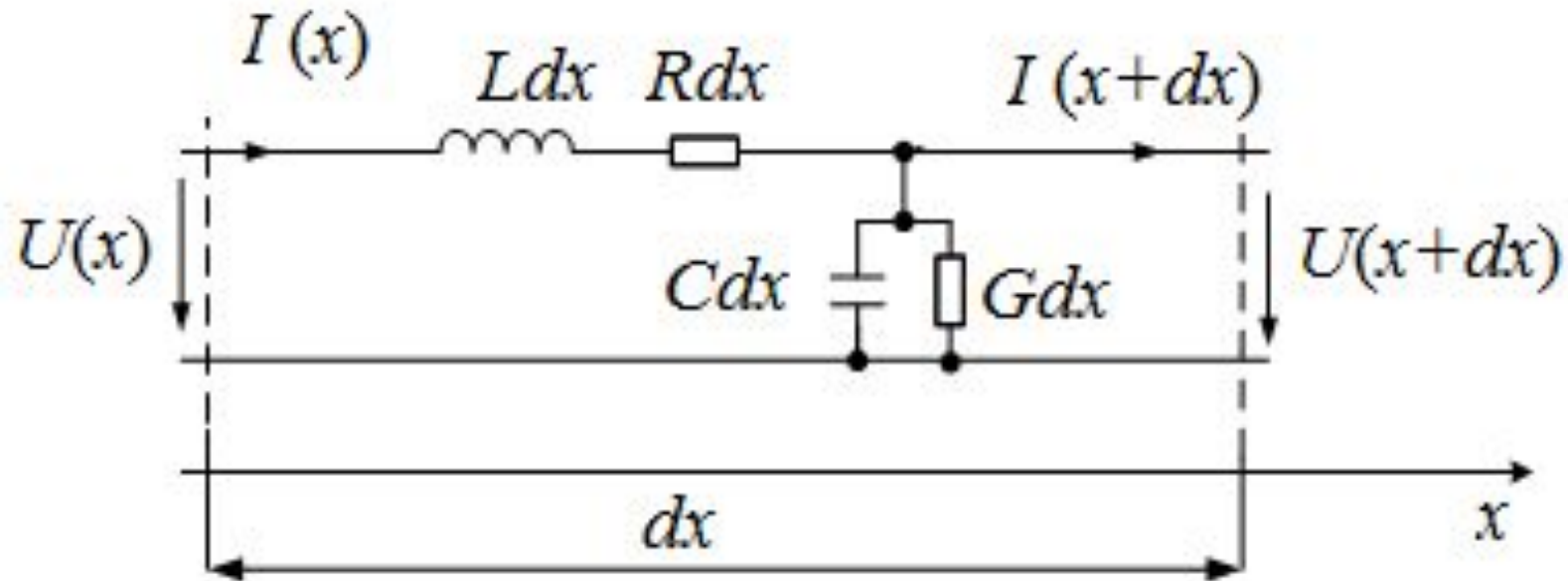


Теория распределенной линии передачи



Эквивалентная схема отрезка линии передачи

Уравнения, полученные по правилу Кирхгофа

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x + dx) - U(x) = -Ldx \frac{\partial I(x)}{\partial t} - RdxI; \\ I(x + dx) - I(x) = -Cdx \frac{\partial U(x)}{\partial t} - GdxU. \end{array} \right.$$

Основные предположения

$$U(x, t) = U(x)e^{j\omega t}, \quad I(x, t) = I(x)e^{j\omega t}$$

где ω — круговая частота гармонического сигнала или рассматриваемая гармоническая составляющая периодического сигнала; j — комплексная единица.

Дифференциальные уравнения

Разделив левую и правую части каждого из уравнений системы на dx , мы получим телеграфные уравнения. Одновременно с этим упорядочим запись слагаемых в уравнениях так, чтобы она соответствовала дальнейшему переходу к матричной форме телеграфных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dx} = -(j\omega L + R)I; \\ \frac{dI}{dx} = -(j\omega C + G)U. \end{array} \right.$$

Дифференциальные уравнения

Продифференцируем уравнения системы по x :

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dx^2} = -(j\omega L + R) \frac{dI}{dx}; \\ \frac{d^2 I}{dx^2} = -(j\omega C + G_{11}) \frac{dU}{dx}. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения

Подставим в полученные уравнения первые производные из системы. В результате получим систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2}{dx^2}U = ZYU; \quad (*)$$

$$Z = j\omega L + R, \quad Y = j\omega C + G.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}I = YZI. \quad (**)$$

Решение дифференциальных уравнений

Будем искать решение (*) и (*) в таком общем виде:

$$U = Ae^{\gamma x}, \quad I = Be^{\gamma x}, \quad \text{где } \gamma = \sqrt{ZY}.$$

Комплексное сопротивление Z и проводимость Y находятся из формул:

$$Z = j\omega L + R, \quad Y = j\omega C + G.$$

Решение дифференциальных уравнений

Решение для напряжений и токов без учета внешнего воздействия:

$$U(x) = A_{\Pi} e^{-\gamma x} + A_{\text{O}} e^{\gamma x},$$

$$I(x) = B_{\Pi} e^{-\gamma x} + B_{\text{O}} e^{\gamma x}.$$

Дифференцируя первое уравнение по x и используя связь напряжения и тока, получаем:

Решение дифференциальных уравнений

Дифференцируя первое уравнение по x и используя связь напряжения и тока, получаем:

$$I(x) = (A_{\Pi} e^{-\gamma x} - A_{\text{O}} e^{\gamma x}) \gamma / (j\omega L + R)$$

Отсюда получаем формулу для волнового сопротивления линии передачи:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}} = \frac{j\omega L + R}{\gamma}.$$

Решение дифференциальных уравнений

Итак, напряжение и ток находятся из системы:

$$U(x) = A_{\Pi} e^{-\gamma x} + A_0 e^{\gamma x},$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0} \left(A_{\Pi} e^{-\gamma x} - A_0 e^{\gamma x} \right).$$

Решение дифференциальных уравнений

Подставим $\gamma = \alpha + j\beta$ в уравнения тока и напряжения, и получим.

$$U = A_{\Pi} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_{\circ} e^{\alpha x} e^{j\beta x},$$

$$I = \frac{1}{Z_B} (A_{\Pi} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} - A_{\circ} e^{\alpha x} e^{j\beta x}).$$

Мгновенное значение напряжения в точке x равно мнимой части выражения $\sqrt{2} U e^{-j\omega t}$.

$$U(x, t) = \text{Im}(\sqrt{2} \times A_{\Pi} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{-j\omega t} + \sqrt{2} \times A_{\circ} e^{\alpha x} e^{j\beta x} e^{j\omega t}) = \\ \sqrt{2} |A_{\Pi}| e^{-\alpha x} \times \sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x) + \sqrt{2} |A_{\circ}| e^{\alpha x} \times \\ \times \sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x),$$

Величины φ_1 и φ_2 – аргументы комплексных величин A_{Π} и A_{\circ} .

Анализ волн в линиях передачи

Таким образом, мгновенное значение напряжения в любой точке линии складывается из двух функций. Если считать момент времени t фиксированным и рассматривать изменение мгновенного напряжения вдоль линии от координаты x , то получим затухающую гармоническую волну напряжения, амплитуда, которой убывает с ростом координаты x , т.е. по мере удаления от начала линии к концу.

Величина α – коэффициент затухания, характеризует изменение амплитуды волны на единицу длины линии; величина β – коэффициент фазы, характеризует изменение фазы на единицу длины линии.

Анализ волн в линиях передачи

Расстояние между двумя точками линии, в которых фазы рассматриваемой слагающей напряжения различаются на 2π , обозначается λ и называется длиной волны напряжения.

$$(\omega t + \varphi_1 - \beta x) - (\omega t + \varphi_1 - \beta(x + \lambda)) = 2\pi$$

Откуда длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, а коэффициент фазы $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Электромагнитная волна, перемещающаяся от начала линии к концу носит название прямой (падающей) волной. Скорость перемещения падающей волны вдоль линии называется фазовой скоростью волны — v_γ , которая определяется как скорость перемещения точки, фаза колебания в которой остается постоянной.

Анализ волн в линиях передачи

Это условие записывается для прямой волны в виде.

$$\omega t + \varphi_1 - \beta x = \text{const} , \text{ тогда } \frac{d}{dt}(\omega t + \varphi_1 - \beta x) = 0 .$$

Следовательно фазовая скорость будет $\frac{dx}{dt} = v_{\gamma} = \frac{\omega}{\beta}$,

Аналогичное исследование второго слагаемого выражения показывает, что для произвольного момента времени она представляет синусоидальную волну, амплитуда которой $\sqrt{2}|A_0|e^{\alpha x}$ возрастает с уменьшением координаты, т.е. от конца к началу отрезка линии передачи.

Электромагнитная волна, которая перемещается от конца линии к ее началу, называется обратной (отраженной) волной.

Анализ волн в линиях передачи

Итак, мгновенное напряжение можно рассматривать как сумму двух волн, движущихся в противоположных направлениях, причем каждая затухает в направлении движения.

Рассмотрим связь величин, характеризующих распространение волн:

β Запишем выражения для напряжения и тока в линии в виде:

$$U = U_{\Pi} + U_o ,$$

$$I = (U_{\Pi}/Z_0) - (U_o/Z_0) = I_{\Pi} - I_o$$

За время равное периоду, как падающая, так и отраженная волна перемещаются на расстояние, равное длине волны.

Запишем выражения для напряжения и тока в линии в виде:

$$U = U_{\Pi} + U_o ,$$

$$I = (U_{\Pi}/Z_0) - (U_o/Z_0) = I_{\Pi} - I_o$$

Анализ волн в линиях передачи

Напряжение и ток прямой и обратной волн связаны законом Ома.

$$U_{\text{п}}/I_{\text{п}} = U_{\text{о}}/I_{\text{о}} = Z_0$$

Это соотношение объясняет смысл названия Z_0 – волновое сопротивление. Амплитуды напряжений $A_{\text{п}}$ и $A_{\text{о}}$ находятся в зависимости от напряжения и тока в начале линии (граничные условия), если они заданы.

$$\text{При } x = 0, U(0) = U_1 = A_{\text{п}} + A_{\text{о}},$$

$$Z_0 I(0) = Z_0 I_1 = A_{\text{п}} - A_{\text{о}},$$

$$\text{откуда: } A_{\text{п}} = \frac{U_1 + Z_0 I_1}{2}, \quad A_{\text{о}} = \frac{U_1 - Z_0 I_1}{2},$$

Коэффициент отражения

Введем понятие коэффициента отражения волны в начале линии.

$$\Gamma_1 = \frac{U_o(0)}{U_n(0)} = \frac{A_o}{A_n} = \frac{U_1 - Z_0 I_1}{U_1 + Z_0 I_1} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0},$$

где: $Z_1 = U_1 / I_1$ – входное сопротивление линии.

Аналогично, если заданы граничные условия в конце линии, то удобнее отсчитывать расстояние от конца линии, приняв координату $(l - x)$.

Заменяя в уравнениях координату x на $(l - x)$ и используя заданные

граничные условия: $U(l) = U_2$; $I(l) = I_2$, получаем выражения

для A_n и A_o

Коэффициент отражения

При $x = l$, $U(l) = U_2 = A_{\text{п}} + A_{\text{о}}$,

$$Z_0 I(l) = Z_0 I_2 = A_{\text{п}} - A_{\text{о}},$$

$$A_{\text{п}} = \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2} e^{\gamma l}, \quad A_{\text{о}} = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2} e^{-\gamma l},$$

аналогично предыдущему: $\Gamma_2 = \frac{U_{\text{о}}(l)}{U_{\text{п}}(l)} = \frac{A_{\text{о}}}{A_{\text{п}}} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$,

где: $Z_2 = U_2 / I_2$ – сопротивление на конце линии.

Таким образом, коэффициент отражения Γ равен отношению напряжений отраженной и падающей волн.

По линии передается энергия электромагнитной волны, потому квадрат коэффициента отражения $\Gamma^2 = U_{\text{о}}^2 / U_{\text{п}}^2$ дает отношение мощностей

Волновые свойства при отражении волн

При коэффициенте отражения не равном нулю $\Gamma \neq 0$ в линии устанавливается режим стоячих волн, и образуются узлы и пучности, т.е. точки, в которых напряжения и токи максимальны. Узлы напряжения совпадают с пучностями тока, а пучности напряжения совпадают с узлами тока. В пучности напряжение достигает максимальной величины U_{max} , а ток минимальной, а в узле напряжение достигает минимальной U_{min} величины, а ток максимальной. Отношение напряжения в пучности напряжения к напряжению в узле называется коэффициентом стоячей волны напряжения и обозначается $K_{СВН} = \frac{U_{max}}{U_{min}}$.

Потери энергии при рассогласовании

Если сопротивление нагрузки $Z_H = Z_B$ равно волновому сопротивлению линии, то коэффициент отражения в линии равен $\Gamma = 0$, а КСВН = 1. При этом в линии имеется только одна прямая волна, а обратная волна отсутствует. Это важное свойство реализуется в линиях связи, отражения в которых не желательны потому, что отражения связаны с потерей энергии в сопротивлении R и проводимости G . При этом если сопротивление источника питающего линию не равно волновому сопротивлению линии, то отраженная волна, достигшая начала линии, претерпевает повторное отражение и идет дополнительная потеря энергии.

Согласованная передача энергии

Происходящая вследствие этого потеря энергии снижает общий КПД линии передачи. Поэтому для передачи по линии электромагнитной энергии без потерь необходимо выполнить условие $Z_{\Gamma} = Z_0 = Z_H$.

При согласовании нагрузки с линией, выражения U и I упрощаются, с учетом того, что $Z_0 I_2 = U_2$.

$$U = U_2 e^{\gamma x} ; I = I_2 e^{\gamma x} ,$$

Эти выражения показывают, что при перемещении точки наблюдения вдоль линии, нагруженной согласовано на конце в направлении от конца к началу линии, модуль напряжения возрастает в $e^{\alpha x}$ раз, а фаза – на βx .

Характеристические параметры

Характеристическими параметрами линии являются коэффициент затухания α и коэффициент фазы β и волновое сопротивление Z_0 , которые в свою очередь выражаются через параметры линии и частоту.

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{RG - \omega^2 LC + j\omega(LG + CR)} = \alpha + j\beta,$$

из выражения следует, что:

$$\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 = RG - \omega^2 LC + j\omega(LG + CR), \text{ откуда:}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC ; 2\alpha\beta = \omega LG + \omega CR ,$$

Совместное решение этих уравнений дает значения α и β .

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right) (RG - \omega^2 LC + (R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2))},$$

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right) (\omega^2 LC - RG + (R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2))}$$