Математика. ИМИТ, 1 курс, 2 семестр

Лекция 3. Понятие определенного интеграла и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница

- ***Задача о массе стержня***
- ***Понятие определенного интеграла***
- ***Свойства определенного интеграла***
- ***Определенный интеграл с переменным верхним пределом***
- ***Формула Ньютона-Лейбница***

Глава 2. Определенный и несобственный интегралы

Определенный интеграл возник в связи с вычислением площадей и объемов фигур. К нему приводят и многие физические задачи, например, отыскание массы и центра тяжести неоднородного стержня.

4. Понятие определенного интеграла и его свойства

В школьном курсе математики определенный интеграл был введен с помощью первообразной. Мы рассмотрим другой подход − через интегральные суммы. Этот подход является более общим; с его помощью вводятся и другие типы интегралов − двойные, тройные, криволинейные, поверхностные.

Рассмотрим одну из задач, приводящую к понятию определенного интеграла.

4.1. Задача о массе стержня

Рассмотрим тонкий стержень, поперечными размерами которого можно пренебречь. Стержень мысленно представим в виде отрезка $[a,b]$ на оси Ox. Пусть известна плотность распределения массы $\gamma(x)$ в каждой точке x стержня. Пусть функция $\gamma(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

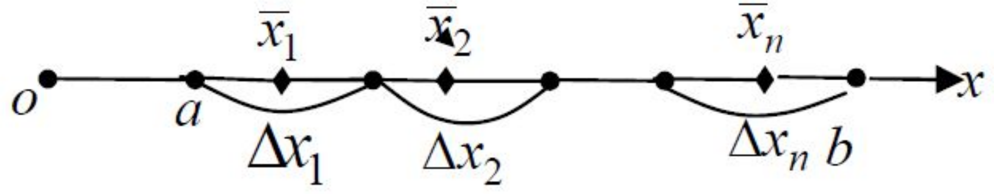

Рис.1

Для вычисления массы стержня разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей (ячеек) с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ (рис.1). В этих ячейках выберем произвольно точки $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$. В силу непрерывности функции $\gamma(x)$ и малости каждой ячейки плотность в точках ячейки можно приблизительно считать постоянной, равной плотности в выбранной точке. Тогда масса ячейки приближенно равна произведению плотности на длину ячейки. Обозначив массы ячеек $\Delta m_1, \Delta m_2, ..., \Delta m_n$, получим:

$$\Delta m_1 \approx \gamma(\overline{x}_1)\cdot\Delta x_1, \quad \Delta m_2 \approx \gamma(\overline{x}_2)\cdot\Delta x_2, ..., \quad \Delta m_n \approx \gamma(\overline{x}_n)\Delta x_n \ .$$

Суммируя массы всех ячеек, получим приближенное значение массы m стержня

$$m \approx \gamma(\overline{x}_1)\cdot\Delta x_1 + \gamma(\overline{x}_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + \gamma(\overline{x}_n)\cdot\Delta x_n .$$

Для краткой записи такой суммы используют специальный символ $\sum$, рядом с ним записывают произвольное k – е слагаемое $\gamma(\overline{x}_k)\cdot\Delta x_k$ и указывают, что k меняется от l до n. Итак, $m \approx \sum_{k=1}^{n}\gamma(\overline{x}_k)\cdot\Delta x_k$. Это приближенное равенство будет тем точнее, чем меньше длины всех ячеек (или максимальная из длин ячеек, обозначим ее d). Точное значение массы стержня определяется как предел этой суммы при d стремящемся к нулю:

$$m = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\gamma(\overline{x}_k)\cdot\Delta x_k \quad . \qquad (4.1)$$

Этот предел называется определенным интегралом от функции $\gamma(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b \gamma(x)\,dx$.

К пределам такого типа приводят и другие задачи, например, о площади плоской фигуры или о работе переменной силы по прямолинейному перемещению. Абстрагируясь от конкретных задач, дадим общее понятие определенного интеграла.

4.2. Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Так же, как и в задаче о массе стержня, разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n ячеек с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. В этих ячейках выберем произвольно точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$

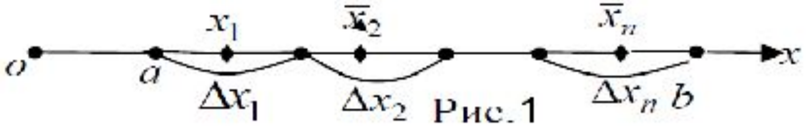

Рис.1

Составим сумму $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$. Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$. Найдем предел интегральной суммы при стремлении к нулю максимальной из длин ячеек d.

Определение. Если существует предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$ при $d \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и от выбора промежуточных точек $\bar{x}_k$, то этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\cdot\Delta x_k}\,. \qquad (4.2)$$

При введении определенного интеграла мы предполагали, что $a<b$. При $a>b$ полагают $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. При $a=b$ полагают $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Функция $f(x)$, для которой на отрезке $[a,b]$ существует определенный интеграл, называется интегрируемой на этом отрезке. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок $[a,b]$ – промежутком интегрирования, x – переменной интегрирования.

Пример 4.1. Показать, что $\int_a^b d\,x = b-a$.

Воспользуемся определением интеграла для функции $f(x)=1$ и тем, что сумма длин ячеек равна длине всего промежутка интегрирования. Тогда

$$\int_a^b dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\cdot\Delta x_k = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \lim_{d\to 0}(b-a) = b-a\,.$$

4.3. Свойства определенного интеграла

Установим, исходя из определения, некоторые свойства определенного интеграла. Будем при этом предполагать, что все рассматриваемые ниже интегралы существуют.

Свойство 1. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то есть

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt}\,. \tag{4.3}$$

Действительно, от обозначения переменной значения функции, а значит, и интегральной суммы и интеграла не изменится.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, то есть

$$\boxed{\int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx}\,. \tag{4.4}$$

Действительно, для любого разбиения отрезка $[a,b]$ на ячейки и любого выбора промежуточных точек $\bar{x}_k$ имеем:

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k = \lim_{d\to 0} \lambda \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k = \lambda \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k = \lambda \int_a^b f(x)\,dx .$$

Свойство 3. Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от слагаемых, то есть

$$\boxed{\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}\ . \tag{4.5}$$

Вывод этого свойства аналогичен предыдущему. Заметим, что свойство 3 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Свойство 4. Для любого расположения точек *a, b, c*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}. \tag{4.6}$$

Свойство 5 (об интегрировании неравенств). Если $f(x) \geq g(x)$ на $[a,b]$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.} \qquad (4.7)$$

Действительно, так как $f(x) \geq g(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k \geq \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\overline{x}_k)\,\Delta x_k = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Свойство 6 (об оценке интеграла). Если $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a,b]$, то

$$\boxed{m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)}\,. \qquad (4.8)$$

Оценка интеграла следует из свойства 5 и того факта, что $\int_a^b dx = b - a$.

Действительно, так как $f(x) \geq m$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b m\,dx = m\int\limits_a^b dx = m(b-a)$.

Аналогично, так как $f(x) \leq M$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b M\,dx = M\int\limits_a^b dx = M(b-a)$.

Свойство 7 (об оценке модуля интеграла).

$$\boxed{\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx} \qquad (a \leq b). \tag{4.9}$$

Оценка модуля интеграла следует из свойств модуля: $-\left|f(x)\right| \leq f(x) \leq \left|f(x)\right|$.

Тогда из свойства 5 следует, что $-\int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx$,

и, следовательно, $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx.$

Пример 4.2. Оценить интеграл $\int\limits_{10}^{16} \frac{\sin x}{1+x^6}\,dx.$

Решение. Так как $|\sin x| \le 1$, а $1+x^8 > x^8$ и $x > 10$, то

$$\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right| = \frac{|\sin x|}{1+x^8} \le \frac{1}{1+x^8} < \frac{1}{x^8} < \frac{1}{10^8}.$$

Тогда, используя соотношение (4.9), получим:

$$\left|\int\limits_{10}^{16} \frac{\sin x}{1+x^8}\,dx\right| \le \int\limits_{10}^{16} \left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right| dx \le \frac{1}{10^8}(16-10) < \frac{1}{10^7}.$$

Свойство 8 (теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется точка c такая, что

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)}\,. \qquad (4.10)$$

Выведем эту формулу. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего m и наибольшего M значений. Поэтому $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$. Тогда из соотношения (4.8) следует:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Разделим это неравенство на положительное число $b-a$:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M\,. \qquad (4.11)$$

Рассмотрим число μ равное $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Из равенства (4.11) следует, что $m \le \mu \le M$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает на этом отрезке все промежуточные значения между m и M. В частности, функция $f(x)$ принимает промежуточное значение μ в некоторой точке c отрезка $[a,b]$, то есть $f(c) = \mu$ или $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, или $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Замечание. Значение $f(c)$ из теоремы о среднем называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают f_{cp}. Таким образом,

$$\boxed{f_{cp}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}\ . \qquad (4.12)$$

Понятие среднего значения функции на отрезке является обобщением среднеарифметического значения на случай непрерывной величины. Именно так определяется в технике среднее значение давления пара, среднее значение мощности переменного электрического тока и т. п.

4.4. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $x \in [a,b]$. Рассмотрим интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$. Каждому x из отрезка $[a,b]$ соответствует определенное число – значение этого интеграла, то есть интеграл является функцией от x, определенной на $[a,b]$. Обозначим эту функцию $\Phi(x)$. Итак,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x). \tag{4.13}$$

Теорема. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда производная определенного интеграла от этой функции по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на верхнем пределе, то есть

$$\boxed{\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Для вычисления производной функции $\Phi(x)$ придадим x приращение Δx и вычислим приращение функции $\Phi(x)$, воспользовавшись равенством (4.13) и свойством 4:

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \left[\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right] - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

К полученному интегралу применим теорему о среднем:

$\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\overline{x})\cdot\Delta x$, где $\overline{x}$ заключено между x и $x+\Delta x$ (рис.2). Тогда

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \frac{f(\overline{x})\Delta x}{\Delta x} = f(\overline{x})$$

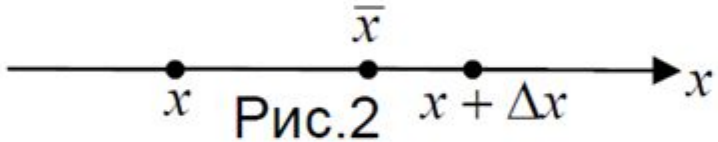

Рис.2

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользуемся непрерывностью функции $f(x)$ и тем, что $\overline{x} \to x$ при $\Delta x \to 0$ (рис.2). Тогда

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x}\to x} f(\overline{x}) = f(x).$$

5. Вычисление определенного интеграла

5.1. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ − одна из ее первообразных на этом отрезке. Функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ также является первообразной для функции $f(x)$ на $[a,b]$, так как $\Phi'(x)=f(x)$ в силу равенства (4.14). Две первообразные функции $f(x)$ отличаются на константу, то есть $\Phi(x)=F(x)+C$ для $x\in[a,b]$ или

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt=F(x)+C. \tag{5.1}$$

В частности, при $x=a$ равенство (5.1) примет вид:

$$\int\limits_a^a f(t)\,dt=F(a)+C. \tag{5.2}$$

Вычитая из равенства (5.1) равенство (5.2) и учитывая, что $\int\limits_a^a f(t)\,dt = 0$, получим

$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$, $x \in [a,b]$. При $x = b$ это равенство примет вид

$$\boxed{\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}\ . \tag{5.3}$$

Полученная формула называется формулой Ньютона-Лейбница. В ней $f(t)$ – функция, непрерывная на $[a,b]$, $F(t)$ – любая ее первообразная.

Разность $F(b)-F(a)$ принято условно записывать в следующем виде:

$$F(b) - F(a) = F(t)\Big|_a^b \quad \text{или} \quad F(b) - F(a) = \big[F(t)\big]_a^b .$$

Тогда формула (5.3) примет вид: $\int_a^b f(t)\,dt = F(t)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, или, заменяя t на x, получим:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)}. \qquad (5.4)$$

Если вместо произвольной первообразной $F(x)$ записать неопределенный интеграл, то формула Ньютона-Лейбница примет вид

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b} \qquad (5.5)$$

Формула (5.5) дает простой и удобный метод вычисления определенного интеграла от непрерывной функции через неопределенный интеграл.

Пример 5.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$.

Решение. По формуле (5.5) имеем $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Пример 5.2. Вычислить $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx$ для функции $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \le x \le 1, \\ 3-x, & 1 < x \le 3. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся сначала свойством 4 определенного интеграла, а затем формулой (5.5). Тогда

$$\int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} e^x dx + \int\limits_{1}^{3} (3-x)\,dx = e^x \Big|_{0}^{1} - \frac{(3-x)^2}{2}\Big|_{1}^{3} = (e-1) - (0-2) = e+1.$$

Пример 5.3. Вычислить среднее значение функции $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ на отрезке $[1, e]$.

Решение. Среднее значение функции $f_{ср.}$ вычисляется по формуле (4.12):

$$f_{ср} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница (5.5) и тем, что $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$. Тогда

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x)\Big|_1^e = \arcsin(\ln e) - \arcsin(\ln 1) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

и $f_{ср} = \dfrac{\pi}{2(e-1)}$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить интегралы: *а*) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1+x}\, dx$, *б*) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$, *в*) $\int\limits_{0}^{1} \frac{d\,x}{x^2+4x+5}$.

Ответ: *а*) 2/3, *б*) 3/20, *в*) $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$.

2. Вычислить среднее значение функции на отрезке:

а) $f(x) = \cos^2 x \quad (0 \le x \le \pi)$, *б*) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x \quad (0 \le x \le \pi/4)$.

Ответ: *а*) $1/2$, *б*) $\pi/4 - 1$.