

Алгоритм исследования функции одного аргумента

1. Найти область определения функции
2. Установить тип функции
3. Найти точки разрыва функции и интервалы непрерывности
4. Установить характер точек разрыва функции
5. Найти и построить (пунктиром) асимптоты функции
6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Найти интервалы положительности и отрицательности функции
8. Найти интервалы монотонности функции
9. Найти интервалы выпуклости функции
10. Построить график функции



Анри Пуанкаре - выдающийся французский ученый, математик, физик, философ и астроном. Родился 29 апреля 1854 года. Анри Пуанкаре являлся членом более тридцати академий мира. Известен как один из создателей топологии, теории относительности.

Область определения функции, периодичность, чётность.

Область определения функции - множество точек оси OX , в которых аналитическое выражение $y = f(x)$ имеет смысл, т. е. переменная « y » принимает определённые конечные значения.

Если **функция периодическая**, т.е. удовлетворяет условию $f(x + T) = f(x)$, то можно найти период T и дальнейшие исследования и построение графика вести только на отрезке длиной T (если возможно, то с центром O), а затем периодически продолжить кривую на всю числовую ось OX .

Если **функция чётная**, т.е. $f(-x) = f(x)$, то исследование и построение графика можно провести при $x \geq 0$, а затем кривую симметрично относительно оси OY отобразить на отрицательную полуось OX при $x < 0$.

Если **функция нечётная**, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то исследование и построение графика можно провести при $x \geq 0$, а затем кривую симметрично относительно начала координат O отобразить на всю числовую ось OX .

Если **функция общего вида**, т. е. не является ни периодической, ни чётной, ни нечётной, то исследования проводятся на всей числовой оси, т.е. при $-\infty < x < +\infty$.

Условия монотонности и экстремумы функции

интервалы монотонности функции (*интервалы знакопостоянства первой производной*)

Границами этих множеств являются критические точки производной первого порядка, т. е. точки разрыва x_k , $k = \overline{1; p}$ производной, и её нули x_l , $f'(x_l) = 0$, $l = \overline{1; q}$, которые могут быть также точками минимума или максимума - точками экстремума функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) , который содержит критическую точку x_1 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ *меняет знак с “+” на “-”*, то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет *максимум*, а если *производная меняет знак с “-” на “+”*- то точке $x = x_1$ функция имеет *минимум*.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

РЕШЕНИЕ

Точками экстремума могут быть точки, в которых $y' = 0$ либо $y' = \infty$.

$$y' = (3x^4 - 2x^4 - 8x) / x^4 = (x^3 - 8) / x^3.$$

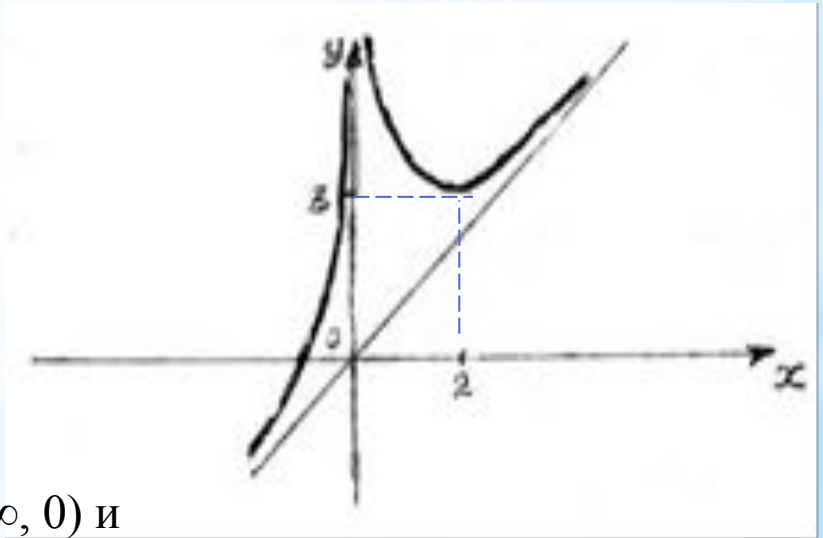
$$y' = 0 \text{ при } X=2; \quad y' = \infty \text{ при } X=0.$$

Имеем одну критическую точку $X=2$, так как $X=0$ не принадлежит области определения функции.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	∞	-	0	+
y	\nearrow	∞	\searrow	3	\nearrow

$$Y_{\min}(2)=3.$$

Функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2,+\infty)$, убывает на интервале $(0,2)$.



Интервалы выпуклости функции

(интервалы знакопостоянства второй производной).

Границами этих множеств являются критические точки производной второго порядка, т. е. точки разрыва второй производной $x_k, k = \overline{1; p}$, и её нули $x_l, f''(x_l) = 0, l = \overline{1; q}$, которые могут быть также точками перегиба графика функции.

Пример. Исследуем на экстремум функцию $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

РЕШЕНИЕ

Точками перегиба могут быть точки, в которых $y'' = 0$ либо $y'' = \infty$.

$$y' = (3x^4 - 2x^4 - 8x) / x^4 = (x^3 - 8) / x^3.$$

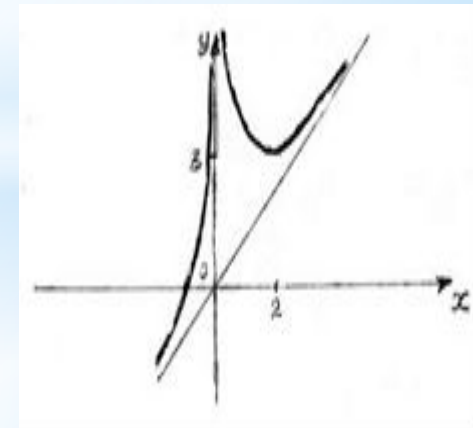
$$y'' = \left(\frac{x^3 - 8}{x^3} \right)' = \left(1 - \frac{8}{x^3} \right)' = (1 - 8x^{-3})' = \frac{24}{x^4}.$$

$$y'' \neq 0; \quad y'' = \infty \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Так как $x=0$ не принадлежит области определения функции, поэтому точек перегиба нет

Кривая всюду вогнута.

X	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	+	∞	+
y	∪	∞	∪



Никакой достоверности нет в том, что не имеет связи с математикой
Леонардо да Винчи

Невозможно управлять тем, что нельзя измерить
Эдвард Деминг

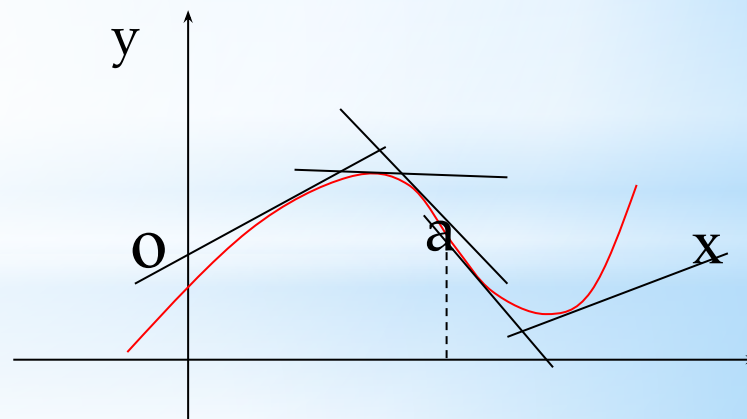
Точки перегиба.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

В точке перегиба касательная пересекает кривую.

Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$.

Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ функция $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба графика функции.



Асимптоты.

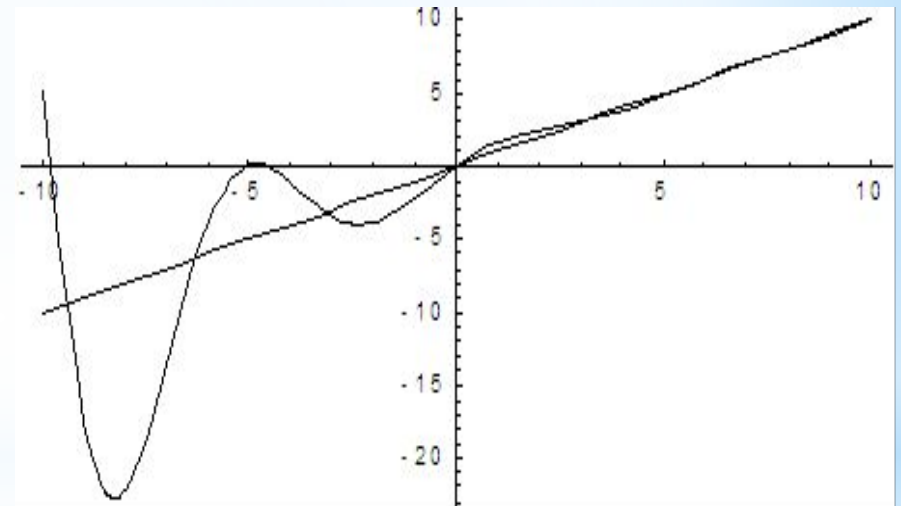
Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки x кривой $y = f(x)$ до этой прямой при удалении точки x в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту

Точка графика функции при неограниченном удалении от начала координат может неограниченно приближаться к своей асимптоте

Кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать её, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$

Её асимптотой является прямая
 $y = x$.



Вертикальные асимптоты

Если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

то прямая $x = a$ является асимптотой кривой $y = f(x)$.

Задач

Найти уравнения вертикальных асимптот функции

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

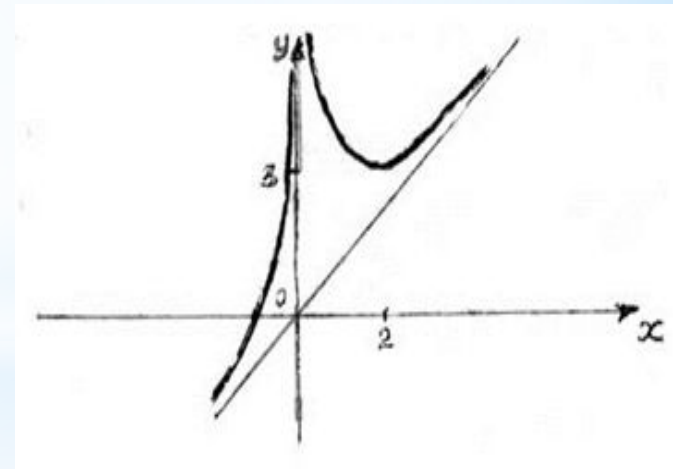
а. Данная функция существует всюду,

кроме точки $X=0$, т.е. на интервалах $(-\infty, 0)$

$(0, +\infty)$. Точка $X=0$ является точкой

разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 + 4}{x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3 + 4}{x^2} = +\infty$$



поэтому прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты

Наклонная асимптота имеет $y = kx + b$, где

уравнение
$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx].$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

Задач

а. Найти уравнения наклонных асимптот

графика функции $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

Решение

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{4}{x^3} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x^3} = 0.$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = x$.

