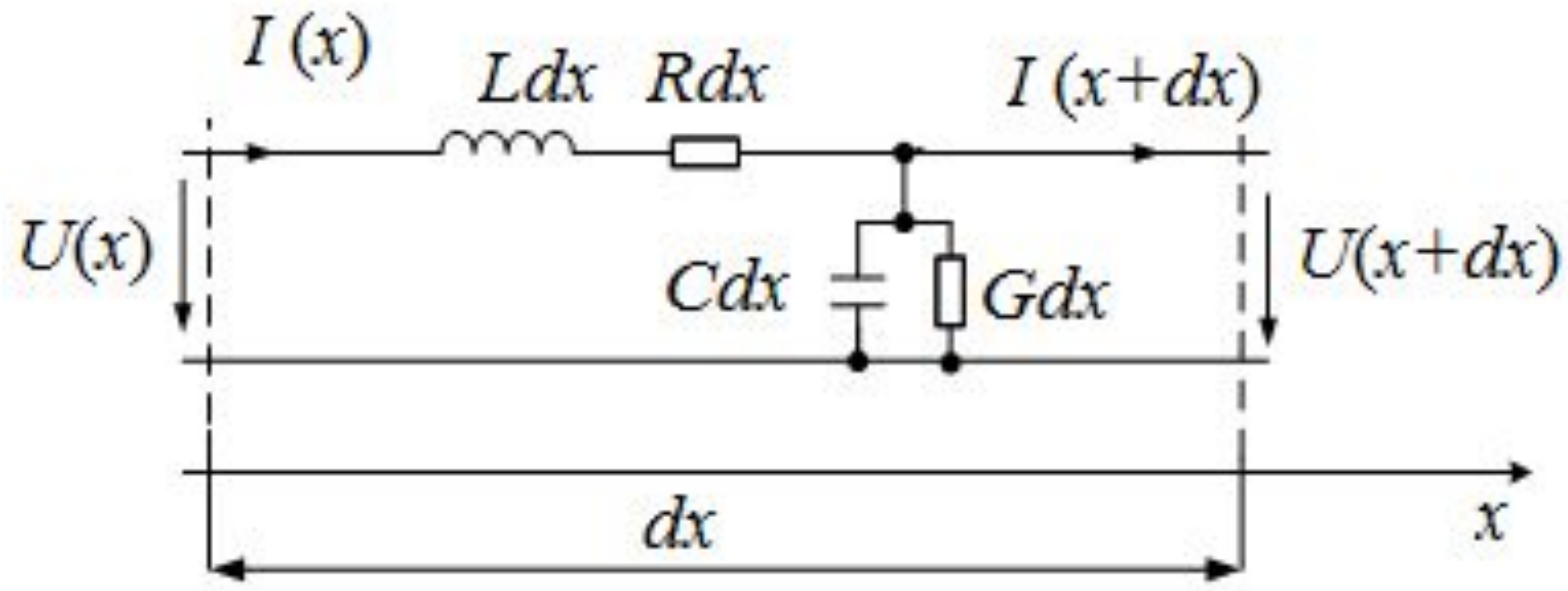
Теория распределенной линии передачи



Эквивалентная схема отрезка линии передачи

Уравнения, полученные по правилу Кирхгофа

$$\begin{cases} U(x+dx)-U(x)=-Ldx\dfrac{\partial I(x)}{\partial t}-RdxI; \\ I(x+dx)-I(x)=-Cdx\dfrac{\partial U(x)}{\partial t}-GdxU. \end{cases}$$

Основные предположения

$$U(x,t) = U(x)e^{j\omega t}, \quad I(x,t) = I(x)e^{j\omega t}$$

где ω — круговая частота гармонического сигнала или рассматриваемая гармоническая составляющая периодического сигнала; j — комплексная единица.

Дифференциальные уравнения

Разделив левую и правую части каждого из уравнений системы на dx, мы получим телеграфные уравнения. Одновременно с этим упорядочим запись слагаемых в уравнениях так, чтобы она соответствовала дальнейшему переходу к матричной форме телеграфных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dx} = -\left(j\omega L + R\right) I; \\ \\ \dfrac{dI}{dx} = -\left(j\omega C + G\right) U. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения

Продифференцируем уравнения системы по x :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{dx^2} = -\left(j\omega L + R\right)\dfrac{dI}{dx}; \\ \\ \dfrac{d^2I}{dx^2} = -\left(j\omega C + G_{11}\right)\dfrac{dU}{dx}. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения

Подставим в полученные уравнения первые производные из системы. В результате получим систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2}{dx^2}U = ZYU; \quad (*)$$

$$Z = j\omega L + R, \; Y = j\omega C + G.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}I = YZI. \quad (**)$$

Решение дифференциальных уравнений

Будем искать решение (*) и (*) в таком общем виде:

$$U = Ae^{\gamma x},\ \ I = Be^{\gamma x},\ \text{где}\ \gamma = \sqrt{ZY}.$$

Комплексное сопротивление *Z* и проводимость *Y* находятся из формул:

$$Z = j\omega L + R,\ \ Y = j\omega C + G.$$

Решение дифференциальных уравнений

Решение для напряжений и токов без учета внешнего воздействия:

$$U(x) = A_{\text{п}} e^{-\gamma x} + A_{\text{о}} e^{\gamma x},$$

$$I(x) = B_{\text{п}} e^{-\gamma x} + B_{\text{о}} e^{\gamma x}.$$

Дифференциируя первое уравнение по x и используя связь напряжения и тока, получаем:

Решение дифференциальных уравнений

Дифференциируя первое уравнение по x и используя связь напряжения и тока, получаем:

$$I(x) = (A_{\text{п}} e^{-\gamma x} - A_{\text{о}} e^{\gamma x})\gamma / (j\omega L + R)$$

Отсюда получаем формулу для волнового сопротивления линии передачи:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}} = \frac{j\omega L + R}{\gamma}.$$

Решение дифференциальных уравнений

Итак, напряжение и ток находятся из системы:

$$U(x) = A_{\text{п}} e^{-\gamma x} + A_{\text{о}} e^{\gamma x},$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}\left(A_{\text{п}} e^{-\gamma x} - A_{\text{о}} e^{\gamma x} \right).$$

Решение дифференциальных уравнений

Подставим $\gamma = \alpha + j\beta$ в уравнения тока и напряжения, и получим.

$$U = A_{\text{п}} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_{\text{о}} e^{\alpha x} e^{j\beta x} ,$$

$$I = \frac{1}{Z_B}\left(A_{\text{п}} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} - A_{\text{о}} e^{\alpha x} e^{j\beta x}\right).$$

Мгновенное значение напряжения в точке x равно мнимой части выражения $\sqrt{2} U e^{-j\omega t}$.

$$U(x,t) = Im\left(\sqrt{2} \times A_{\text{п}} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{-j\omega t} + \sqrt{2} \times A_{\text{о}} e^{\alpha x} e^{j\beta x} e^{j\omega t}\right) =$$

$$\sqrt{2}|A_{\text{п}}| e^{-\alpha x} \times \sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x) + \sqrt{2}|A_{\text{о}}| e^{\alpha x} \times$$

$$\times \sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x) ,$$

Величины φ_1 и φ_2 – аргументы комплексных величин $A_{\text{п}}$ и $A_{\text{о}}$.

Анализ волн в линиях передачи

Таким образом, мгновенное значение напряжения в любой точке линии слагается из двух функций. Если считать момент времени t фиксированным и рассматривать изменение мгновенного напряжения вдоль линии от координаты x, то получим затухающую гармоническую волну напряжения, амплитуда, которой убывает с ростом координаты x, т.е. по мере удаления от начала линии к концу.

Величина α – коэффициент затухания, характеризует изменение амплитуды волны на единицу длины линии; величина β – коэффициент фазы, характеризует изменение фазы на единицу длины линии.

Анализ волн в линиях передачи

Расстояние между двумя точками линии, в которых фазы рассматриваемой слагающей напряжения различаются на 2π, обозначается λ и называется длиной волны напряжения.

$$(\omega t + \varphi_1 - \beta x) - (\omega t + \varphi_1 - \beta(x + \lambda) = 2\pi$$

Откуда длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, а коэффициент фазы $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Электромагнитная волна, перемещающаяся от начала линии к концу носит название прямой (падающей) волной. Скорость перемещения падающей волны вдоль линии называется фазовой скоростью волны – ν_γ, которая определяется как скорость перемещения точки, фаза колебания в которой остается постоянной.

Анализ волн в линиях передачи

Это условие записывается для прямой волны в виде.

$\omega t + \varphi_1 - \beta x = const$, тогда $\frac{d}{dt}(\omega t + \varphi_1 - \beta x) = 0$.

Следовательно фазовая скорость будет $\frac{dx}{dt} = \nu_\gamma = \frac{\omega}{\beta}$,

Аналогичное исследование второго слагаемого выражения показывает, что для произвольного момента времени она представляет синусоидальную волну, амплитуда которой $\sqrt{2}|A_o|e^{\alpha x}$ взрастает с уменьшением координаты, т.е. от конца к началу отрезка линии передачи. Электромагнитная волна, которая перемещается от конца линии к ее началу, называется обратной (отраженной) волной.

Анализ волн в линиях передачи

Итак, мгновенное напряжение можно рассматривать как сумму двух волн, движущихся в противоположных направлениях, причем каждая затухает в направлении движения.

Рассмотрим связь величин, характеризующих распространение волн:

β Запишем выражения для напряжения и тока в линии в виде:

$$U = U_{\text{п}} + U_o \,,$$

$$I = (U_{\text{п}}/Z_0) - (U_o/Z_0) = I_{\text{п}} - I_o$$

За время равное периоду, как падающая, так и отраженная волна перемещаются на расстояние,равное длине волны.

Запишем выражения для напряжения и тока в линии в виде:

$$U = U_{\text{п}} + U_o \,,$$

$$I = (U_{\text{п}}/Z_0) - (U_o/Z_0) = I_{\text{п}} - I_o$$

Анализ волн в линиях передачи

Напряжение и ток прямой и обратной волн связаны законом Ома.

$$U_п/I_п = U_o/I_o = Z_0$$

Это соотношение объясняет смысл названия Z_0 – волновое сопротивление. Амплитуды напряжений $A_п$ и $A_о$ находятся в зависимости от напряжения и тока в начале линии (граничные условия), если они заданы.

$$\text{При } x = 0\,,\ U(0) = U_1 = A_п + A_о\,,$$

$$Z_0 I(0) = Z_0 I_1 = A_п - A_о\,,$$

$$\text{откуда: } A_п = \frac{U_1 + Z_0 I_1}{2},\ A_о = \frac{U_1 - Z_0 I_1}{2}\,,$$

Коэффициент отражения

Введем понятие коэффициента отражения волны в начале линии.

$$\Gamma_1 = \frac{U_o(0)}{U_п(0)} = \frac{A_о}{A_п} = \frac{U_1 - Z_0 I_1}{U_1 + Z_0 I_1} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0},$$

где: $Z_1 = U_1 / I_1$ – входное сопротивление линии.

Аналогично, если заданы граничные условия в конце линии, то удобнее отсчитывать расстояние от конца линии, приняв координату $(l - x)$.

Заменяя в уравнениях координату x на $(l - x)$ и используя заданные граничные условия: $U(l) = U_2$; $I(l) = I_2$, получаем выражения для $A_п$ и $A_о$

Коэффициент отражения

При $x = l$, $U(l) = U_2 = A_п + A_о$,

$$Z_0 I(l) = Z_0 I_2 = A_п + A_о ,$$

$$A_п = \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2} e^{\gamma l} ,\ A_о = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2} e^{-\gamma l},$$

аналогично предыдущему: $\Gamma_2 = \frac{U_о(l)}{U_п(l)} = \frac{A_о}{A_п} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$,

где: $Z_2 = U_2 / I_2$ – сопротивление на конце линии.

Таким образом, коэффициент отражения Г равен отношению напряжений отраженной и падающей волн.

По линии передается энергия электромагнитной волны, потому квадрат коэффициента отражения $\Gamma^2 = U_o^2 / U_п^2$ дает отношение мощностей

Волновые свойства при отражении волн

При коэффициенте отражения не равном нулю $\Gamma \neq 0$ в линии устанавливается режим стоячих волн, и образуются узлы и пучности, т.е. точки, в которых напряжения и токи максимальны. Узлы напряжения совпадают с пучностями тока, а пучности напряжения совпадают с узлами тока. В пучности напряжение достигает максимальной величины U_{max}, а ток минимальной, а в узле напряжение достигает минимальной U_{min}величины, а ток максимальной. Отношение напряжения в пучности напряжения к напряжению в узле называется коэффициентом стоячей волны напряжения и обозначается КСВН $= \frac{U_{max}}{U_{min}}$.

Потери энергии при рассогласовании

Если сопротивление нагрузки $Z_н = Z_B$ равно волновому сопротивлению линии, то коэффициент отражения в линии равен $\Gamma = 0$, а КСВН = 1. При этом в линии имеется только одна прямая волна, а обратная волна отсутствует. Это важное свойство реализуется в линиях связи, отражения в которых не желательны потому, что отражения связаны с потерей энергии в сопротивлении R и проводимости G. При этом если сопротивление источника питающего линию не равно волновому сопротивлению линии, то отраженная волна, достигшая начала линии, претерпевает повторное отражение и идет дополнительная потеря энергии.

Согласованная передача энергии

Происходящая вследствие этого потеря энергии снижает общий КПД линии передачи. Поэтому для передачи по линии электромагнитной энергии без потерь необходимо выполнить условие $Z_г = Z_0 = Z_н$.

При согласовании нагрузки с линией, выражения упрощаются, с учетом того, что $Z_0 I_2 = U_2$.

$$U = U_2 e^{\gamma x}\ ;\ I = I_2 e^{\gamma x}\ ,$$

Эти выражения показывают, что при перемещении точки наблюдения вдоль линии, нагруженной согласовано на конце в направлении от конца к началу линии, модуль напряжения возрастает в $e^{\alpha x}$ раз, а фаза – на βx.

Характеристические параметры

Характеристическими параметрами линии являются коэффициент затухания α и коэффициент фазы β и волновое сопротивление Z_0, которые в свою очередь выражаются через параметры линии и частоту.

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{RG - \omega^2 LC + j\omega(LG + CR)} = \alpha + j\beta,$$

из выражения следует, что:

$\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 = RG - \omega^2 LC + j\omega(LG + CR)$, откуда:

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC \; ; \; 2\alpha\beta = \omega LG + \omega CR \; ,$$

Совместное решение этих уравнений дает значения α и β.

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(RG - \omega^2 LC + (R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)\right)} \; ,$$

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\omega^2 LC - RG + (R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)\right)}$$