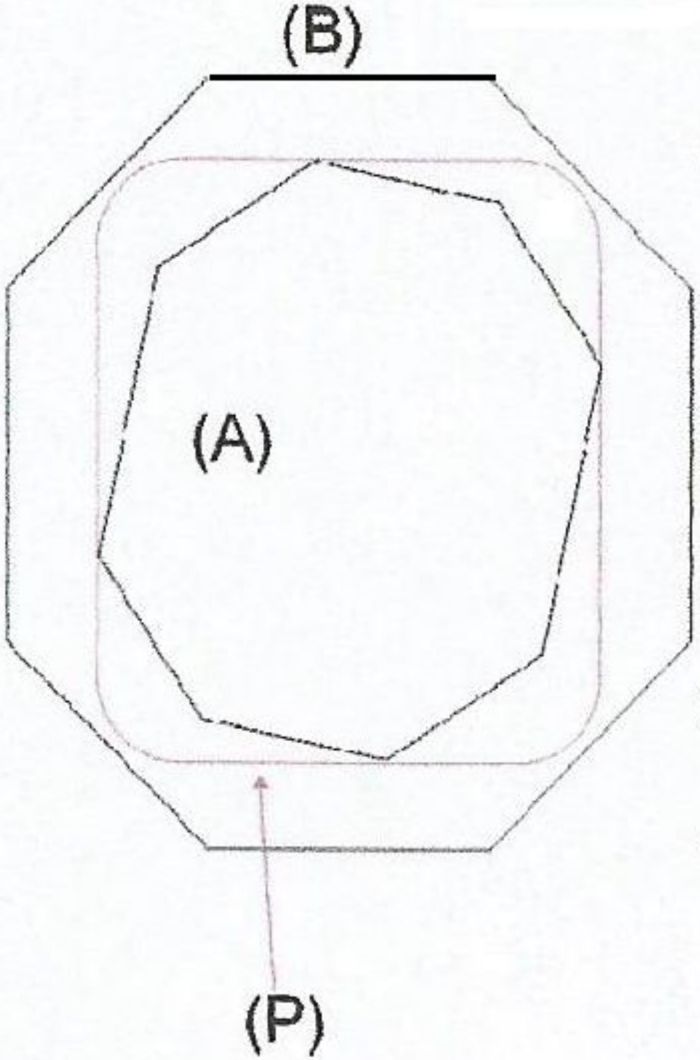
Интегральное исчисление для функции нескольких переменных



Станем рассматривать всевозможные многоугольники (A), содержащиеся в данной фигуре (P) и всевозможные многоугольники (B), содержащие фигуру (P).

Обозначим через A и B соответственно площади многоугольников (A) и (B). Ясно, что $A \leq B$. Рассмотрим множество $\{A\}$ площадей многоугольников, содержащихся в фигуре (P), а множество $\{B\}$ площадей многоугольников, содержащих фигуру (P).

ЯВЛЯЮТСЯ ЛИ ЭТИ МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННЫМИ СООТВЕТСТВЕННО СВЕРХУ, СНИЗУ? ЕСЛИ ДА, ТО ПОЧЕМУ?

Множество $\{A\}$ ограничено сверху площадью B любого многоугольника (B), содержащего фигуру (P).

Множество $\{B\}$ ограничено снизу площадью A любого многоугольника, содержащегося в (P).

Из ограниченности $\{A\}$ сверху следует существование $\sup\{A\}$. Из ограниченности $\{B\}$ снизу следует существование $\inf\{B\}$.

Обозначим $\sup\{A\} = P_*$, $\inf\{B\} = P^*$.

Нетрудно видеть, что

$$A \le P_* \le P^* \le B. \qquad \text{ПОЧЕМУ???}$$

P_* назовем внутренней площадью фигуры (P).

P^* назовем внешней площадью фигуры (P).

Определение 1. Если внутренняя площадь P_* и внешняя площадь P^* фигуры (P) совпадают, то фигура (P) называется квадрируемой и их общее значение $P_* = P^* = P$ площадью фигуры (P).

1.1.2. Признаки квадрируемости

Т.1. Для существования площади фигуры (P) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали бы два таких многоугольника (A) и (B), что B - A $< \varepsilon$.

Доказательство

I. Необходимость. Пусть (P) квадрируема, т.е. $P_* = P^* = P$, где $P_* = \sup\{A\}$, $P^* = \inf\{B\}$.

ЧТО СЛЕДУЕТ ИЗ ОПРЕДЕЛЕНИЙ $\sup\{A\}$ и $\inf\{B\}$?

$$P = \sup\{A\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall A)(A \le P) \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists A)(P - \frac{\varepsilon}{2} < A \le P) \end{cases} \quad (1)$$

$$P = \inf\{B\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall B)(P \le B) \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists B)(P \le B < P + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Вычитая из неравенства (2) неравенство (1), получим...???

$$\mathrm{B} - \mathrm{A} < \left(P + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(P - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Итак, $\mathrm{B} - \mathrm{A} < \varepsilon$.

2. *Достаточность.* Пусть для любого $\varepsilon > 0$ нашлись два многоугольника (A) и (B) такие, что $B - A < \varepsilon$. Тогда $B < A + \varepsilon$ и

$A \le P_* \le P^* \le B < A + \varepsilon$. ПОЧЕМУ?

Из последних неравенств $P_* = P^*$. ПОЧЕМУ?

Последнее означает: фигура квадрируема. ПОЧЕМУ?

Определение 2. Плоская кривая Г называется кривой нулевой площади, если для любого $\varepsilon > 0$ существует многоугольник с площадью, меньшей ε, целиком содержащий эту кривую.

Т. 2. Для того, чтобы ограниченная фигура (Р) была квадрируема необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела нулевую площадь.

Доказательство

1. Необходимость. Пусть (P) квадрируема.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют два многоугольника (A) и (B) таких, что $(A) \subset (P)$, $(B) \supset (P)$ и $B - A < \varepsilon$.

ПОЧЕМУ?

Многоугольник (В) – (А) ... границу (Г) фигуры (Р).
Следовательно кривая (Г) имеет ... площадь.

?

Многоугольник (B) – (A) **содержит** границу (Г) фигуры (P). Следовательно кривая (Г) имеет **нулевую** площадь.

2. *Достаточность.* Пусть граница (Г) фигуры (P) имеет нулевую площадь, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует многоугольник (D) с площадью меньшей ε, покрывающий границу фигуры (P). ПОЧЕМУ?

Без умаления общности рассуждений можно считать, что многоугольная область (D) не покрывает полностью область (P). Тогда из точек фигуры (P), не покрытых (D) можно составить многоугольник (A), содержащийся в (P). Многоугольник $(B) = (A) \cup (D)$ содержит (P).

Площадь $B - A = D < \varepsilon$.

Т. 3. Любая непрерывная кривая, заданная уравнением вида $y = f(x),\ x \in [a,b]$ имеет нулевую площадь.

Доказательство

Пусть f непрерывна на $[a,b]$ $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$,

ПОЧЕМУ?

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно отрезок $[a,b]$ разбить на частичные $[x_i, x_{i+1}]$ таким образом, что колебание функции на отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

ПОЧЕМУ?

ЧЕМУ РАВНО КОЛЕБАНИЕ f **на** $[x_i, x_{i+1}]$?

f непрерывна на $[a,b] \Rightarrow f$ непрерывна на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ и достигает там своего m_i наименьшего и наибольшего M_i значений. Кривая на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ будет покрыта прямоугольником $[x_i, x_{i+1}, m_i, M_i]$.

Вся кривая окажется покрытой многоугольником, состоящим из прямоугольников $[x_i, x_{i+1}, m_i, M_i]$.

Площадь такого многоугольника равна

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) <$$

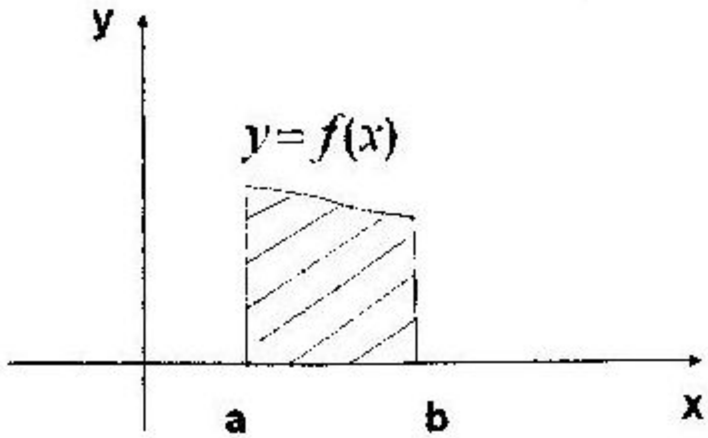
$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Итак, непрерывная кривая имеет нулевую площадь.

Т.4. Если фигура (P) ограничена несколькими кривыми, каждая из которых выражается уравнениями вида $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ (или $x = \varphi(y)$, $y \in [c,d]$) где функция f (или φ) непрерывна на $[a,b]$ ($[c,d]$), то эта фигура квадрируема.

Следствие. Криволинейная трапеция квадрируема.

Доказать самостоятельно.



1.1.3. Аддитивность площади

Т. 5. Если (P_1) и (P_2) - две квадрируемые фигуры без общих внутренних точек, то фигура $(P) = (P_1) \cup (P_2)$ квадрируема и $P = P_1 + P_2$.

Доказательство

В силу квадрируемости (P_1) и (P_2) для любого $\varepsilon > 0$ существуют две пары многоугольников (A_1), (B_1) и (A_2), (B_2) таких, что $(A_1) \subset (P_1)$, $(B_1) \supset (P_1)$,

$(A_2) \subset (P_2)$, $(B_2) \supset (P_2)$ и $B_1 - A_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

$B_2 - A_2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Так как (P_1) и (P_2) не имеют общих внутренних точек, то многоугольники (A_1) и (A_2) не пересекаются. Из них составим область $(A_1) \cup (A_2)$, содержащуюся в $(P_1) \cup (P_2)$.

Из многоугольников (B_1) и (B_2) составим многоугольную область, содержащую $(P) = (P_1) \cup (P_2)$.

Ее площадь $B < B_1 + B_2$. | ?

Многоугольники (B_1) и (B_2) могут пересекаться, поэтому площадь объединения $B < B_1 + B_2$. Тогда

$$B-(A_1 + A_2) < (B_1 + B_2)-(A_1 + A_2)=$$

$$=(B_1 - A_1)+(B_2 - A_2) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Отсюда вытекает кадрируемость (P).

Следствие

Если $(P_1) \subset (P) \Rightarrow P_1 < P$.

1.2. Кубируемые тела

Пусть в пространстве R^3 дано некоторое тело (V).

Считая известным понятие объема многогранника, можно ввести понятие объема тела (V).

Определение. Тело (V) называется кубируемым, если верхняя грань V_* объемов многогранников, содержащихся в теле (V), и нижняя грань V^* объемов многогранников, содержащих тело (V), совпадают. Их общее значение $V_* = V^* = V$ называют объемом тела (V).

$V_* = \sup\{X\},\ X \subset (V);\ V^* = \inf\{Y\},\ Y \supset (V).$

Здесь верен критерий кубируемости тела (V).

Т. 1. Для того, чтобы тело (V) было кубируемым необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали два многогранника (X), содержащийся в теле (V), и (Y), содержащий тело (V), такие, что $Y - X < \varepsilon$.

Эту теорему можно представить в другой форме.

Т. 2. Для того, чтобы тело (V) было кубируемым, необходимо и достаточно чтобы ограничивающая его поверхность (S) имела нулевой объем, т.е. чтобы ее можно было заключить в многогранное тело с произвольно малым объемом.

К числу поверхностей нулевого объема принадлежат поверхности, выражаемые явным уравнением одного из трех типов (*) $z = f(x, y), y = g(x, z), x = h(y, z)$, где f, g, h - непрерывные функции двух переменных в некоторой замкнутой ограниченной области.

Т. 3. Если тело (V) ограничено несколькими непрерывными поверхностями, каждая из которых выражается уравнением одного из трех типов (*), то это тело кубируемо, т.е. имеет объем.

Т. 4. Если тело (V) разложено на два тела (V_1) и (V_2), то существование объма для двух любых из указанных трех тел вытекает существование объема третьего тела. При этом справедливо равенство $V = V_1 + V_2$.

Т. 5. Для того, чтобы тело (V) имело объем необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две последовательности соответственно входящих и выходящих многогранников $\{(X_n)\}$ и $\{(Y_n)\}$, объемы которых имели бы общий предел:

$\lim X_n = \lim Y_n = V$.

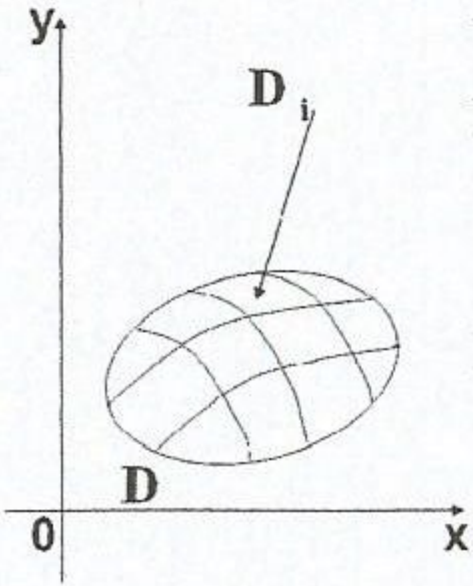
1.3. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

1.3.1. Задача об объеме цилиндрического тела

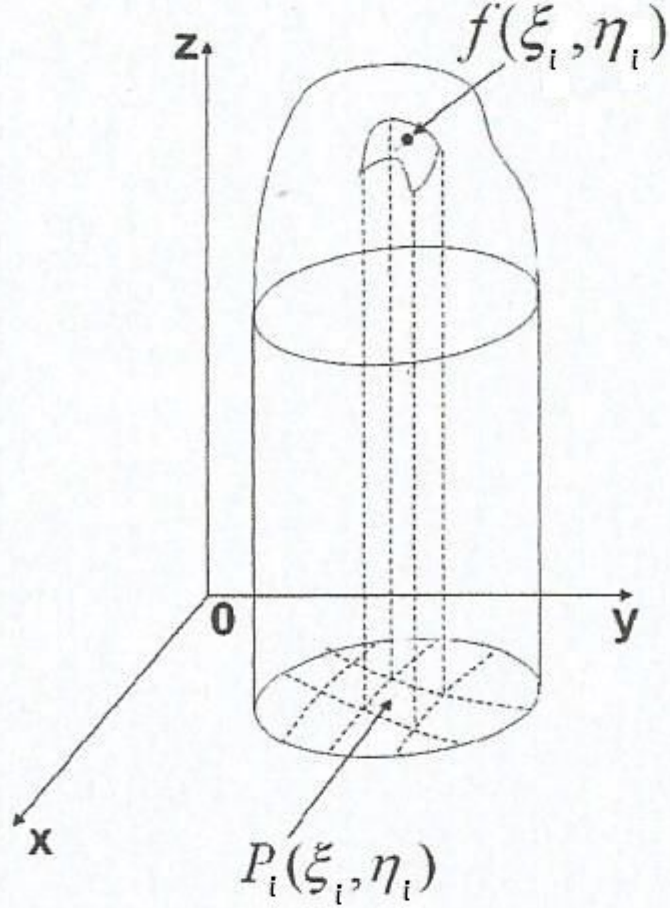
Рассмотрим тело (V), ограниченное сверху поверхностью (S), уравнение которой $z = f(x, y)$, где f – непрерывная неотрицательная в области D функция, с боков - некоторой цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси OZ, снизу частью плоскости XOY - замкнутой, ограниченной квадрируемой плоской фигурой (D).

Как известно из **1.2. (Т. 3.)**, это тело имеет объем.

Рассмотрим один из способов его вычисления.



Разобьем область D на n квадрируемых замкнутых областей $D_1, D_2, \dots, D_n$, имеющих площади $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, причем $\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = \sigma$ - площадь D.



Над каждой из площадок $D_1, D_2, \ldots, D_n$ построим цилиндр, ограниченный сверху куском поверхности S. Этим самым тело (V) разобьется на n столбиков с основаниями D_i.

Обозначим объем столбика с основанием

D_i через ΔV_i, тогда объем тела (V): $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$.

Рассмотрим цилиндр с основанием D_i

и высотой, равной аппликате z_i точки поверхности

S, проектирующейся в точку

$P_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$: $z_i = f(\xi_i, \eta_i)$.

Объем такого цилиндра равен $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$.

Его можно считать приближенно равным объему

ΔV_i столбика с основанием D_i.

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

Тогда объем цилиндра с основанием D, ограниченного поверхностью S имеет следующее приближенное значение

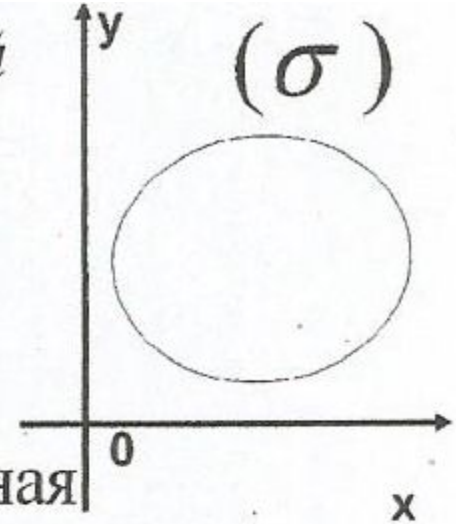
$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

По определению объем цилиндрического тела (V) равен $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$, где

$\lambda -$ диаметр разбиения области D, если он существует и не зависит от дробления области на частичные и выбора точек $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

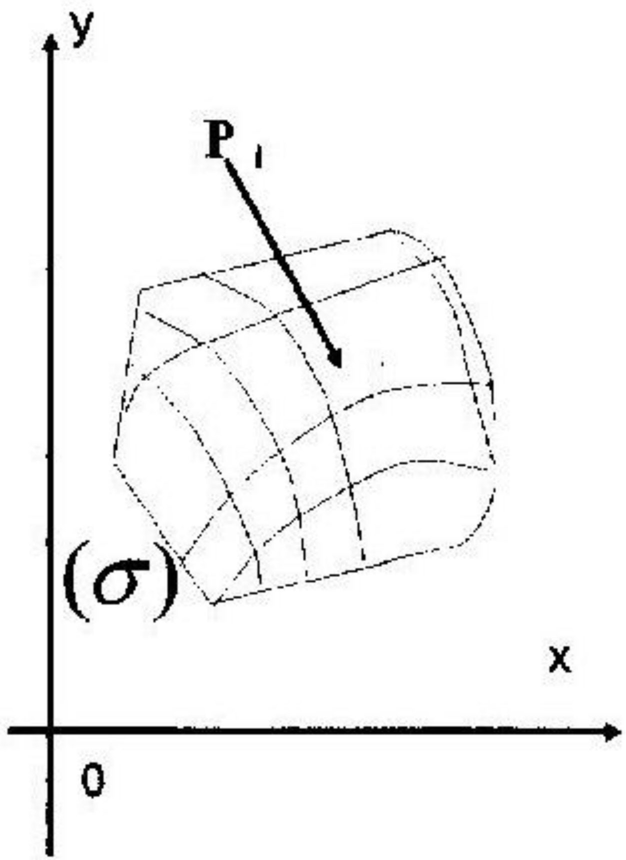
1.3.2. Задача о массе плоской материальной фигуры



Пусть требуется определить массу m некторой плоской фигуры, зная что поверхностная плотность распределения массы в каждой ее точке есть заданная непрерывная функция точки P(x,y) $\gamma = \gamma(x, y) = \gamma(\mathrm{P})$.

Если бы пластина (σ) была бы однородной, т.е. плотность в каждой ее точке была бы постоянной $\gamma = \gamma_0$, то масса фигуры (σ) была бы равна $m = \gamma_0 \cdot \sigma$.

Но так как в общем случае плотность есть функция точки, то последняя формула для определения массы не пригодна. Поэтому поступим следующим образом.



Разобьем фигуру (σ) на n площадок $(\Delta\sigma_i)$.

В каждой такой площадке выберем произвольно точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Если площадки достаточно малы, то допустим, что плотность на всей пластинке $(\Delta\sigma_i)$ равна плотности в точке $P(\xi_i, \eta_i)$, т.е. $\gamma(\xi_i, \eta_i)$.

Тогда

$\Delta m_i \approx \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$,

где $\Delta\sigma_i$ - площадь области

$(\Delta\sigma_i)$.

Тогда масса всей фигуры

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

Точность этого равенства будет возрастать с уменьшением диаметра разбиения λ. Поэтому по определению примем, что масса плоской фигуры равна

$$m = \lim_{n\to\infty, \lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

Таким образом, видим, что обе рассмотренные задачи приводят к нахождению предела сумм одного и того же вида. Задача разыскания предела таких сумм и приводит к понятию двойного интеграла.

1.4. Понятие двойного интеграла

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определенная и ограниченная в некоторой замкнутой ограниченной квадрируемой области D, граница которой - простая замкнутая кривая.

Разобьем область D на n частичных областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ (без общих внутренних точек) с помощью сети кривых нулевой площади.

Площади частичных областей обозначим $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$.

В каждой области D_i выберем произвольно точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$, вычислим значение функции f в каждой точке P_i : $f(\xi_i, \eta_i)$. Умножим найденные значения $f(\xi_i, \eta_i)$ на площадь соответствующей области $\Delta\sigma_i$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

Полученную сумму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$

будем называть интегральной суммой функции f в области D.

Обозначим диаметр разбиения области D на частичные λ.

Определение 1. Если при $\lambda \to 0$ интегральная сумма S_n имеет конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} S_n$, не зависящий ни от способа дробления области D на частичные, ни от выбора точек $P_i(\xi_i, \eta_i)$ в пределах каждой частичной области, то этот предел называется двойным интегралом от функции f по области D и обозначается символом $I = \iint\limits_D f(x, y)d\sigma$.

Определение 2. Число I называется пределом интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что лишь только $\lambda < \delta$ неравенство $\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \right| < \varepsilon$ выполняется при любом выборе точек $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$.

Функция f, для которой существует

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma,$$ называется

интегрируемой в области D.

1.5. Необходимое и достаточное условие интегрируемости

Необходимым условием интегрируемости функции f в области D является ее ограниченность в этой области. Действительно, в случае неограниченности функции f в области D при любом заданном способе разбиения области D на частичные можно за счет выбора точек $P_i(\xi_i, \eta_i)$ интегральную сумму сделать произвольно большой.

Т.2. Всякая непрерывная в замкнутой ограниченной квадрируемой области D функция f интегрируема на D.

Справедливость вытекает из Т.1.

и равномерной непрерывности f в области D.

Замечание 1. Если $z = f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в замкнутой ограниченной области D, то интегральная сумма

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ имеет простой геометрический смысл - объем ступенчатого тела, состоящего из цилиндров с основаниями D_i и высотами $f(\xi_i, \eta_i)$. Предел интегральной суммы S_n в этом случае существует и равен $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$.

Итак, объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, сбоку - цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси OZ, снизу областью D в плоскости XOY, где f непрерывна и неотрицательна в области D, равен двойному интегралу от функции f по области D.

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y) d\sigma.$$

Замечание 2. Масса плоской пластины D с плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$ равна двойному интегралу от плотности по области D:

$$m = \iint\limits_{D} \gamma(x, y)\, d\sigma.$$

Замечание 3. Если подынтегральная функция $f(x,y)=1$, то значение двойного интеграла равно площади области интегрирования:

$$\iint\limits_{D} d\sigma = \sigma.$$

Действительно, в этом случае любая интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta\sigma_i = \sigma$.

Отсюда $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = \sigma$.

1.6. Свойства двойного интеграла

1. Если функция f интегрируема в области D, то какова бы ни была постоянная $k \in R$, функция kf также интегрируема в D и

$$\iint\limits_{D} kf(x, y)d\sigma = k\iint\limits_{D} f(x, y)d\sigma$$

2. Если функции f_1 и f_2 интегрируемы в данной области D, то функция $f_1 \pm f_2$ интегрируема в D, причем

$$\iint\limits_D (f_1 \pm f_2)(x, y)d\sigma = \iint\limits_D f_1(x, y)d\sigma \pm \iint\limits_D f_2(x, y)d\sigma$$

3. Если в области D функция f интегрируема и имеет место неравенство $f(x, y) \geq 0$,

то $\iint\limits_{D} f(x, y) d\sigma \geq 0$

Доказательство:

Так как $(\forall i)(f(\xi_i, \eta_i) \geq 0)$, то

$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \geq 0$. Откуда $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \geq 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \geq 0$.

4. Если в области D функции f и φ интегрируемы и удовлетворяют неравенству $f(x,y) \geq \varphi(x,y)$, то

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \geq \iint_D \varphi(x,y)d\sigma.$$

Доказать самостоятельно.

5. Если функция f интегрируема в квадрируемой области D, то функция $|f|$ также интегрируема в D и

$$\left|\iint_D f(x,y)\,d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,d\sigma.$$

6. Если функция f интегрируема в квадрируемой области D и удовлетворяет неравенствам $m \le f(x,y) \le M$, то $m\sigma \le \iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma \le M\sigma$, где σ - площадь фигуры D.

Доказательство

Из неравенства $m \le f(x,y) \le M \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint\limits_{D} m d\sigma \le \iint\limits_{D} f(x,y) d\sigma \le \iint\limits_{D} M d\sigma.$$

ПОЧЕМУ?

Откуда

$$m \iint\limits_{D} d\sigma \le \iint\limits_{D} f(x,y) d\sigma \le M \iint\limits_{D} d\sigma$$

Следствие.

Если функция f непрерывна в области D, то в этой области существует такая т. (ξ_0, η_0), что $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi_0, \eta_0)\sigma$.

7. Если область D представляет собой объединение двух областей D_1 и D_2, в каждой из которых функция f интегрируема, то f интегрируема и в области D. Если кроме того D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

Это свойство аддитивности интеграла.

Доказательство

Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения области на частичные в случае интегрируемости функции, рассмотрим разбиение Т области D на частичные, при котором каждая частичная область содержится, либо в D_1, либо в D_2.

Тогда $\sum\limits_{D} \omega_i \Delta\sigma_i = \sum\limits_{D_1} \omega_i \Delta\sigma_i + \sum\limits_{D_2} \omega_i \Delta\sigma_i$.

В силу интегрируемости f в D_1 и D_2

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{D_1}\omega_i\Delta\sigma_i = 0 \text{ и } \lim_{\lambda\to 0}\sum_{D_2}\omega_i\Delta\sigma_i = 0.$$

Тогда $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{D}\omega_i\Delta\sigma_i =$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{D_1}\omega_i\Delta\sigma_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{D_2}\omega_i\Delta\sigma_i = 0,$$ что означает

интегрируемость f в области D.

Рассмотрим интегральную сумму для функции f в области D.

$$\sum_{\mathrm{D}} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \sum_{\mathrm{D}_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i + \sum_{\mathrm{D}_2} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

Найдем $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{\mathrm{D}} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{\mathrm{D}_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i +$

$$+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{\mathrm{D}_2} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,d\sigma.$$

1.7. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

1.7.1. Приведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области

Т.1. Если для функции, определенной в прямоугольнике $P[a,b;c,d]$, существует двойной интеграл

$$\iint\limits_{P} f(x,y)\,d\sigma \quad (1)$$ и при каждом постоянном значении

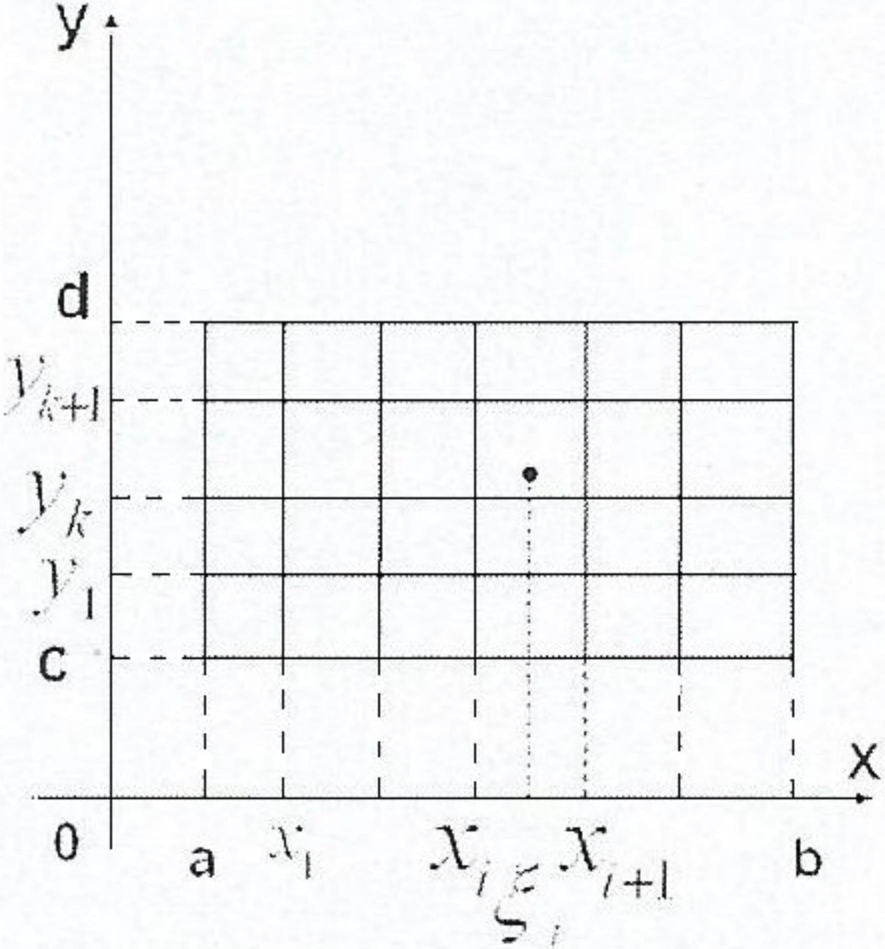
$x \in [a,b]$ – определенный интеграл

$$(2)\quad I(x)=\int\limits_{c}^{d} f(x,y)\,dy \quad (a \le x \le b),$$

то существует также повторный интеграл

$$(3)\quad \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)\,dy,$$ и выполняется равенство

$$\iint\limits_{P} f(x,y)\,d\sigma = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)\,dy \quad (4).$$



Доказательство :

Разобьем отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$, определяющие прямоугольник P на части

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_m = d$$

Тогда прямоугольник Р разобьется на частичные прямоугольники $\mathrm{P}_{ik} = [x_i, x_{i+1}, y_k, y_{k+1}]((i = 0,1,2,...,n-1)$, $(k = 0,1,2,...,m-1)$.

Обозначим $m_{ik} = \inf\{f(x,y)/(x,y) \in P_{ik}\}$, $M_{ik} = \sup\{f(x,y)/(x,y) \in \mathrm{P}_{ik}\}$.

Таким образом для всех точек $(x,y) \in \mathrm{P}_{ik}, m_{ik} \le f(x,y) \le M_{ik}$.

Зафиксируем произвольно $x = \xi_i$ из промежутка $[x_i, x_{i+1}]$ и проинтегрируем функцию $f(\xi_i, y)$ в пределах от y_k до y_{k+1}. Интеграл $\int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy$ существует,

т.к. предположено существование интеграла

(2) $\int\limits_c^d f(x, y)dy$ по всему отрезку $[c, d]$.

Для интеграла $\int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy$ получим

следующую оценку.

$$m_{ik}\Delta y_k \le \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy \le M_{ik}\Delta y_k,$$

ПОЧЕМУ?

где $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.

Проссумировав подобные неравенства

по k от $k = 0$ до $k = m - 1$, получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \le I(\xi_i) \le \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k.$$

Умножим все части последнего неравенства на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и просуммируем по i от $i = 0$ до $i = n - 1$, получим:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \le \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik} \Delta y_k .$$

$\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_k) \Delta x_i$ – интегральная сумма для

функции $I(x)$.

Крайние члены неравенства есть соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для двойного интеграла (1). ПОЧЕМУ?

Действительно, так как $\Delta x_i \cdot \Delta y_k = \Delta\sigma_{ki}$ – площадь прямоугольника P_{ik}, то

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik} \Delta y_k \Delta x_i = \sum_{i,k} m_{ik} \Delta\sigma_{ki} = s$$

Аналогично правая часть неравенства S.

Получаем $s \le \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \le S$.

Если Δx_i и Δy_k одновременно устремить к нулю, то ввиду существования двойного интеграла (1) обе суммы s и S будут стремиться к $\iint\limits_{P} f(x,y)d\sigma$.

В таком случае $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i = \iint\limits_{P} f(x,y)d\sigma$

двойной интеграл (1) представляет в тоже время интеграл от функции $I(x)$ на отрезке $[a,b]$, т.е.

$$(4)\quad \iint\limits_{P} f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Меняя роли переменных x и y , наряду с формулой (4) можно доказать и формулу

$$(5) \quad \iint\limits_{P} f(x,y)d\sigma = \int_{c}^{d} dy \int_{a}^{b} f(x,y)dx$$

в предположении, что при $y = const$ существует интеграл $\int_{a}^{b} f(x,y)dx$.

Замечание 1. Если вместе с двойным интегралом (1) существуют оба простых интеграла $\int_c^d f(x,y)dy$ $(x = const)$ и $\int_a^b f(x,y)dx$ $(y = const)$, то имеют место обе формулы (4) и (5). Откуда

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \quad (6).$$

Замечание 2. При выводе формул (4) и (5) делили прямоугольник прямыми, параллельными координатным осям на части P_{ik} с площадями $\Delta x_i \Delta y_k$. Желая в записи двойного интеграла подчеркнуть его происхождение от деления области на части прямыми, параллельными координатным осям пишут

$$\iint_P f(x, y)d\sigma = \iint_P f(x, y)dxdy = \iint_P f(x, y)dydx.$$

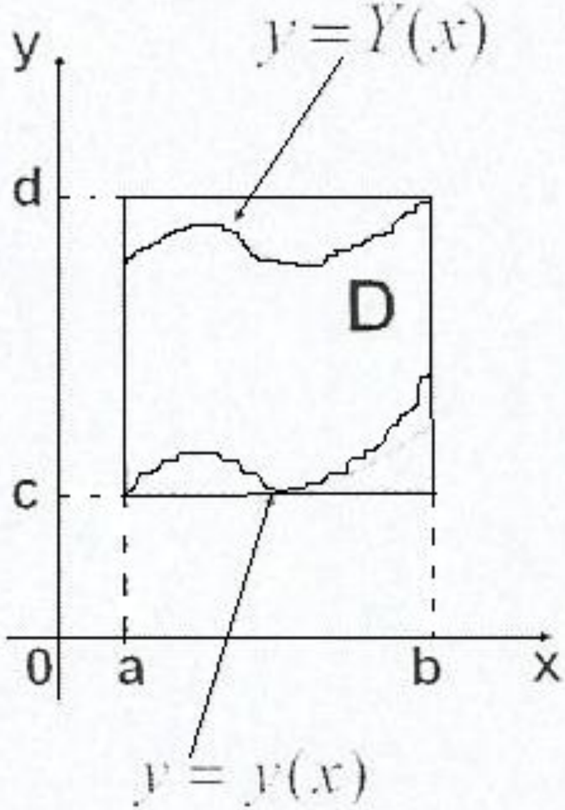
Пример 1. $\iint\limits_D xydxdy$, где D: $0 \le x \le 1$,

$0 \le y \le 2$.

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 xydy = \int\limits_0^1 \left(\left.\frac{xy^2}{2}\right|_0^2\right) dx = \int\limits_0^1 2xdx =$$

$$= \left.\frac{2x^2}{2}\right|_0^1 = 1.$$

1.7.2. Приведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области



Рассмотрим область D, ограниченную снизу и сверху двумя непрерывными кривыми $y = y(x)$ и $y = Y(x)$, $a \le x \le b$, а с боков двумя прямыми $x = a$, $x = b$.

Т.2. Если для функции f, определенной в области D, существует двойной интеграл $\iint_D f(x,y)d\sigma$ и при каждом постоянном значении $x \in [a,b]$ простой интеграл

$$I(x) = \int_{y(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy,$$

то существует повторный интеграл $\int_a^b dx \int_{y(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy$ и выполняется равенство

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{y(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy. \qquad (7)$$

Доказательство :

Заключим область D в прямоугольник

P = $[a, b; c, d]$, полагая $c = \min\limits_{a \le x \le b} y(x)$, $d = \max\limits_{a \le x \le b} Y(x)$.

Определим в P функцию

$$f^{*}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \text{если } (x, y) \in D \\ 0, \text{если } (x, y) \in P - D \end{cases}.$$

Покажем, что f^* удовлетворяет условиям теоремы 1.

1. f^* интегрируема в области D, ибо здесь она совпадает с интегрируемой по условию функцией f. Поэтому

$$\iint\limits_{D} f^*(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma.$$

2. $f^*(x, y) = 0$ на P\D и следовательно f^* интегрируема на P\D, причем

$$\iint\limits_{P \setminus D} f^*(x, y)\,d\sigma = 0.$$

Тогда на основании ....f^* интегрируема в прямоугольнике P.

На основании свойства аддитивности двойного интеграла f^* интегрируема в прямоугольнике P и

$$\iint\limits_P f^*(x,y)d\sigma = \iint\limits_{P\setminus D} f^*(x,y)d\sigma +$$

$$\iint\limits_D f^*(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f^*(x,y)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_D f(x,y)d\sigma. \quad (8)$$

При постоянном значении $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$\int_c^d f^*(x, y)dy = \int_c^{y(x)} f^*(x, y)dy + \int_{y(x)}^{Y(x)} f^*(x, y)dy +$$

$$+ \int_{Y(x)}^{d} f^*(x, y)dy. \quad (9)$$

ПОЧЕМУ?

В силу того, что существует каждый из трех интегралов правой части равенства (9). Действительно, в каждом из промежутков $[c; y(x)]$ и $[Y(x); d]$ изменения переменной y функция $f^{*}(x, y) = 0$, поэтому интегралы первый и третий справа равны нулю.

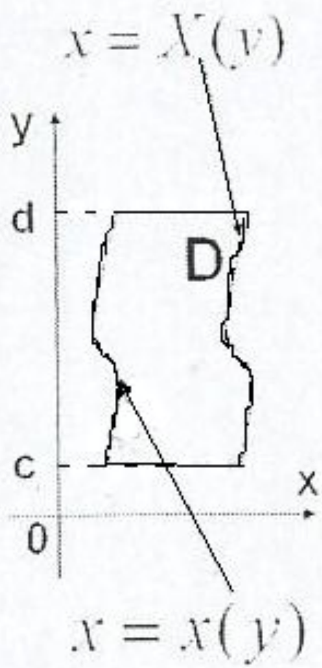
Второй интеграл $\int\limits_{y(x)}^{Y(x)} f^*(x,y)dy = \int\limits_{y(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy$,

поскольку при

$y \in [y(x), Y(x)]$ $\quad f^*(x,y)dy = f(x,y)$.

Окончательно

$$\int\limits_{c}^{d} f^*(x,y)dy = \int\limits_{y(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy. \qquad (10)$$

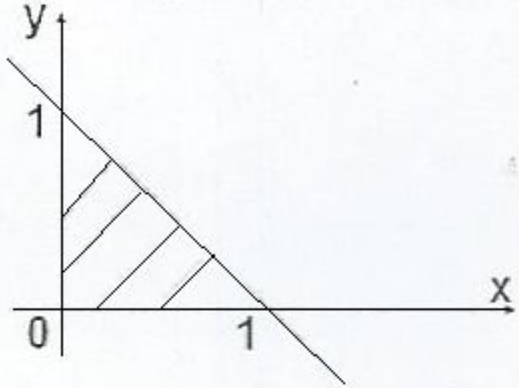


Замечание 1. Если область D представляет собой фигуру, ограниченную кривыми $x = x(y)$, $x = X(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$, то вместо (7) придем к формуле

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy \int_{x(y)}^{X(y)} f(x,y)\,dx \quad (7^*)$$

в предположении, что наряду с двойным интегралом при $y = const$ существует и простой интеграл по x $\int_{x(y)}^{X(y)} f(x,y)\,dx$.

Пример : Вычислить $\iint\limits_D x^3 y^2 dxdy$,



где D: $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x+y \le 1. \end{cases}$

$$\iint\limits_D x^3 y^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^3 y^2 dy = \int_0^1 x^3 \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 (1-x)^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6) dx =$$

$$= \frac{1}{420}.$$

1.8. Отображение плоских областей

Пусть даны две плоскости. На одной из них построена прямоугольная система координат XOY, на другой - прямоугольная система координат UOV.

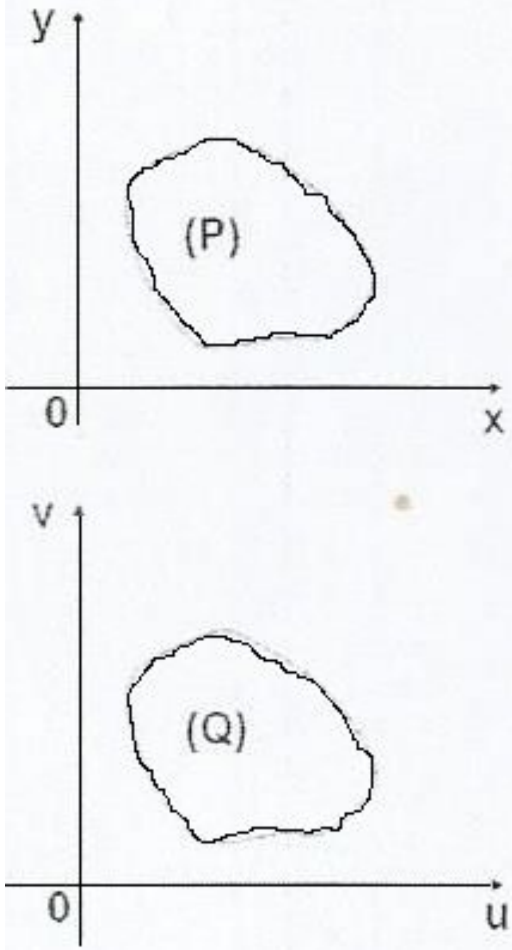


РИС. 1.

Рассмотрим на плоскости XOY некоторую область (P), а на плоскости UOV - - область (Q). Каждая из них может быть и неограниченной.

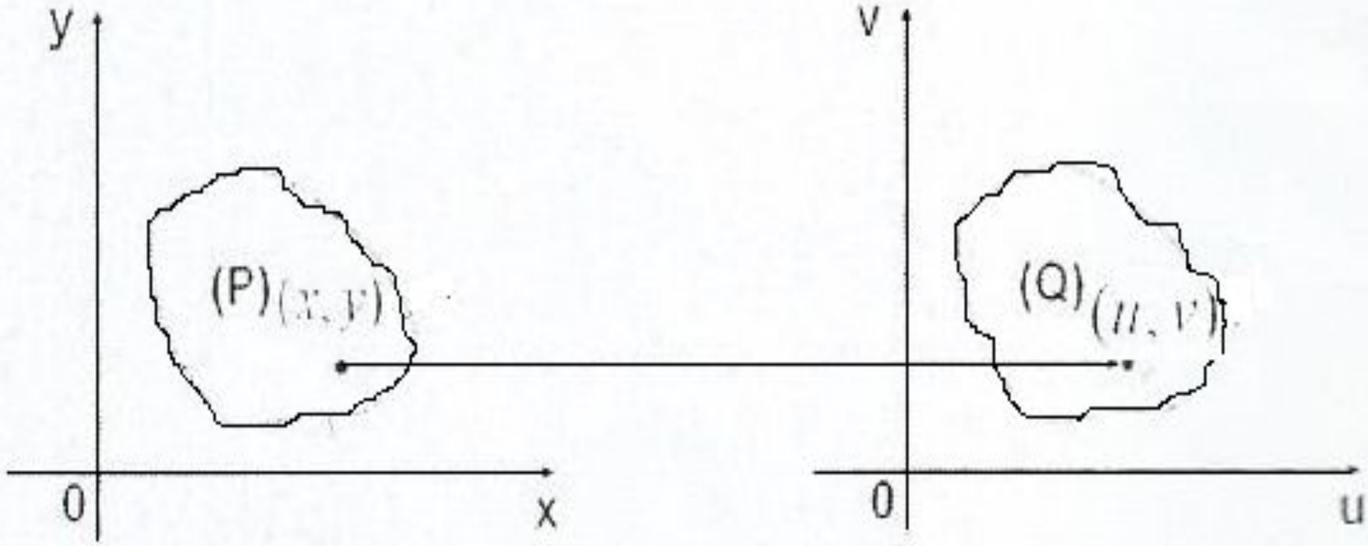


РИС. 2.

Пусть заданы функции (1) $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между точками (u,v) области (Q) и точками (x,y) области (P).

Из сказанного следует, что уравнения (1) однозначно разрешимы относительно переменных u, v.

И следовательно u и v являются функциями от x, y:

$$(2)\quad \begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

Итак, формулы (1) отображают область (Q) на область (P), а формулы (2) производят обратное отображение области (P) на (Q). Поэтому формулы (1) и (2) называют формулами преобразования одной области в другую.

Если функции $x(u,v)$ и $y(u,v)$ непрерывны в (Q), то с помощью формул (1) любая непрерывная кривая L^*, лежащая в (Q), перейдет в непрерывную линию L, лежащую в (P). Эту линию называют образом линии L^*.

Обратно, если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в (P), то любая непрерывная линия в (P) с помощью формул (2) перейдет в непрерывную линию в области (Q).

Так как по заданной паре переменных u и v в области (Q) можно однозначно определить не только положение т. $M'(u,v)$ в самой области (Q), но и положение т. $M(x,y)$ в области (P), то это дает основание рассматривать u и v как некоторые координаты т. M в (P). Их называют криволинейными координатами т. M.

Рассмотрим в плоскости UOV прямую $u = u_0 - const$.

С помощью формул (1) она перейдет в некоторую

линию плоскости XOY: (3) $\begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v). \end{cases}$ - уравнения

образа линии $u = u_0$.

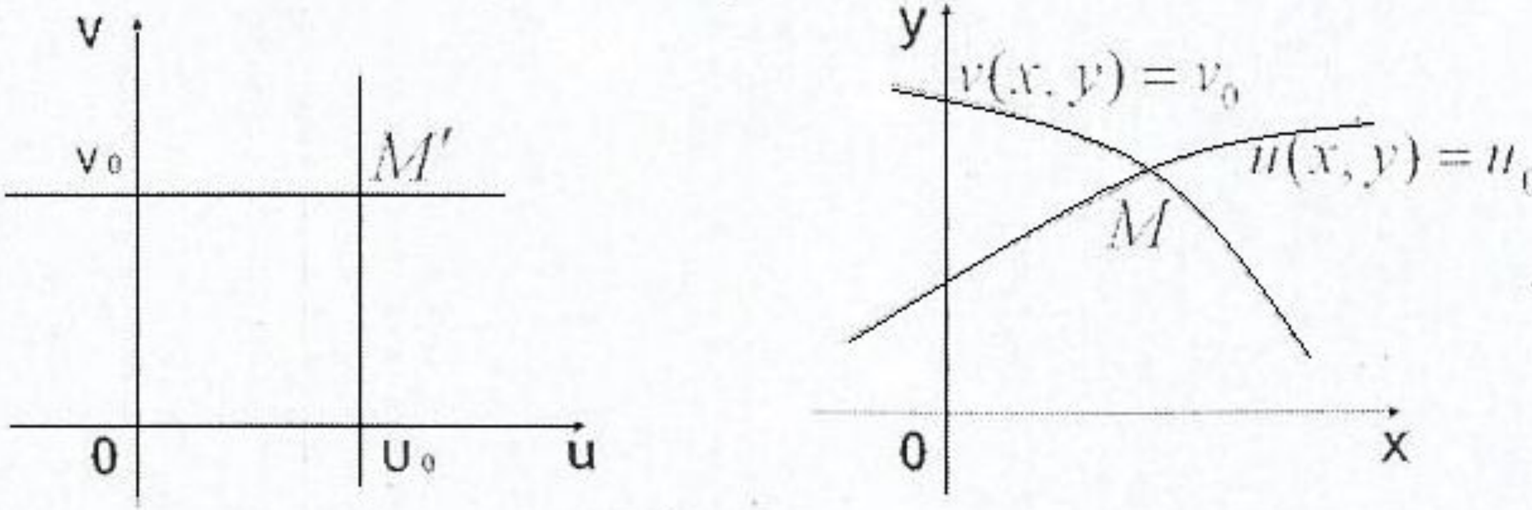


РИС. 3.

Уравнения (3) представляют собой параметрические уравнения образа линии $u = u_0$. Неявное уравнение образа $u = u_0$: $u(x, y) = u_0$. Оно получается, если в первом уравнении из (2) положить $u = u_0$.

Аналогично каждой прямой $v = v_0 - const$ плоскости UOV с помощью того же преобразования (1) будет соответствовать некоторая линия в плоскости XOY, параметрическими уравнениями которой будут: (4) $\begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0). \end{cases}$.

Неявное уравнение ее: $v(x, y) = v_0$ находится из второго уравнения (2), если в нем положить $v = v_0$.

Таким образом, линии (3) и (4) характеризуются тем, что вдоль каждой из них одна из криволинейных координат u или v остается постоянной.

Такие линии называют координатными линиями, причем в общем случае они являются кривыми. Этим объясняется, что u и v, однозначно характеризующие положение т. M в плоскости XOY, называют криволинейными координатами.

Если теперь координате u придать различные постоянные значения, то в плоскости XOY получим целое семейство координатных линий. Точно также различным закрепленным значениям координаты v будет соответствовать другое семейство координатных линий в плоскости XOY.

В виду взаимно-однозначного соответствия между точками области (Q) и области (P), различные координатные линии одного семейства не пересекаются между собой и через каждую т. $M(x, y)$ области (P) пройдет одна линия семейства.

Таким образом, каждой сетке прямых $u = const$, $v = const$ на плоскости UOV будет отвечать сетка координатных линий на плоскости XOY. Другими словами каждая прямоугольная сетка на плоскости UOV перейдет в криволинейную сетку на плоскости XOY.

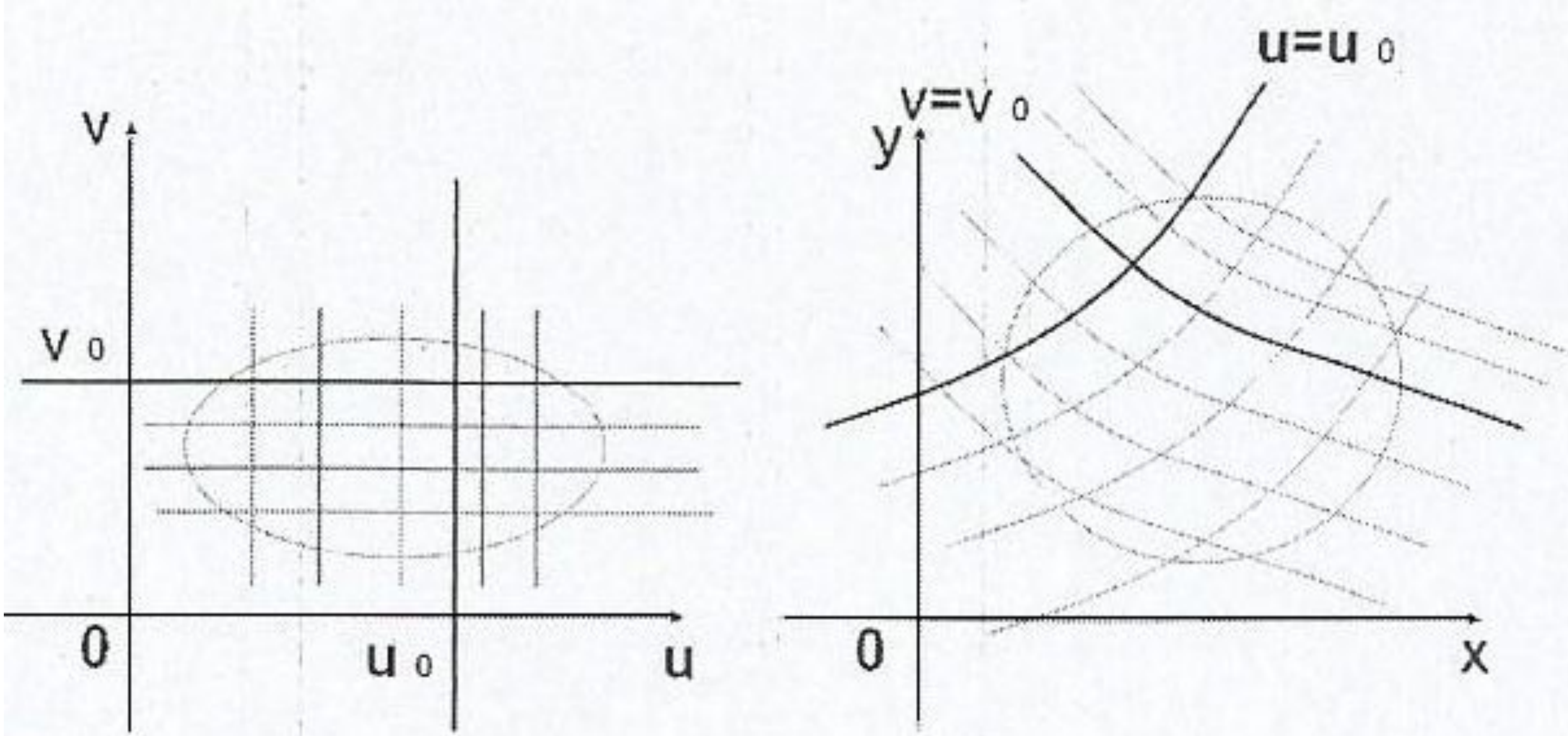


РИС. 4.

Простейшим примером криволинейных координат могут служить полярные координаты r и φ, которые связаны с прямоугольными координатами x и y формулами (5)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}.$$

Однако легко видеть, что это отображение не взаимно однозначно. Это видно хотя бы из того, что различным точкам (r, φ) и $(r, \varphi + 2\pi k), k \in Z$ плоскости $ro\varphi$ отвечает одна и та же точка (x, y) плоскости XOY. Более того, прямой $r = 0$ в плоскости $ro\varphi$ уравнения (5) сопоставляют одну точку (0; 0) плоскости XOY.

Для того, чтобы с помощью преобразования (5) получить все точки плоскости XOY, достаточно взять $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Эти условия означают, что точки (r, φ), им удовлетворяющие, не выходят из полосы, изображенной на РИС.5. Указанная полоса с помощью (5) отображается на ....?...

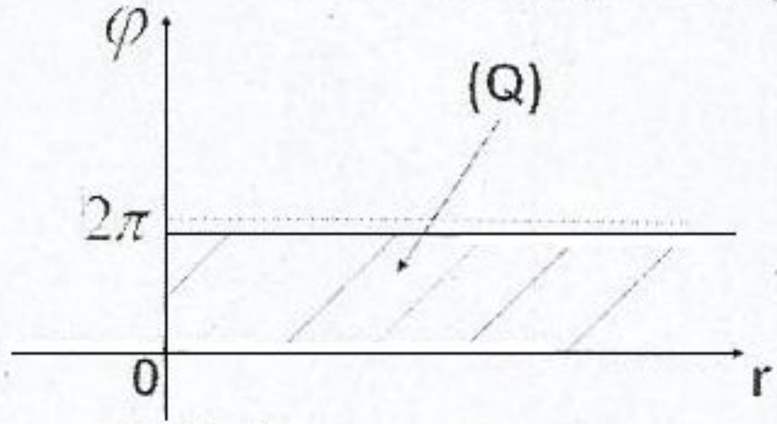
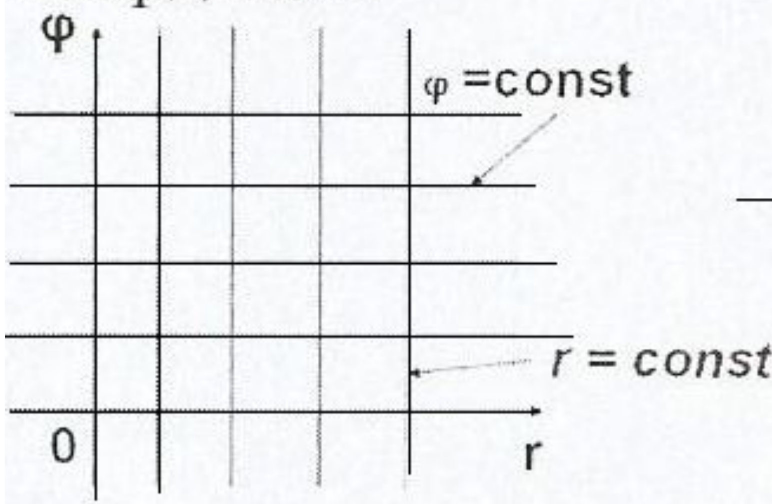


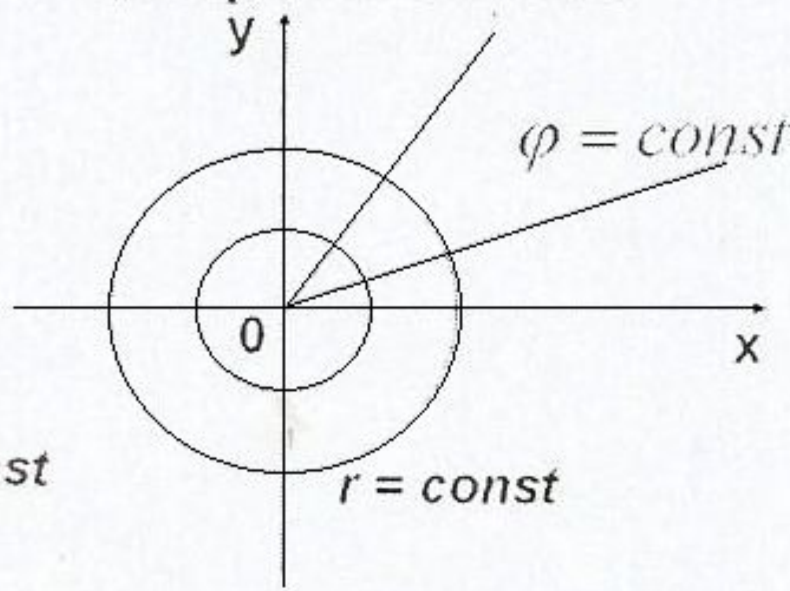
РИС. 5.

Указанная на РИС.5. полоса отображается с помощью формул (5) на всю координатную плоскость XOY. Это отображение взаимнооднозначно во всей внутренней части полосы. Взаимная однозначность нарушается только в точках контура.

В силу формул (5) прямым $\varphi = const$, $r = const$ плоскости соответствуют на плоскости XOY ...???

В силу формул (5) прямым $\varphi = const$, $r = const$ отвечают соответственно лучи, исходящие из начала координат под углом φ к оси OX (ее положительному направлению), и окружности радиуса r с центром в начале координат.





Следовательно в данном преобразовании одним семейством координатных линий является семейство лучей, исходящих из начала координат, другим - семейство концентрических окружностей с центром в начале координат.

1.9. Площадь в криволинейных координатах

Пусть соотношение

(1) $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$ взаимно однозначно отображает

ограниченную область (Q) плоскости UOV на область (P) в плоскости XOY. Будем предполагать, что функции $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка по u и v.

Поставим задачу найти выражение площади области (P) с помощью криволинейных координат u и v. Предполагаем, что области (P) и (Q) квадрируемы.

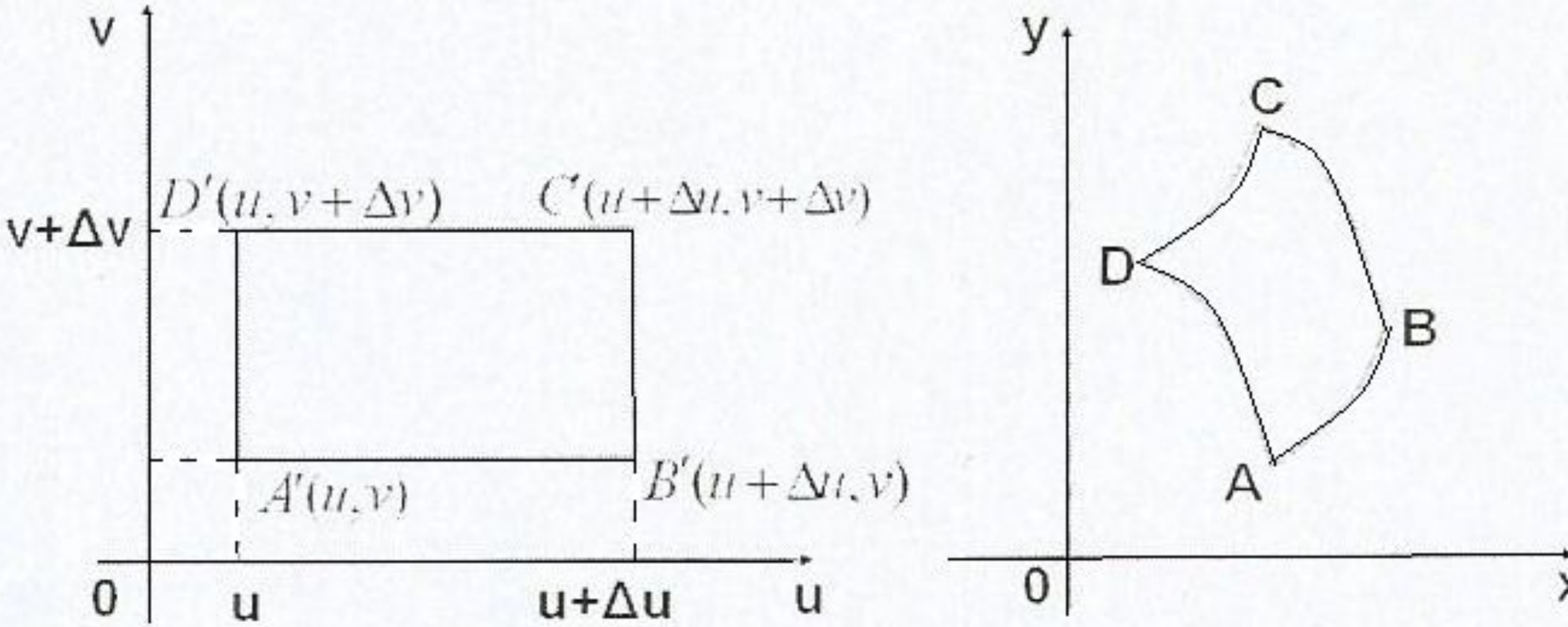
Разобьем (Q) на частичные с помощью прямых, параллельных координатным осям OU и OV. Тогда область (P) в силу преобразования (1) разобьется соответствующими координатными линиями на элементарные криволинейные четырехугольники.

Рассмотрим какой-нибудь элементарный прямоугольник (ΔQ) с вершинами $A'(u,v)$, $B'(u+\Delta u,v)$, $C'(u+\Delta u,v+\Delta v)$, $D'(u,v+\Delta v)$, где $\Delta u>0$, $\Delta v>0$, и соответствующий ему элементарный криволинейный четырехугольник (ΔP) в плоскости XOY с вершинами

$A(x(u,v),y(u,v))$, $B(x(u+\Delta u,v),y(u+\Delta u,v))$,

$C(x(u+\Delta u,v+\Delta v),y(u+\Delta u,v+\Delta v))$,

$D(x(u,v+\Delta v),y(u,v+\Delta v))$.



Найдем площадь четырехугольника с вершинами $A,\ B,\ C,\ D$.

Приступая к вычислению площади четырехугольника $ABCD$, заметим, что при достаточно малых Δu и Δv дуги $\smile AB$, $\smile AC$, $\smile CD$, $\smile DA$ будут достаточно малы и потому приближенно их можно считать прямолинейными. Кроме того приращение функций $x(u,v)$, $y(u,v)$ с большой точностью можно заменить соответствующими дифференциалами.

Таким образом, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с бесконечно малыми Δu и Δv, будем иметь:

$x(u+\Delta u, v) - x(u, v) \approx x_u'(u, v)\Delta u$, откуда

$x(u+\Delta u, v) \approx x(u, v) + x_u'(u, v)\Delta u$.

Аналогично

$$x(u + \Delta u, v + \Delta v) \approx x(u, v) + x_u{}'(u, v)\Delta u +$$

$$+x_v{}'(u, v)\Delta v.$$

$$x(u, v + \Delta v) \approx x(u, v) + x_v{}'(u, v)\Delta v.$$

Точно также:

$$y(u+\Delta u, v) \approx y(u, v) + y_u'(u, v)\Delta u.$$

$$y(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx y(u, v) + y_u'(u, v)\Delta u +$$

$$+ y_v'(u, v)\Delta v.$$

$$y(u, v+\Delta v) \approx y(u, v) + y_v'(u, v)\Delta v.$$

Тогда вершины четырехугольника $ABCD$ можно записать следующими приближенными значениями координат:

$A(x, y)$ - точные значения координат;

$B(x + x_u{}' \Delta u, y + y_u{}' \Delta u)$,

$C(x + x_u{}' \Delta u + x_v{}' \Delta v, y + y_u{}' \Delta u + y_v{}' \Delta v)$,

$D(x + x_v{}' \Delta v, y + y_v{}' \Delta v)$.

Координаты этих точек свидетельствуют о том, что проекции отрезков AB и CD на обе оси координат равны,

откуда следует, что эти отрезки равны и параллельны.

Тоже самое можно сказать об отрезках AD и BC.

Таким образом, с точностью до бесконечно малых высших порядков четырехугольник $ABCD$ можно рассматривать как параллелограмм, поэтому площадь $S_{\square ABCD} = 2S_{\triangle ABC}$.

Из геометрии известно, что удвоенная площадь $\triangle ABC$ с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ равна

$$2S_{\triangle ABC} = \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{matrix} \right\|.$$

В данном случае

$$2S_{\Delta ABC}=\left\|\begin{matrix} x_u{}'\Delta u & y_u{}'\Delta u \\ x_v{}'\Delta v & y_v{}'\Delta v \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_u{}' & y_u{}' \\ x_v{}' & y_v{}' \end{matrix}\right\| \Delta u \Delta v.$$

Введем обозначение $I(u,v)=\begin{vmatrix} x_u{}' & y_u{}' \\ x_v{}' & y_v{}' \end{vmatrix}$.

Этот определитель называется Якобианом или функциональным определителем функций $x(u,v)$, $y(u,v)$.

Итак, $\Delta P \approx \left| I(u,v) \right| \Delta u \Delta v. \quad (1)$

Выражение в правой части называют выражением площади в криволинейных координатах.

Пример. В случае преобразования полярных координат с помощью формул $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

будем иметь $x_r{}' = \cos\varphi,\ y_r{}' = \sin\varphi,$

$$x_\varphi{}' = -r\sin\varphi,\ y_\varphi{}' = r\cos\varphi.$$

Чему равен Якобиан?

Тогда Якобиан $I(r,\varphi)=\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}=$

$=r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r.$

Значит для элемента площади имеем

$\Delta P = r\Delta r\Delta\varphi.$

Так как $\Delta u \Delta v = \Delta Q$ - площадь прямоугольника $A'B'C'D'$, то из равенства (1) находим

$$\left|I(u,v)\right| = \frac{\Delta P}{\Delta Q} \quad (2).$$

Приближенное равенство (2) будет тем точнее, чем меньше Δu и Δv. Следовательно, в пределе при стремлении Δu и Δv к нулю, т.е. при сжатии области (ΔQ) в точку (u, v) получим точное равенство

$$\left|I(u,v)\right| = \lim_{\Delta u \to 0, \Delta v \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta Q}.$$

Итак, величина $|I(u,v)|$ показывает увеличивается или уменьшается элемент площади в окрестности т. (u,v) плоскости UOV при отображении с помощью $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$ в окрестности соответствующей т. (x,y) в плоскости XOY.

Таким образом, $|I(u,v)|$ является как бы коэффициентом растяжения области (Q) в данной ее т. (u,v) при отображении ее на область (P).

Просуммируем площади элементарных четырехугольников, получим приближенное выражение площади фигуры (P):

$$P \approx \sum \left| I(u,v) \right| \Delta u \Delta v \qquad (2).$$

Это равенство тем точнее, чем мельче разбиение области (Q).

Переходя к пределу при $\max \Delta u \to 0$ и $\max \Delta v \to 0$, получим точное равенство. Но сумма в правой части равенства (2) представляет интегральную сумму для интеграла $\iint\limits_{(Q)} \left| I(u,v) \right| du dv$, из которой выброшены слагаемые, отвечающие неправильным участкам, расположенным вдоль контура области (Q).

Поскольку доля, вносимая в интегральную сумму неправильными участками становится сколь угодно малой по мере того как разбиение становится все более мелким, переход к пределу в приближенном равенстве (2) приводит к точной формуле

$$P = \iint\limits_{(Q)} \left| I(u, v) \right| du dv \qquad (3)$$

1.10. Замена переменных в двойном интеграле

Т. Пусть дан двойной интеграл,

(1) $I = \iint\limits_{(P)} f(x, y)dxdy$, где f непрерывна в ограниченной области (P). Если функции (2) $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ непрерывны со своими частными производными первого порядка в ограниченной области (Q) и взаимно однозначно отображают эту область на область (P), то имеет место формула

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(Q)} f(x(u, v), y(u, v))\left|I(u, v)\right| dudv \quad (3),$$

где $I(u, v)$ - Якобиан для функций (2).

Доказательство

Доказательство теоремы состоит
из двух частей:

1) доказательства существования интегралов, содержащихся в формуле (3);

2) доказательства равенства (3).

1. Оба интеграла, стоящие в левой и правой части равенства (3) существуют. ПОЧЕМУ?

Указанные интегралы существуют в виду непрерывности функций f, $x(u,v)$, $y(u,v)$ и частных производных функций $x(u,v)$, $y(u,v)$.

2. Перейдем к доказательству равенства (3).

Двойной интеграл (1) $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$

по определению есть предел интегральной

суммы $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta P_i$. При этом разбиение

области (P) и выбор точек (ξ_i, η_i) на каждом

частичном участке (ΔP_i) можно осуществить

произвольно.

Разобъем область (Q) на части $(Q_1),(Q_2),\ldots,(Q_n)$, например, прямыми, параллельными координатным осям OU и OV и примем за (P_i) образ частичной области (Q_i) при преобразовании по формулам (2).

Тогда площадь ΔP_i области (P_i) равна

$$\Delta P_i = \iint\limits_{(Q_i)} \left|I(u,v)\right| dudv,\ i=\overline{1,n}.$$

?

Последнее равенство записано на основании формулы (3) из 1.9.

По теореме о среднем значении на каждом участке (Q_i) найдётся такая точка $N_i(u_i^0, v_i^0)$, что $\Delta P_i = \left| I(u_i^0, v_i^0) \right| \Delta Q_i$.

Обозначим через M_i образ точки N_i при отображении (2), т.е. будем считать $\xi_i = x(u_i^0, v_i^0)$, $\eta_i = y(u_i^0, v_i^0)$. Тогда интегральная сумма σ может быть записана в виде:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x(u_i^0, v_i^0), y(u_i^0, v_i^0)\right) \left| I(u_i^0, v_i^0) \right| \Delta Q_i \qquad (4)$$

Что собой представляет эта сумма?

Последняя сумма представляет интегральную сумму для интеграла в правой части равенства (3).

Заметим, что если диаметр участка (Q_i) мал, то в силу равномерной непрерывности функций (2) будет мал и диаметр соответствующего участка (P_i).

Точнее, если наибольший из диаметров областей (Q_i) устремить к нулю, то и наибольший из диаметров областей (P_i) будет стремиться к нулю.

Таким образом, если в равенстве (4) перейти к пределу при одновременном стремлении к нулю наибольшего из диаметров областей (P_i) и (Q_i), то слева получится интеграл (1), а справа двойной интеграл

$$\iint\limits_{(Q)} f(x(u,v),y(u,v))\left|I(u,v)\right|dudv.$$

Правило замены переменных в двойном интеграле :

Для того, чтобы преобразовать двойной интеграл (1) к криволинейным координатам, нужно заменить в подинтегральной функции $f(x, y)$ переменные x и y выражениями (2), а элемент площади $dxdy$ его выражением в криволинейных координатах.

1.11. Двойной интеграл в полярных координатах

Если требуется в двойном интеграле $\iint\limits_{(P)} f(x, y)dxdy$ перейти к полярным координатам $u = r, v = \varphi$ по известным формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

, то Якобиан $I(r, \varphi) = r$

и поэтому формула перехода к полярным координатам примет вид ....???

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{(Q)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

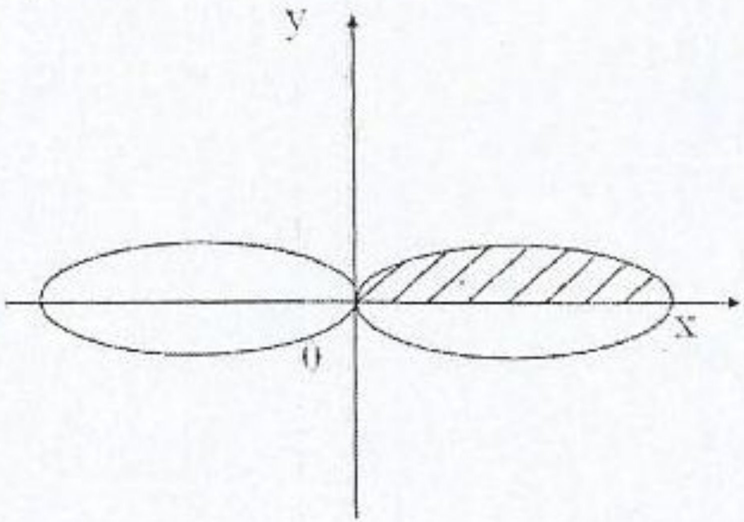
Пример 1.

Вычислим площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

Перейдем к полярным координатам по известным формулам $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$.

Уравнение лемнискаты в полярных координатах

будет иметь вид $r^4 = 2a^2r^2\cos 2\varphi$ или $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$



$$S = \iint\limits_D dxdy = 4\iint\limits_P rdrd\varphi =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rdr =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\varphi d\varphi = 4a^2\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

1.12. Тройной интеграл

1.12.1. Понятие тройного интеграла

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ задана в кубируемой области $(V) \subset \mathbb{R}^3$.

Рассмотрим произвольное разбиение области (V) на n частичных областей (V_1), (V_2), ..., (V_n). В каждой частичной области (V_i) выберем произвольно точку (ξ_i, η_i, ζ_i), вычислим значение функции f в каждой выбранной точке $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и умножим найденное значение на объем ΔV_i соответствующей частичной области V_i: $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$.

Все найденные произведения просуммируем:

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.$$

Эта сумма называется интегральной суммой функции f в области V.

Если существует предел интегральной суммы σ_n при $d \to 0$ (d – диаметр разбиения области (V) на частичные) и не зависит от способа разбиения области (V) на частичные и выбора точек (ξ_i, η_i, ζ_i) в областях (V_i), он называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ на области V.

$$\lim_{d \to 0} \sigma_n = I - \text{ тройной интеграл.}$$

Обозначение:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \lim_{d\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i.$$

Если тройной интеграл существует, то f называется интегрируемой в области (V).

СФОРМУЛИРУЙТЕ, ЧТО ОЗНАЧАЕТ СУЩЕСТВОВАНИЕ

$$\lim_{d\to 0}\sigma_n = I.$$

1.12.2. Необходимое условие интегрируемости функции f в области (V)

Теорема 1. Если f интегрируема в области (V), то она ограничена в этой области.

1.12.3. Необходимое и достаточное условие существования тройного интеграла

Пусть f ограничена в области (V), тогда f ограничена в каждой частичной области (V_i) при любом разбиении (V) на частичные и существуют $m_i = \inf\left\{f(x,y,z)\middle|(x,y,z)\in(V_i)\right\}$.

$M_i = \sup\left\{f(x,y,z)\middle|(x,y,z)\in(V_i)\right\}$.

Составим $s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta V_i$ и $S = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta V_i$; $s \le \sigma_n \le S$.

Теорема 2.

Для существования тройного интеграла необходимо и достаточно, чтобы

$\lim_{d \to 0}(S - s) = 0$ или $\lim_{d \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta V_i = 0$, где

ω_i – колебание функции f в области (V_i).

Теорема 3.

Если f непрерывна в кубируемой области (V), то она интегрируема в этой области.

Теорема 4.

$$(\forall(x,y,z)\in V)(f(x,y,z)=1)\Rightarrow \iiint\limits_{(V)} 1dV = V.$$

Доказательство.

$$(\forall(x,y,z)\in V)(f(x,y,z)=1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} 1\Delta V_i = V \Rightarrow \lim_{d\to 0}\sigma_n = \lim_{d\to 0} V = V.$$

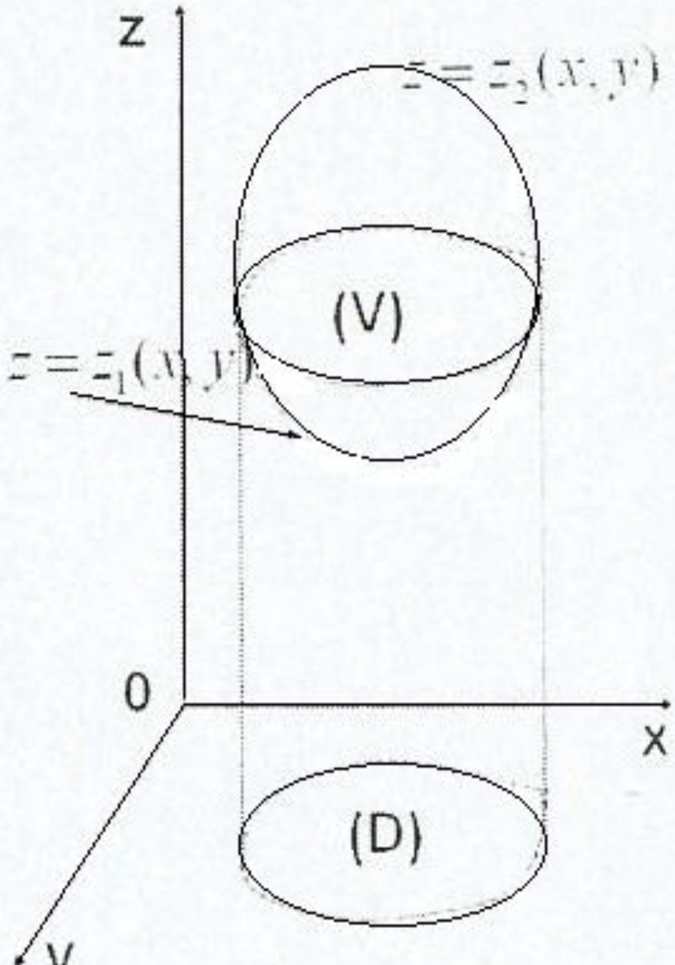
Замечание. Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам двойного интеграла.

В формулировках свойств следует плоскую область интегрирования заменить на пространственную область (V). Например, свойство об ограниченности двойного интеграла будет звучать так: "Если в области (V) функция f удовлетворяет неравенствам $m \leq f(x,y,z) \leq M$, то $mV \leq \iiint f(x,y,z)dV \leq MV$".

1.13. Вычисление тройного интеграла

Вычисление тройного интеграла также может быть осуществлено посредством трех последовательных однократных интегрирований.

Пусть $u = f(x, y, z)$ функция непрерывна в некоторой кубируемой области (V). Допустим, что поверхность (S), ограничивающая тело, пересекается любой прямой, параллельной оси OZ, не более чем в двух точках.



Опишем около поверхности (S) цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси OZ. Линия касания этой цилиндрической поверхности с поверхностью (S) разобьет (S) на две поверхности: нижнюю $z = z_1(x, y)$ и верхнюю $z = z_2(x, y)$, где $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ - непрерывные функции в плоской области (D), являющейся проекцией тела (V) на плоскость XOY.

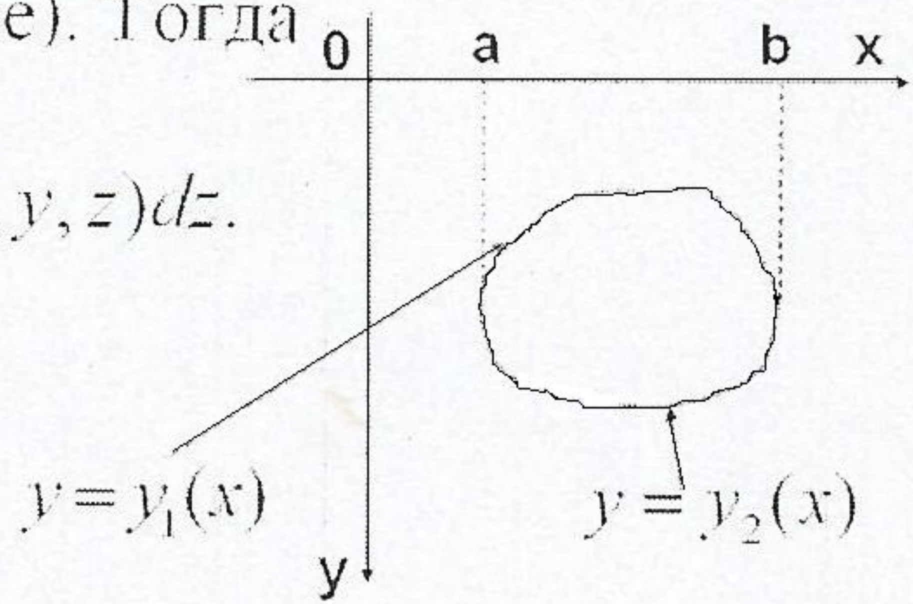
В этом случае вычисление тройного интеграла сводится к вычислению внутреннего интеграла по переменной z (при постоянных x и y) и внешнего по области (D).

$$I = \iiint\limits_{V} f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{V} f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Предположим, что (D) тоже имеет довольно простую форму, ограниченную непрерывными кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (причем любая прямая, параллельная оси oy пересекает каждую из них не более чем в одной точке). Тогда

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$



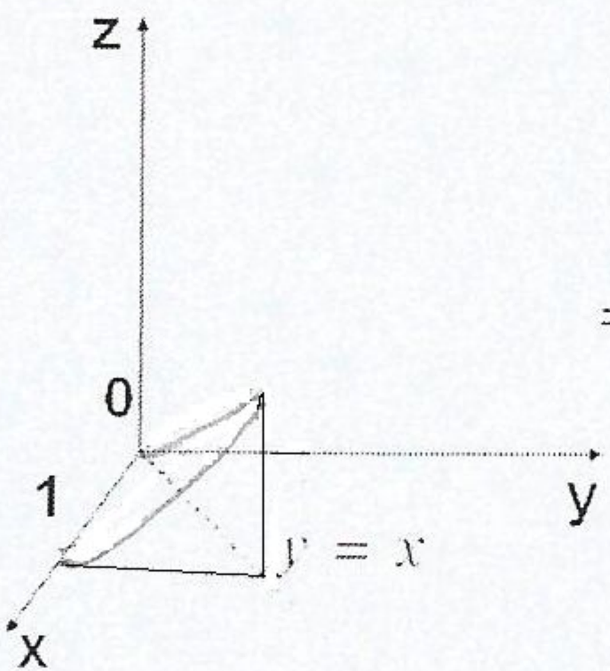
Замечание. Порядок интегрирования может быть выбран другим. Это будет зависеть от формы поверхности (S), ограничивающей тело (V). Тело (V) можно проектировать на плоскость XOZ или YOZ.

Пример. Вычислим $\iiint\limits_{V} x^3y^2z\,dxdydz$, где (V) определяется неравенствами: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le xy$.

$$\iiint\limits_{(V)} x^3y^2z\,dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz = \int_0^1 x^3dx\int_0^x y^2\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{xy} dy =$$

$$= \int_0^1 x^3dx\int_0^x \frac{x^2y^4}{2}dy = \int_0^1 \frac{x^5}{2}dx\int_0^x y^4dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^5\left.\frac{y^5}{5}\right|_0^x dx = \frac{1}{10}\int_0^1 x^{10}dx = \left.\frac{x^{11}}{10\cdot 11}\right|_0^1 = \frac{1}{110}.$$



1.14. Замена переменных в тройном интеграле

Идеи, развитые в связи с преобразованием плоских областей, переносятся и на случай пространственных областей.

Пусть имеем пространство, отнесенное к прямоугольной системе координат XYZ, и другое пространство с системой координат UVW. Рассмотрим замкнутые области (D) и (Δ) этих пространств, ограниченные соответственно поверхностями (S) и ($\sum$), которые будем предполагать кусочно гладкими.

Допустим, что эти области связаны между собой взаимно однозначным соответствием, осуществляемым по формулам:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases}$$ где функции x, y, z

непрерывны вместе со своими частными производными в (Δ).

Числа u, v, w, однозначно характеризующие положение точки в пространстве XYZ, называются ее .... координатами.

ВСТАВЬТЕ ПРОПУЩЕННОЕ СЛОВО!

Числа u, v, w, однозначно характеризующие положение точки в пространстве XYZ, называются ее криволинейными координатами. Точки пространства XYZ, для которых одна из этих координат сохраняет постоянное значение, образуют координатную поверхность. Всего будет существовать три семейства таких координатных поверхностей. Через каждую точку области (D) проходит по одной поверхности каждого семейства.

Аналогично тому как был выражен элемент площади в криволинейных координатах, можно получить элемент объема в криволинейных координатах:

$$\Delta D = \left| I(u,v,w) \right| \Delta u \Delta v \Delta w, \text{ где}$$

$$I(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix}.$$

Формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид ....???

Формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид:

$$\iiint\limits_{(D)} f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(\Delta)} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \Big| I(u, v, w)\, dudvdw.$$

1.15. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

1.15.1. Цилиндрические координаты

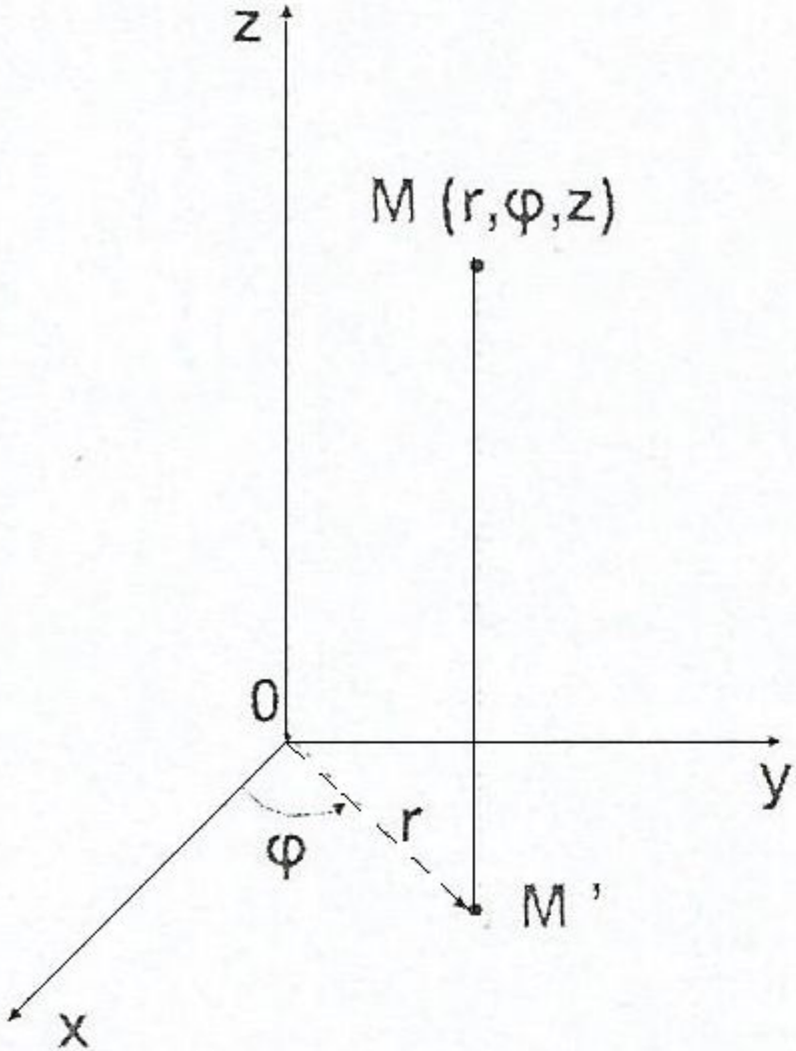


РИС. 1

В цилиндрической системе координат положение т. M пространства R^3 определяются полярными координатами r и φ т. M' - проекции т. M на плоскость XOY и аппликатой самой т. M.

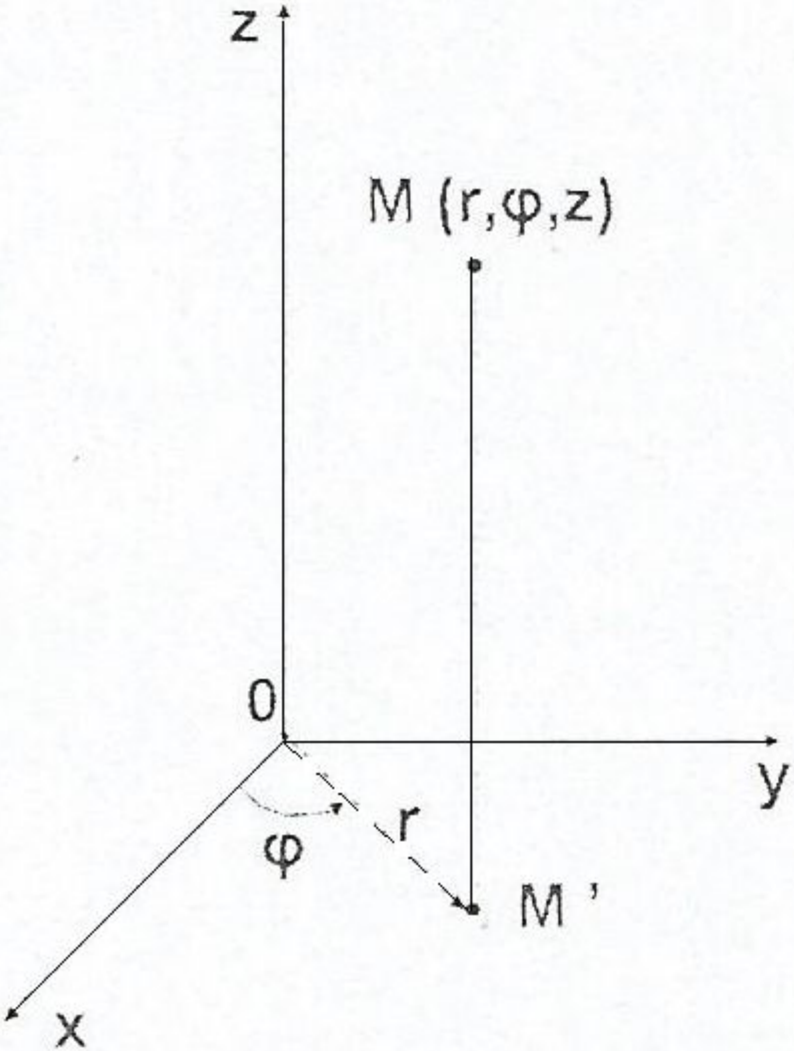


РИС. 1

Числа r, φ, z называются цилиндрическими координатами т. M, причем $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $z \in R$. Из РИС.1 видно, что x, y, z и r, φ, z связаны соотношениями:

$$(1)\ \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Якобиан перехода к цилиндрическим координатам будет равен

$$I(r,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

Какой вид будет иметь формула перехода в тройном интеграле к цилиндрическим координатам?

Формула перехода в тройном интеграле к цилиндрическим координатам будет иметь вид:

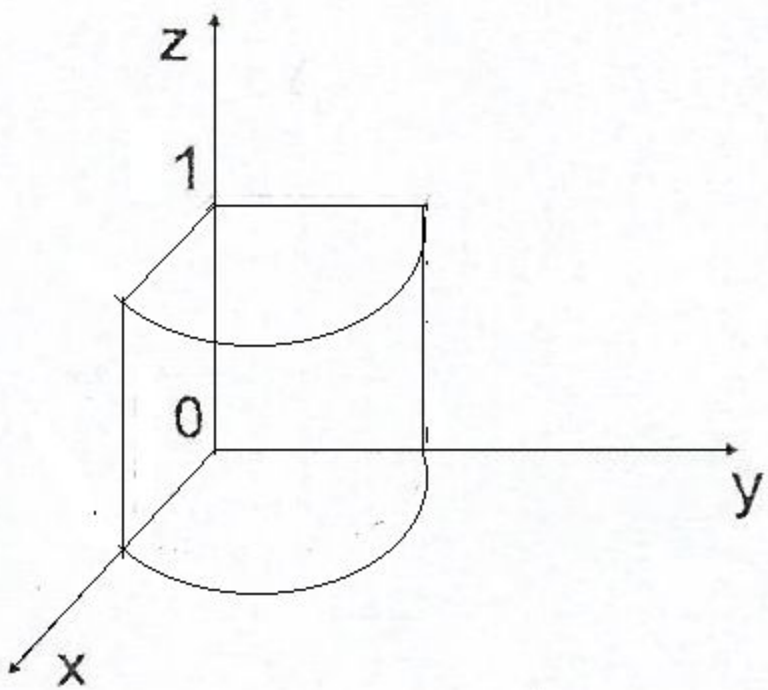
$$(2) \quad \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Пример 1. Вычислим $\iiint\limits_{(D)} xydxdydz$, где

(D) ограничена поверхностями:

$x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$, причем $x \geq 0$, $y \geq 0$.



Осуществим переход к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$ Тогда

$$\iiint\limits_{(D)} xy\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(D)} r^3 \cos\varphi \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr \int\limits_0^1 dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\sin\varphi = \frac{1}{4}\left.\frac{\sin^2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Если в формуле (2) положить $f(x, y, z) = 1$

в области (V), получим формулу для вычисления

объема тела (V) в цилиндрических координатах

$$(3) \quad V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \iiint\limits_{(V)} rdrd\varphi dz.$$

Выражение $dV = rdrd\varphi dz$ называется

элементом объема в цилиндрических

координатах.

Используя формулу (3) для вычисления объема прямого кругового цилиндра высоты H и радиусом основания R, будем иметь:

$$V = \iiint\limits_{(V)} r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\,dr \int_0^H dz = \pi R^2 H.$$