«Показательная функция»

Цель:

- Рассмотрение основных свойств показательной функции.
- Построение графика.
- Решение показательных уравнений.
- Решение показательных неравенств.

Определение

Показательная функция – это

функция вида $y = a^x$,

где x – переменная,

a - заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Примеры: $y = 3^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = 0{,}4^x$

Свойства показательной функции $y = a^x$

1. Область определения: все действительные числа | D(y) = R;

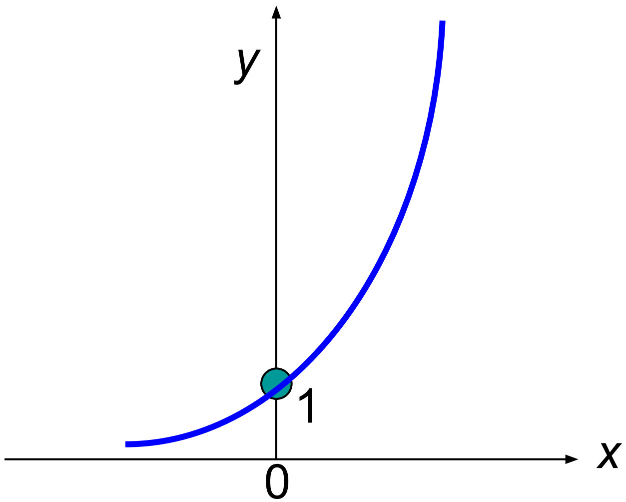
2. Множество значений: все положительные числа | E(y) = (0; + ∞);

3. При $a > 1$ функция возрастающая;
при $0 < a < 1$ функция убывающая.

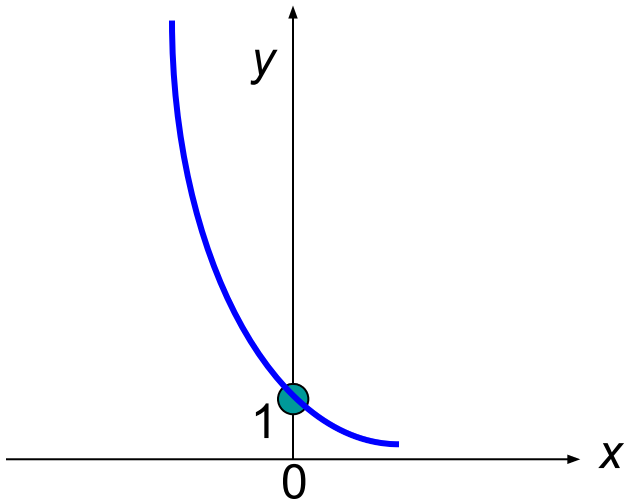
График показательной функции

Т.к. $a^0 = 1$, то график любой показательной функции проходит через точку (0; 1)

$a > 1$



$0 < a < 1$



Показательные уравнения

Определение

Простейшие уравнения

Способы решения сложных уравнений

Определение

Уравнение, в котором переменная содержится в показателе степени, называется **показательным.**

Примеры: $2^x = 8; \quad 9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

Простейшее показательное уравнение – это уравнение вида

$$a^x = a^b, \text{где } a > 0, a \neq 1.$$

Простейшее показательное уравнение решается с использованием свойств степени.

$$\boxed{a^x = a^b \Leftrightarrow x = b}$$

Способы решения сложных показательных уравнений.

Замена переменной

Деление на показательную функцию

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

Данный способ используется, если соблюдаются два условия:

1) основания степеней одинаковы;
2) коэффициенты перед переменной одинаковы

Например: $$2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$$

Замена переменной

При данном способе показательное уравнение сводится к квадратному.

Способ замены переменной используют, если

а) основания степеней одинаковы;

б) показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем у другой.

Например:

$3^{2x} - 4 \cdot 3^{x} - 45 = 0$

коэффициенты перед переменной противоположны.

Например:

$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$

Деление на показательную функцию

Данный способ используется, если основания степеней разные.

а) в уравнении вида $a^x = b^x$ делим на b^x

Например: $2^x = 5^x \mid : 5^x$

б) в уравнении $A\,a^{2x} + B\,(ab)^x + C\,b^{2x} = 0$ делим на b^{2x}.

Например:

$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \mid : 9^x$

Показательные неравенства

Определение

Простейшие неравенства

Решение неравенств

Определение

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Примеры: $3^x \le 9;$ $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

Простейшие показательные неравенства – это неравенства вида:

$$a^x > a^b \qquad a^x \geq a^b$$

$$a^x < a^b \qquad a^x \leq a^b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, b – *любое число*.

При решении **простейших** неравенств используют свойства возрастания или убывания показательной функции.

$$\left.\begin{array}{l} a^{x} > a^{b} \\ a > 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x > b \qquad \left.\begin{array}{l} a^{x} > a^{b} \\ 0 < a < 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x < b$$

Для решения более **сложных** показательных неравенств используются те же способы, что и при решении показательных уравнений.

Показательная функция

- Построение графика
- Сравнение чисел с использованием свойств показательной функции
- Сравнение числа с 1

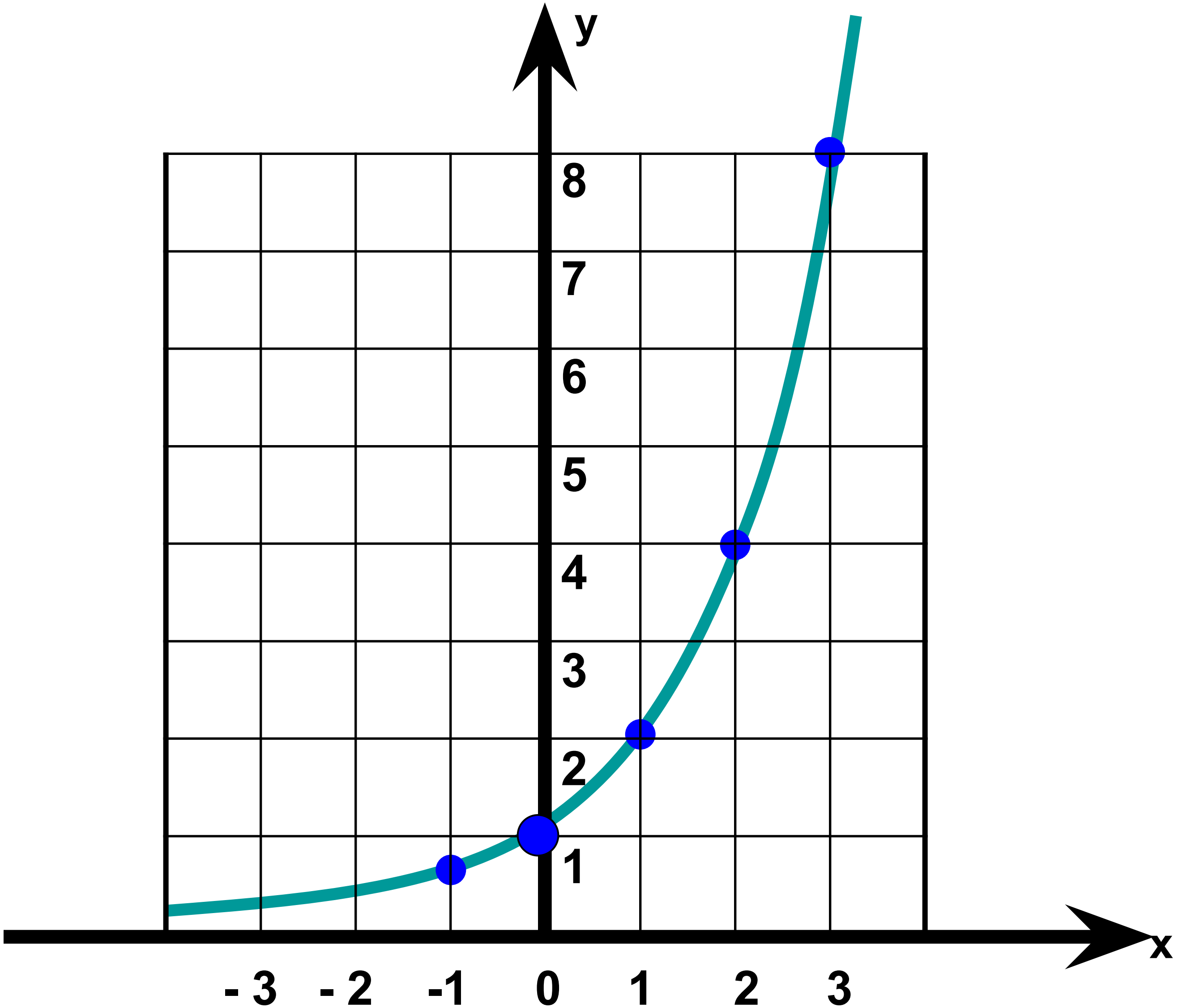
а) аналитический способ;

б) графический способ.

Задача 1

Построить график функции $y = 2^x$

x	y
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Задача 2

Сравнить числа $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$

Решение

$$\sqrt{2} = 1,41... > 1,4$$

$$0 < \frac{1}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$

Задача 3

Сравнить число 3^{-5} с 1.

Решение

$1 = 3^0$

-5 < 0

$3 > 1$

$\Rightarrow 3^{-5} < 3^0 \Rightarrow 3^{-5} < 1$

Ответ: $3^{-5} < 1$

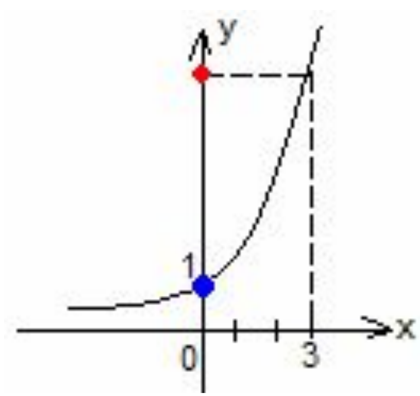
Задача 4

Сравнить число p с 1

$p = 2^3$

$2 > 1$, то

функция $y = 2^t$ – возрастающая.

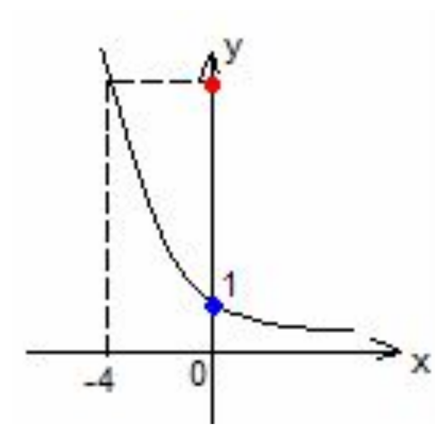


Ответ: $2^3 > 1$.

$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

$0 < \frac{1}{2} < 1$, то

функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ – убывающая



Ответ: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} > 1$

Решение показательных уравнений

- Простейшие показательные уравнения
- Уравнения, решаемые вынесением за скобки степени с меньшим показателем
- Уравнения, решаемые заменой переменной
  - случай 1;
  - случай 2.
- Уравнения, решаемые делением на показательную функцию
  - случай 1;
  - случай 2.

Простейшие показательные уравнения

$$1).\ 2^{3x+4}=2^{x-7} \Leftrightarrow 3x+4=x-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x-x=-7-4 \Leftrightarrow 2x=-11 \Leftrightarrow x=-5{,}5.$$

Ответ: - 5,5.

$$2).\ 5^{x^2-3x}=1 \Leftrightarrow 5^{x^2-3x}=5^0 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; 3.

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$$

$$2^{x-2}(\ 2^3 - 4 \cdot 1) = 32$$

$$2^{x-2}(8-4) = 32$$

$$2^{x-2} \cdot 4 = 32 |: 4$$

$$2^{x-2} = 8$$

$$2^{x-2} = 2^3$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

Ответ: 5

x + 1 - (x - 2) =

= x + 1 – x + 2 = 3

Замена переменной (1)

основания степеней одинаковы, показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем у другой .

$3^{2x} – 4 \cdot 3^{x} – 45 = 0$

$t = 3^x$ ($t > 0$)

$t^2 – 4t – 45 = 0$

По т. Виета: $t_1 \cdot t_2 = -45$; $t_1 + t_2 = 4$

$t_1 = 9$; $t_2 = -5$ – не удовлетворяет условию

$3^x = 9$; $3^x = 3^2$; $x = 2$.

Ответ: 2

Замена переменной (2)

Основания степеней одинаковы,
коэффициенты перед переменной противоположны.

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

$$2^2 \cdot 2^{-x} - 2^x \cdot 2^{-1} = 1$$

$$t = 2^x \; (t > 0)$$

$$2 \quad t \quad 2t$$

$$\frac{4}{t} - \frac{t}{2} = 1$$

$$8 - t^2 = 2t$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

По т. Виета:

$$t_1 \cdot t_2 = -8, \; t_1 + t_2 = -2$$

$t_1 = -4$ - Не удовлетворяет условию

$$t_2 = 2$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

Ответ: 1

Деление
на показательную функцию

$$a)\ 2^x = 5^x \,|: 5^x$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x = 0$$

Ответ: 0

Деление на показательную функцию

$$3\cdot 25^x - 8\cdot 15^x + 5\cdot 9^x = 0 \Big| :9^x$$

$$\frac{3\cdot 5^{2x}}{3^{2x}} - \frac{8\cdot 5^x\cdot 3^x}{3^{2x}} + 5 = 0$$

$$3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^x + 5 = 0$$

$$t = \left(\frac{5}{3}\right)^x \quad (t > 0)$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$D = 64 - 4\cdot 3\cdot 5 = 4 = 2^2$$

$$t_1 = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}; \qquad t_2 = \frac{8-2}{6} = 1.$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3}$$

$$x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^0$$

$$x = 0$$

Ответ: 0; 1.

Решение показательных неравенств

- Простейшие показательные неравенства
- Двойные неравенства
- Неравенства, решаемые вынесением за скобки степени с меньшим показателем
- Неравенства, решаемые заменой переменной

Простейшие показательные неравенства

$$1).\quad 3^x > 9 \Leftrightarrow 3^x > 3^2 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{Ответ}: x > 2.$$

$$2).\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{Ответ}: x < 2.$$

Двойные неравенства

$$\frac{1}{3} < 3^{3+x} < 9$$

$$3^{-1} < 3^{3+x} < 3^{2}$$

3 > 1, то $-1 < 3 + x < 2$

$$-1 - 3 < x < 2 - 3$$

$$-4 < x < -1$$

Ответ: (- 4; -1).

Решение показательных неравенств

Метод: Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^{x} > 10$$

$$3^{x-3}(1 + \frac{1}{3} \cdot 3^{3}) > 10$$

$$3^{x-3}(1+9) > 10$$

$$3^{x-3} \cdot 10 > 10 \,\Big|\, : 10$$

$$3^{x-3} > 1$$

$$3^{x-3} > 3^{0}$$

Т.к.
3 > 1, то знак неравенства остается прежним

$$x - 3 > 0$$

$$x > 3.$$

Ответ: $x > 3$

Решение показательных неравенств

Метод: Замена переменной

$$3\cdot 9^x + 11\cdot 3^x < 4$$

$$3\cdot 3^{2x} + 11\cdot 3^x - 4 < 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0)$$

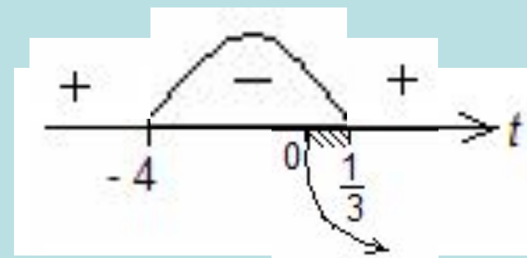
$$3t^2 + 11t - 4 < 0$$

$$D = 11^2 - 4\cdot 3\cdot(-4) = 121 + 48 = 169 = 13^2$$

$$t_1 = \frac{-11+13}{2\cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = \frac{-11-13}{6} = \frac{-24}{6} = -4$$

$$3\,(t+4)\left(t - \frac{1}{3}\right) < 0$$



$$0 < t < \frac{1}{3}; 0 < 3^x < \frac{1}{3}$$

$$3^x < 3^{-1};$$

3>1, то $x < -1.$

Ответ: $x < -1.$

Используемая литература.

- А.Г.Мордкович: Алгебра и начала математического анализа(профильный уровень), 10класс,2015г.
- А.Н. Колмогоров: Алгебра и начала математического анализа,2008г.