

Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} — выигрыш игрока A при стратегии A_i в состоянии природы Π_j

$$\begin{array}{c} \text{выигрыши игрока } A \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{природа } (\Pi)}$$

Матрица еще называется **матрицей доходности**, которая агрегирует информацию о возможной доходности вариантов стратегии при различных сценариях развития экономической ситуации.

Различают два вида задач в играх с природой:

1. Задачи о принятии решений в условиях неопределенности, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы

2. Задача о принятии решений в условиях риска, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний

Если будет принято ***i*-е** решение, а состояние внешней среды соответствует ***j*-й** ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход



Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

При решении Задачи о принятии решений в условиях неопределенности
для отбора вариантов стратегии применяют так называемые критерии оптимальности (альтернативные критерии оптимальности):

- ▶ критерий Вальда,
- ▶ критерий оптимизма,
- ▶ критерий пессимизма,
- ▶ критерий Сэвиджа,
- ▶ критерий Гурвица

1) **Критерий Вальда** (критерий гарантированного результата, максиминный критерий) позволяет выбрать наибольший элемент матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$W = \max_i \min_j a_{ij},$$

a_{ij} – элемент матрицы доходности.

Критерий Вальда предназначен для выбора из рассматриваемых вариантов стратегий варианта с наибольшим показателем эффективности из минимально возможных показателей для каждого из этих вариантов.

Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегий. Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно.

Применение критерия Вальда
оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- ▶ о вероятности наступления того или иного состояния природы ничего не известно;
- ▶ не допускается никакой риск;
- ▶ реализуется лишь малое количество решений.

Решение:

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(10; 12; 13) = 13$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3

2) **Критерий оптимизма** (критерий максимакса) предназначен для выбора наибольшего элемента матрицы доходности из её максимально возможных элементов:

$$M = \max_i \max_j a_{ij},$$

Критерий оптимизма используется, когда игрок оказывается в безвыходном положении, когда любой его шаг равновероятно может оказаться как абсолютным выигрышем, так и полным провалом.

Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятным для лица, принимающего решение. Вследствие этого, оптимальным выбором будет вариант с наибольшим значением показателя эффективности в матрице доходности.

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию оптимизма (M) является наибольший из показателей эффективности чистых стратегий.

Решение:

$$M = \max_i \max_j a_{ij} = \max(20; 16; 18) = 20$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1

3) **Критерий пессимизма** предназначен для выбора наименьшего элемента матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$P = \min_i \min_j a_{ij},$$

Критерий пессимизма предполагает, что развитие ситуации будет неблагоприятным для лица, принимающего решение.

При использовании этого критерия лицо принимающее решение ориентируется на возможную потерю контроля над ситуацией и, поэтому, старается исключить все потенциальные риски и выбрать вариант с минимальной доходностью.

Решение:

$$P = \min_i \min_j a_{ij} = \min(10;12;13) = 10$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1

4) **Критерий Сэвиджа**

(критерий минимаксного риска Сэвиджа)

предназначен для выбора максимального элемента **матрицы рисков** из её минимально возможных элементов:

$$S = \min_i \max_j r_{ij},$$

Необходимо провести оценку риска в условиях, когда реальная ситуация неизвестна. Если игрок знает, что осуществляется j -е состояние природы, то выбрал бы наилучшее решение, то есть то, которое принесет наибольший выигрыш

$$b_j = \max_{i=1, 2, \dots, n} (a_{ij}),$$

Принимая i -е решение, игрок A рискует получить не b_j , а только a_{ij} , то есть, если игрок примет i -е решение, а в природе реализуется j -е состояние, то произойдет недополучение дохода в размере:

$$r_{ij} = b_j - a_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$$

(по сравнению с тем, как если бы игрок знал точно, что реализуется j -е состояние природы, и выбрал бы решение, приносящее наибольший доход $b_j = \max(a_{ij}), j = 1, 2, \dots, n$)

a_{ij} – значение показателя доходности варианта стратегии с максимальной доходностью из имеющихся i -ых вариантов при наступлении j -ого сценария развития событий

$a_{\max j}$ - значение показателя доходности i -ого варианта стратегии при наступлении j -ого сценария развития событий (элемент платежной матрицы).

Матрица рисков (сожалений)

отражает риск реализации вариантов стратегии для каждой альтернативы развития событий (характеризует риск выбора определенного варианта стратегии), который будет зависеть от уровня риска варианта стратегии при наступлении различных сценариев.

Среди элементов матрицы рисков сначала выбирается максимальный риск при каждой стратегии, а затем из них выбирается минимальный. То есть в данном случае пессимистично настроенный игрок предполагает, что состояние природы будет таковым, что для любой его стратегии риск будет наибольшим, а стратегию выбирает такую, чтобы этот риск минимизировать.

Критерий Сэвиджа позволяет выбрать вариант стратегии с меньшей величиной риска по сравнению с более высоким, первоначально ожидаемым уровнем риска.

Данный критерий ориентирует лицо принимающее решение на более благоприятное развитие ситуации по сравнению с наихудшим состоянием, на которое то рассчитывало вначале.

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Сэвиджа называется минимальный показатель неэффективности среди показателей неэффективности всех чистых стратегий.

Теорема: Для того чтобы чистая стратегия была безрисковой, т.е. чтобы её показатель неэффективности по критерию Сэвиджа был нулевым, необходимо и достаточно, чтобы она доминировала каждую из остальных чистых стратегий.

Решение:

Применяем формулу $r_{ij} = a_{maxj} - a_{ij}$, построим матрицу рисков.

Матрица доходности

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Матрица рисков

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	0	3	5
A_2	4	6	1
A_3	7	0	0

$$S = \min_j \max_j r_{ij} = \min(5; 6; 7) = 5$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1

5) **Критерий Гурвица** (взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации) предназначен для выбора некоторого среднего элемента матрицы доходности, отличающегося от крайних состояний – от минимального и максимального элементов:

$$H = \max_i \lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \min_j a_{ij},$$

где λ – коэффициент оптимизма, $0 \leq \lambda \leq 1$

Коэффициент λ выражает количественно «меру оптимизма» игрока А при выборе стратегии и определяется им из субъективных соображений на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта лица принимающего решение в схожих ситуациях.

если λ коэффициент оптимизма, то $(1 - \lambda)$ коэффициент пессимизма

Критерий Гурвица позволяет избежать пограничных состояний при принятии решения – неоправданного оптимизма и крайнего пессимизма относительно ожидаемой доходности – и выбрать наиболее вероятный вариант стратегии, обеспечивающий наилучшую эффективность.

Критерий Гурвица ориентирован на установление баланса между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма при выборе стратегии путем взвешивания обоих исходов с помощью коэффициента оптимизма

Пример:

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гурвица.

$$\lambda = 0,5$$

Решение:

$$H = \max_i \lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \min_j a_{ij}$$

$$H_1 = (0,5 \cdot 20) + ((1 - 0,5) \cdot 10) = 10 + 5 = 15$$

$$H_2 = (0,5 \cdot 16) + ((1 - 0,5) \cdot 12) = 8 + 6 = 14$$

$$H_3 = (0,5 \cdot 18) + ((1 - 0,5) \cdot 13) = 9 + 6,5 = 15,5$$

$$H = \max_i (15; 14; 15,5) = 15,5$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3

Задача о принятии решений в условиях неопределенности

W (Вальда) $\rightarrow A_3$

M (оптимизма) $\rightarrow A_1$

P (пессимизма) $\rightarrow A_1$

S (Сэвиджа) $\rightarrow A_1$

H (Гурвица) $\rightarrow A_3$

Оптимальной является стратегия A_1