Алгоритм исследования функции одного аргумента

1. Найти область определения функции
2. Установить тип функции
3. Найти точки разрыва функции и интервалы непрерывности
4. Установить характер точек разрыва функции
5. Найти и построить (пунктиром) асимптоты функции
6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Найти интервалы положительности и отрицательности функции
8. Найти интервалы монотонности функции
9. Найти интервалы выпуклости функции
10. Построить график функции

.

Анри Пуанкаре - выдающийся французский ученый, математик, физик, философ и астроном. Родился 29апреля 1854 года. Анри Пуанкаре являлся *членом более тридцати академий мира.* Известен как один из создателей топологии, теории относительности.

Область определения функции, периодичность, чётность.

Область определения функции - множество точек оси ох, в которых аналитическое выражение $y = f(x)$ имеет смысл, т. е. переменная «у» принимает определённые конечные значения.

Если ***функция периодическая***, т.е. удовлетворяет условию $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$, то можно найти период Т и дальнейшие исследования и построение графика вести только на отрезке длинной Т (если возможно, то с центром О), а затем периодически продолжить кривую на всю числовую ось ОХ.

Если ***функция чётная***, т.е. $f(-x) = f(x)$, то исследование и построение графика можно провести при $x \geq 0$, а затем кривую симметрично относительно оси ОУ отобразить на отрицательную полуось ОХ при $x < 0$.

Если ***функция нечётная***, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то исследование и построение графика можно провести при $x \geq 0$, а затем кривую симметрично относительно начала координат О отобразить на всю числовую ось ОХ.

Если ***функция общего вида***, т. е. не является ни периодической, ни чётной, ни нечётной, то исследования проводятся на всей числовой оси, т.е. при $-\infty < x < +\infty$.

Условия монотонности и экстремумы функции

интервалы монотонности функции (*интервалы знакопостоянства первой производной*

Границами этих множеств являются критические точки производной первого порядка, т. е. точки разрыва x_k, $k = \overline{1;p}$ производной, и её нули x_l, $f'(x_l) = 0$, $l = \overline{1;q}$, которые могут быть также точками минимума или максимума - точками экстремума функции.

Пусть функция *f(x)* непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции ***f'(x) меняет знак с "+" на "-"***, то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет ***максимум***, а если ***производная меняет знак с "-" на "+"***- то точке $x = x_1$ функция имеет ***минимум***.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

РЕШЕНИЕ

Точками экстремума могут быть точки, в которых $y' = 0$ либо $y' = \infty$.

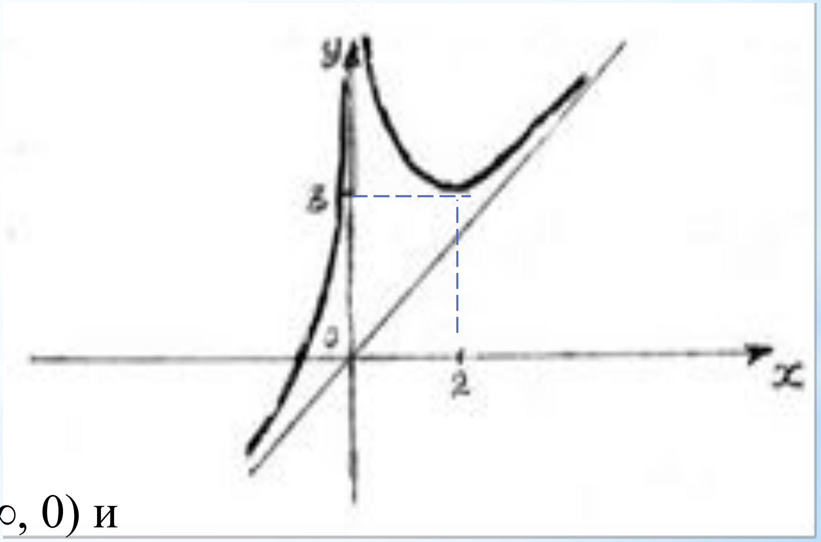
$$y' = (3x^4 - 2x^4 - 8x) / x^4 = (x^3 - 8) / x^3.$$

$y' = 0$ при X=2; $y' = \infty$ при X=0.

Имеем одну критичесую точку X=2, так как X=0 не принадлежит области определения функции.

x	(-∞, 0)	0	(0,2)	2	(2,+∞)
y'	+	∞	-	0	+
y	↗	∞	↘	3	↗

$Y_{min}(2)=3$.



Функция возрастает на интервалах (-∞, 0) и (2,+∞), убывает на интервале (0,2).

Интервалы выпуклости функции

(*интервалы знакопостоянства второй производной*).

Границами этих множеств являются критические точки производной второго порядка, т. е. точки разрыва второй производной $x_k,\ k=\overline{1;p}$, и её нули x_l, $f''(x_l)=0$, $l=\overline{1;q}$, которые могут быть также точками перегиба графика функции.

Пример. Исследуем на экстремум функцию $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

Р Е Ш Н И Е

Точками перегиба могут быть точки, в которых $y''=0$ либо $y''=\infty$.

$$y'=(3x^4-2x^4-8x)/x^4,=(x^3-8)/x^3.$$

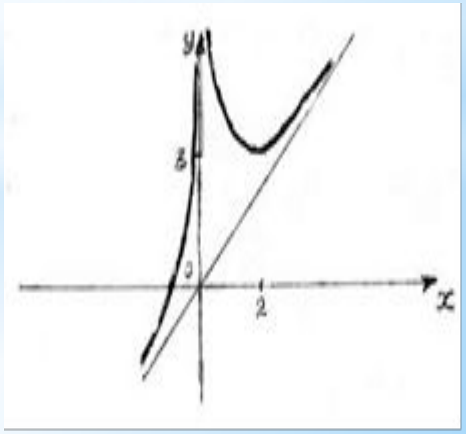
$$y''=\left(\frac{x^3-8}{x^3}\right)'=\left(1-\frac{8}{x^3}\right)'=\left(1-8x^{-3}\right)'=\frac{24}{x^4}.$$

$$y''\neq 0;\quad y''=\infty\quad \textit{при}\quad x=0.$$

Так как x=0 не принадлежит области определения функции, поэтому точек перегиба нет

X	(-∞, 0)	0	(0,+∞)
y''	+	∞	+
y	∪	∞	∪

Кривая всюду вогнута.



Никакой достоверности нет в том, что не имеет связи с математикой

Леонардо да Винчи

Невозможно управлять тем, что нельзя измерить

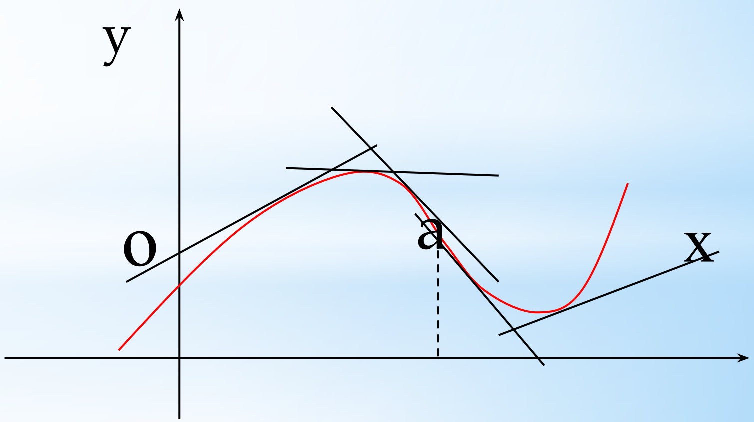
Эдвард Дёминг

Точки перегиба.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

В точке перегиба касательная пересекает кривую.

Пусть кривая определяется уравнением y = f(x).
Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку x = a функция $f''(x)$ меняет знак,
то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба графика функции.



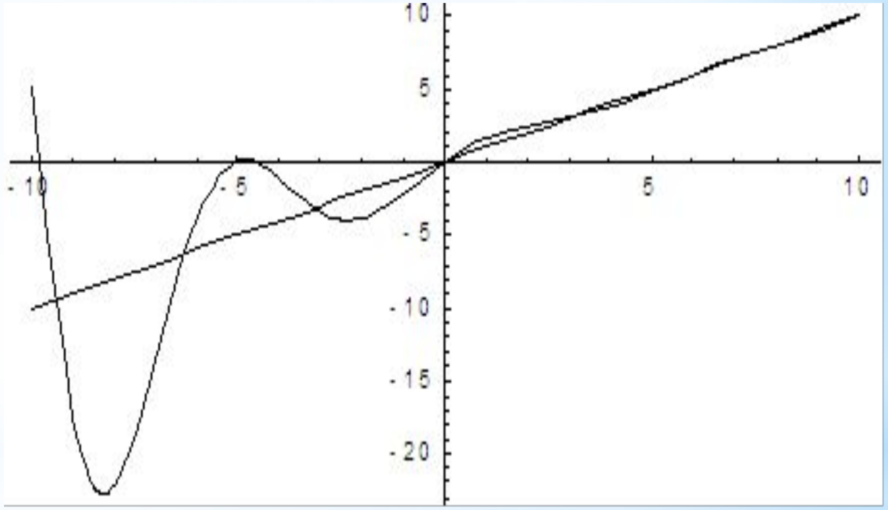
Асимптоты.

Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки x кривой *y= f(x)* до этой прямой при удалении точки x в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту

Точка графика функции при неограниченном удалении от начала координат может неограниченно приближаться к своей асимптоте

Кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать её, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}}\sin x$



Её асимптотой является прямая

y = x.

Вертикальные асимптоты

Если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

то прямая x = a является асимптотой кривой y = f(x).

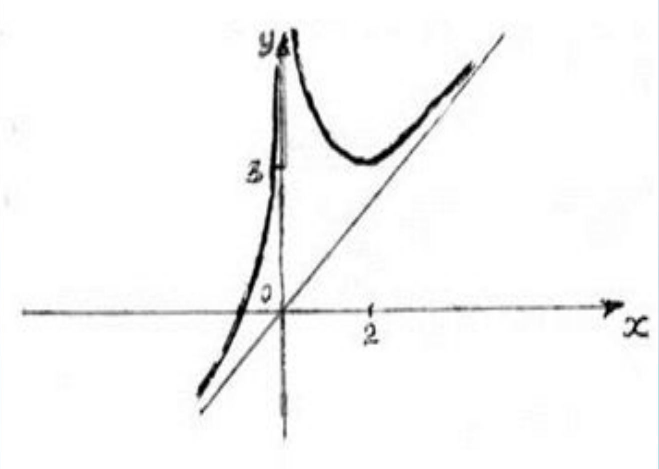
Задача. Найти уравнения вертикальных асимптот функции $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

Данная функция существует всюду,

кроме точки X=0, т.е. на интервалах (-∞, 0)

(0,+∞). Точка X=0 является точкой

разрыва второго рода, так как



$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^3 + 4}{x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \to 0-} \frac{x^3 + 4}{x^2} = +\infty$$

поэтому прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты

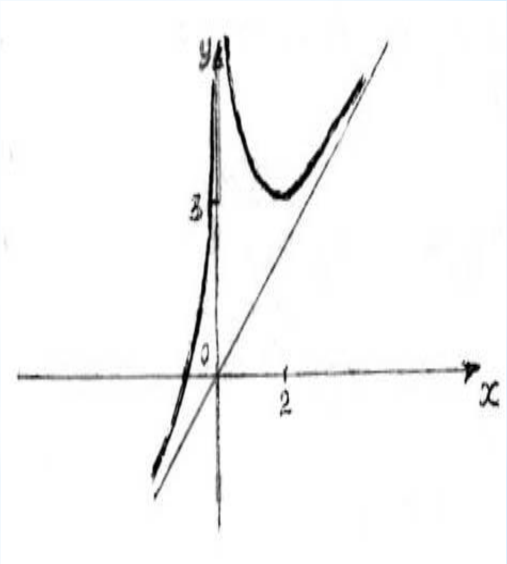
Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$, где

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},$$

Задача.

Найти уравнения наклонных асимптот графика функции $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$



Решение

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{4}{x^3}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^3} = 0.$$

Уравнение наклонной асимптоты: y = x.