

ФГБОУ ВО «ГГУ»

# БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Преподаватель Е.М. Суходолова

# Отношения

- Отношение – это одна из форм всеобщей взаимосвязи всех предметов, явлений, процессов в природе, обществе и мышлении. Спектр отношений на множествах многоаспектен, начиная с определения понятия множества, аксиоматики и заканчивая разбором парадоксов. Различных отношений на множестве бесконечно. Но, когда говорят об бинарных отношениях, то подразумевают отношения между **двумя** величинами, объектами, высказываниями.

- Бинарные отношения уже встречались в школьном курсе математики. Примерами таких отношений являются отношения неравенства, равенства, подобия, параллельности, делимости и пр. Бинарное отношение каждому двум объектам сопоставляет логическое значение "да", если объекты находятся в этом отношении, и "нет" в ином случае. Другими словами, множество пар объектов разбивается на два подмножества, пары первого подмножества находятся в данном отношении, а второго - не находятся. Это свойство можно положить в основу определения бинарного отношения.

# Определение

Пусть задано множество  $M$ . Рассмотрим декартово произведение этого множества на себя  $M \times M$ .

# Определение

Пусть задано множество  $M$ . Рассмотрим декартово произведение этого множества на себя  $M \times M$ .

- *Подмножество  $R$  множества  $M \times M$  называется бинарным отношением  $R$  на множестве  $M$ . Если пара  $(x; y)$  принадлежит множеству  $R$ , говорят, что элемент  $x$  находится в отношении  $R$  с элементом  $y$ , и записывают  $xRy$ .*

# Пример 1.

- *Введем отношение сравнимости  $R$ :  $x$  сравнимо с  $y$  по модулю  $m$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  имеют одинаковые остатки от деления на  $m$ . То есть  $x = y \pmod{m}$ .*

# Пример 1.

- *Введем отношение сравнимости  $R$ :  $x$  сравнимо с  $y$  по модулю  $t$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  имеют одинаковые остатки от деления на  $t$ . То есть  $x = y \pmod{t}$ .*
- Рассмотрим введенное отношение  $R$  для случая  $t = 3$  на множестве  $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ , тогда  $M \times M$

# Пример 1.

- Введем отношение сравнимости  $R$ :  $x$  сравнимо с  $y$  по модулю  $m$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  имеют одинаковые остатки от деления на  $m$ . То есть  $x = y \pmod{m}$ .
- Рассмотрим введенное отношение  $R$  для случая  $m = 3$  на множестве  $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ , тогда  $M \times M$

(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2; 4)	(2;5)	(2; 6);
(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6);
(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4; 4)	(4;5)	(4; 6);
(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5; 4)	(5;5)	(5; 6);
(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6; 4)	(6;5)	(6; 6)



# Пример 2.

- На множестве  $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  задано отношение делимости:  $xRy$  тогда и только тогда, когда  $x$  делится на  $y$ . Сколько пар содержит это отношение? Перечислите эти пары.

# Пример 3.

- Введем на множестве  $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  отношение взаимной простоты, т. е.  $xRy$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  взаимно просты:  $D(x;y) = 1$ . Сколько пар содержит это отношение? Перечислите эти пары.

# Бинарные отношения

Рефлексивность: рефлексивные,  
нерефлексивные,  
антирефлексивные

Симметричность: симметричные,  
несимметричные,  
асимметричные,  
антисимметричные

Транзитивность: транзитивные,  
нетранзитивные,  
антитранзитивные

# Рефлексивность

□ Определение 1. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **рефлексивным**, если *каждый элемент этого множества находится в отношении с самим собой*:  $xRx \quad \forall x \in M$ .

# Рефлексивность

- Определение 1. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **рефлексивным**, если *каждый элемент этого множества находится в отношении с самим собой*:  $xRx \quad \forall x \in M$ .
- Пример.
  - 1. Отношение сравнимости рефлексивно (при любом натуральном  $t$  и на любом множестве целых чисел).
  - 2. Отношение строгого неравенства на множестве вещественных чисел не рефлексивно.
  - 3. Отношение делимости рефлексивно (на любом множестве целых чисел, не содержащем нуля).

# Рефлексивность



- Определение. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **антирефлексивным**, если *ни один элемент этого множества не находится в отношении с самим собой*:  $\forall x \in M$  неверно, что  $xRx$ .

# Рефлексивность



- Определение. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **антирефлексивным**, если ни один элемент этого множества не находится в отношении с самим собой:  $\forall x \in M$  неверно, что  $xRx$ .
- Пример.
  1. Отношение строгого неравенства на множестве вещественных чисел антирефлексивно.
  2. Отношение взаимной простоты антирефлексивно на любом множестве целых чисел, не содержащем 1 и  $-1$ ;
- рефлексивно на множествах  $\{1\}, \{-1\}, \{-1; 1\}$
- и не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным в ином случае.

# Симметричность

- Определение. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **симметричным**, если вместе с каждой парой  $(x; y)$  в отношение входит и симметричная пара  $(y; x)$ :  $\forall x, y \in M \quad xRy = yRx$ .



# Симметричность

- Определение. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **симметричным**, если вместе с каждой парой  $(x; y)$  в отношение входит и симметричная пара  $(y; x)$ :  $\forall x, y \in M \quad xRy = yRx$ .
- Пример.
  1. Отношение сравнимости симметрично при любом натуральном  $m$  и на любом множестве целых чисел.
  2. Отношение строгого неравенства на множестве вещественных чисел не симметрично.
  3. Отношение взаимной простоты симметрично на любом множестве целых чисел.

# Симметричность

- Определение . Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **асимметричным**, если ни одна пара не входит в отношение вместе с симметричной ей:  $\forall x, y \in M$ , если  $xRy$ , то неверно, что  $yRx$ .
- Пример.
  1. Отношение строгого неравенства на множестве вещественных чисел асимметрично.
  2. Отношение делимости не является асимметричным ни на каком множестве целых чисел, не содержащем нуля.

# Симметричность



□ Определение. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **антисимметричным**, если *никакая пара, состоящая из разных элементов, не входит в отношение вместе с симметричной ей*:  $\forall x, y \in M$ , если  $xRy$  и  $yRx$ , то  $x = y$ .

# Симметричность



- Определение. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **антисимметричным**, если *никакая пара, состоящая из разных элементов, не входит в отношение вместе с симметричной ей*:  $\forall x, y \in M$ , если  $xRy$  и  $yRx$ , то  $x = y$ .
- Пример.
  1. Отношение нестрогого неравенства на множестве вещественных чисел антисимметрично.
  2. Отношение делимости является антисимметричным на любом множестве целых

# Транзитивность



□ Определение. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **транзитивным**, если вместе с парами  $(x; y)$  и  $(y; z)$  в отношение входит и пара  $(x, z)$ , т. е.  $\forall x, y, z \in M$ , если  $xRy$  и  $yRz$ , то  $xRz$ .

□ Замечание . Свойство транзитивности хорошо иллюстрируется отношением достижимости: если пункт  $y$  достижим из пункта  $x$ , а из пункт  $z$  - из пункта  $y$ , то пункт  $z$  достижим из пункта  $x$ .

# Транзитивность



- Определение. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $M$  называется **транзитивным**, если вместе с парами  $(x; y)$  и  $(y; z)$  в отношение входит и пара  $(x, z)$ , т. е.  $\forall x, y, z \in M$ , если  $xRy$  и  $yRz$ , то  $xRz$ .
- Пример 1. Отношение сравнимости транзитивно при любом натуральном  $m$  и на любом множестве целых чисел.
- 2. Отношение строгого (нестрогого) неравенства транзитивно на любом подмножестве вещественных чисел.
- 3. Отношение взаимной простоты не является транзитивным на любом множестве целых чисел. Например, 2 взаимно просто с 3; 3 взаимно просто с 4, но 2 и 4 не взаимно просты.

# Бинарные отношения



# Контрольные вопросы:

1. Что понимается под соответствием между множествами?
2. Какое отношение называется бинарным?
3. Какое бинарное отношение называется рефлексивным? Приведите пример.
4. Какое бинарное отношение называется антирефлексивным? Приведите пример.
5. Какое бинарное отношение называется симметричным? Приведите пример.
6. Какое бинарное отношение называется асимметричным? Приведите пример.
7. Какое бинарное отношение называется антисимметричным? Приведите пример.
8. Какое бинарное отношение называется транзитивным? Приведите пример.