плотности распределения

Student's t Distribution



Пример

- В чем отличие

$$\frac{x - x_i}{\sigma_x}$$

$$\frac{x - \bar{x}}{S_x}$$

$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{S_x^2}} = \frac{\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2}{(n-1)\sigma_x^2}}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{(n-1)}}}$$

Вопрос :

- Приведите примеры использования распределения Стьюдента в Ваших практических задачах.

Распределение Фишера

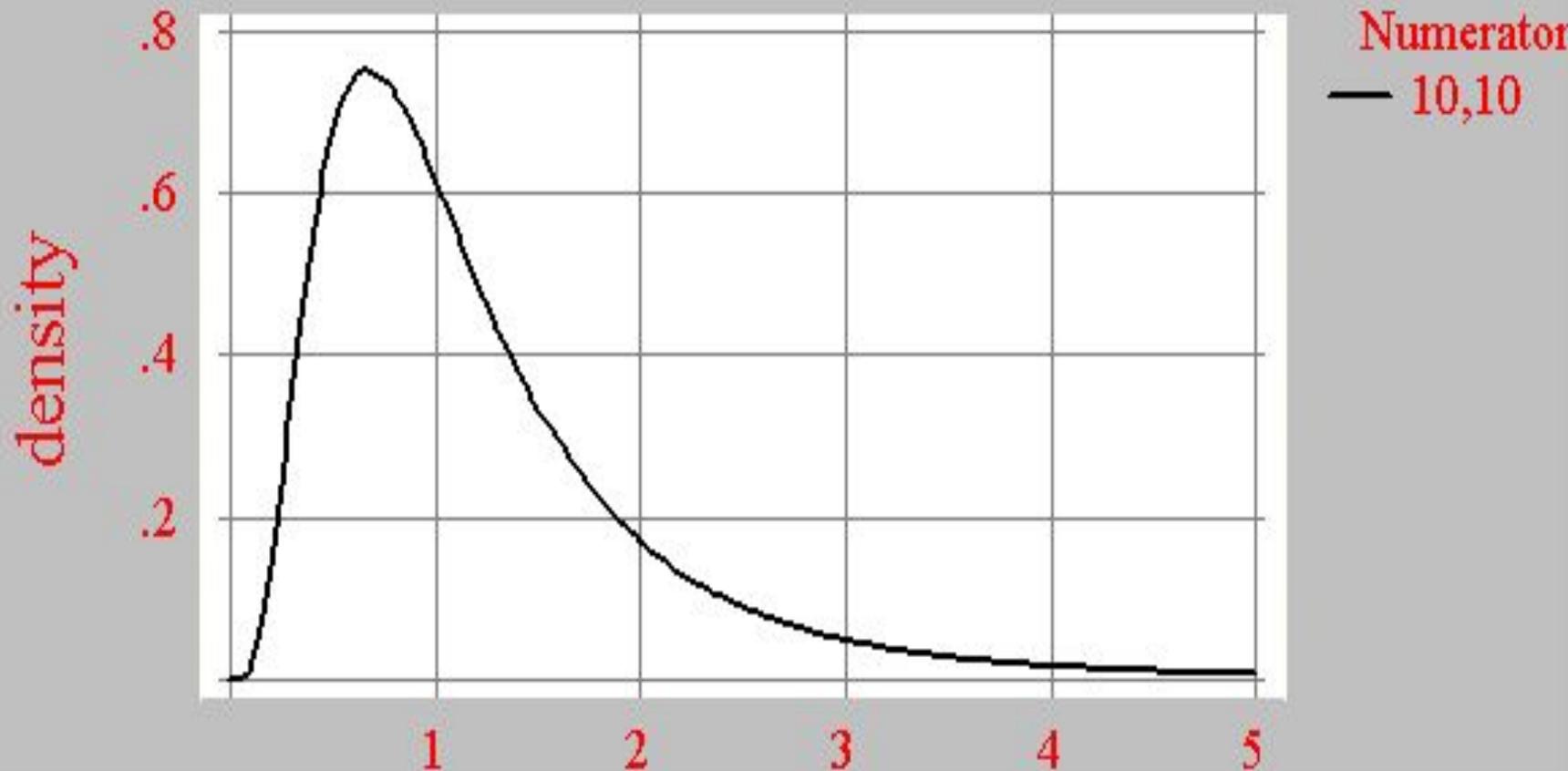
- Если U, V – независимые случайные величины,
- U – имеет $\chi^2(v_1)$ с v_1 степенями свободы,
- V – имеет $\chi^2(v_2)$ с v_2 степенями свободы

$$F = \frac{\frac{U}{v_1}}{\frac{V}{v_2}}$$

имеет распределение Фишера
с v_1 и v_2 степенями свободы

Функция плотности распределения Фишера

F (variance ratio) Distribution



Пример

- Проверяется гипотеза о равенстве дисперсий двух выборок
- $X: x_1, x_2, \dots, x_n$
- $Y: y_1, y_2, \dots, y_m$
- Отношение двух выборочных нормированных дисперсий есть распределение Фишера с $n-1$ и $m-1$ степенями свободы.

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{(n-1)S_x^2}{(m-1)S_y^2} = \frac{U}{V}$$
$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_x^2(n-1)}{\sigma_y^2(m-1)} = \frac{n-1}{m-1}$$

Вопрос: Приведите примеры использования распределения Фишера в Ваших практических задачах.

Что такое выборка?

- Выборкой называют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.
- ξ - случайная величина
- X_1, X_2, \dots, X_n – выборка

Показатели описательной статистики

Показатели положения (относительно среднего)

- среднее арифметическое

$$\bar{X} = \hat{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- среднее геометрическое

$$\bar{X}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

- медиана $P(x \leq M) = P(x \geq M) = 1/2$
- мода - положение \max

Показатели рассеяния

- Дисперсия $S_x^2 = \hat{D}(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}_x)^2$
- Стандартное отклонение $S_x = \hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{D}(x)}$
- Размах $X_{\max} - X_{\min}$
- Межквартильный размах – 50% выборки

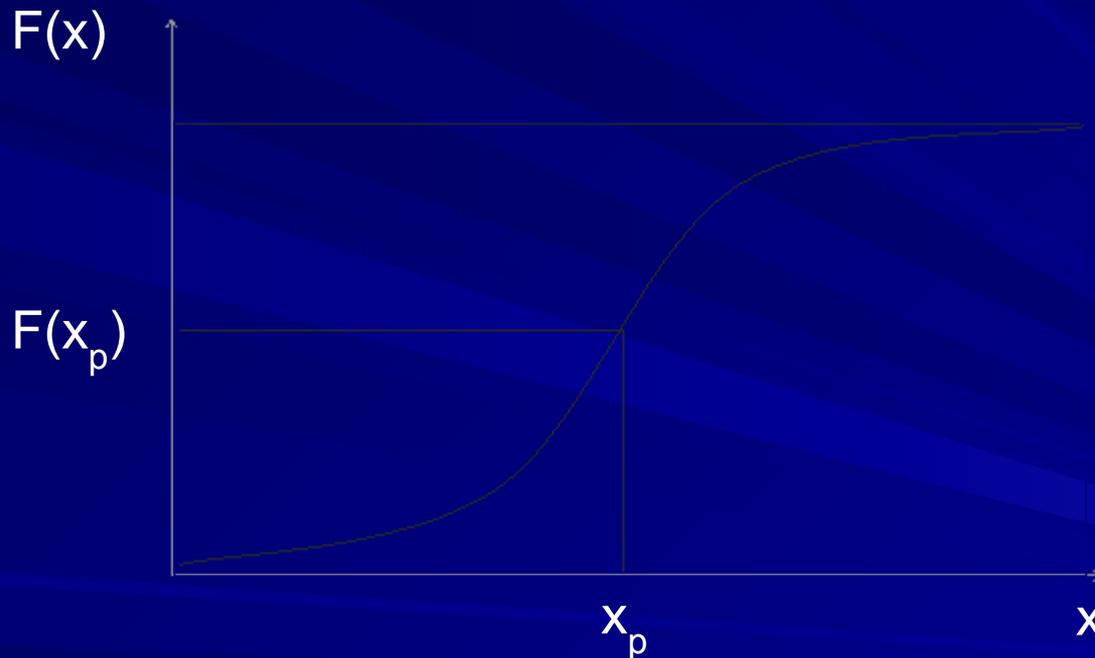
Показатели формы

- Асимметрия $\frac{M[\xi - M(\xi)]^3}{[D(\xi)]^{3/2}} \quad A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$
- Эксцесс $\frac{M[\xi - M(\xi)]^4}{[D(\xi)]^2} \quad E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$
- Моменты $\mu_k = M[(X - M(X))^k]$

Квантиль

- Квантилью уровня α (или α – квантилью) непрерывной случайной величины ξ , имеющей непрерывную функцию распределения $F(x)$, называется значение X_α для которого
- $P(\xi < X_\alpha) = \alpha$
Часто встречающиеся в практике квантили.
- Медиана - квантиль, соответствующая значению $\alpha = 0,5$
- Верхняя квартиль – квантиль, соответствующий значению $\alpha = 0,75$
- Нижняя квартиль – квантиль, соответствующий значению $\alpha = 0,25$
- Децили – квантили уровней $0,1; 0,2; \dots, 0,9$.

Квантиль X_α случайной величины, имеющей функцию распределения $F(x)$



Примеры решения прямой задачи в EXCEL

- Для нормального закона распределения,

$$\text{=НОРМСТРАСП}(1.96) = 0.975002$$

$$\text{=НОРМСТРАСП}(-1.96) = 0.024998$$

- Для распределения Стьюдента

$$\text{=СТЮЮДРАСП}(1.96;100;1) = 0.026389$$

$$\text{=СТЮЮДРАСП}(1.96;200;1) = 0.025692$$

1.96 – заданное значение X,

100,200 – число степеней свободы,

1 - односторонний интервал

Примеры решения обратной задачи в EXCEL

- Для нормального закона распределения по заданной вероятности найдем квантиль

$$=\text{НОРМСТОБР}(0.025) = -1.96$$

$$=\text{НОРМСТОБР}(0.975) = 1.96$$

- Решение обратной задачи для распределения Стьюдента

$$=\text{СТЮДРАСПОБР}(0.05;500) = 1.96472$$

Соответствует P= 0.975

$$=\text{СТЮДРАСПОБР}(0.01;500) = 2.585698$$

Соответствует P= 0.995

**Спасибо
за
Внимание !!!**

**Предела
для СОВЕРШЕНСТВА нет
!!!**