Лекция 3.

Энергия и работа. Удары.

Процесс передачи механического движения от одного материального объекта к другому или перехода механического движения в другие формы движения называется работой.

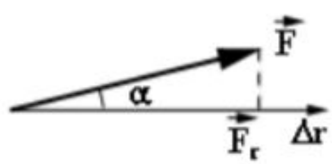
Таким образом, *энергия — мера количества любых видов движения, которым обладают тела некоторой системы, а работа — мера передачи механического движения от одного тела к другому или превращение его в другие виды движения в процессе взаимодействия.*

Очевидно, что работа и энергия должны измеряться в одних и тех же единицах.

Величина работы измеряется скалярным произведением вектора силы, действующей на данную материальную точку, на вектор её перемещения

$$\Delta A = \left(\vec{F}, \overrightarrow{\Delta r}\right) = F \cdot \Delta r \cos\left(\vec{F} \wedge \overrightarrow{\Delta r}\right).$$

Но $F\cos\left(\vec{F} \wedge \overrightarrow{\Delta r}\right)$ есть проекция силы на ось, совпадающую с перемещением Δr, т.е. $\Delta A = F_r \cdot \Delta r$



Если угол между вектором силы и вектором перемещения меньше 90˚, то работа *положительна.*

Если этот угол лежит в пределах от 90˚ до 180˚, то работа *отрицательна.*

Если сила *переменна,* то для расчёта работы перемещение следует разбить на такие элементарные перемещения, чтобы в пределах каждого из них можно было считать величину силы постоянной. Вычисляя работу на каждом элементарном перемещении и подсчитав алгебраическую сумму элементарных работ, получим полную работу переменной силы F на пути S

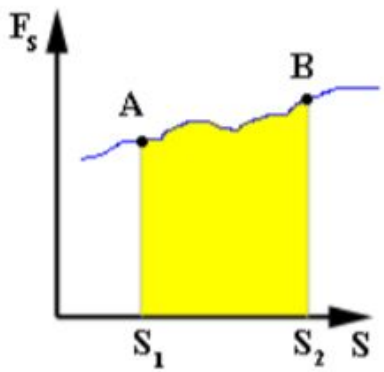
$$A = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \Delta r \cdot \cos\left(\overrightarrow{F_i} \wedge \overrightarrow{\Delta r_i}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta r \to 0$ получаем

$$A = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_r \cdot \Delta r = \int_S F_S \cdot dS .$$

Для вычисления интеграла надо знать зависимость силы F от S.

Работу можно вычислить также *графически*, если вспомнить геометрическое представление определённого интеграла.



Если $F_S = f(S)$ (рис. 26), работа численно равна величине площади заключенной между осью абсцисс, кривой АВ и ординатами кривой в начальной и конечной точке пути. Если на точку действует несколько сил, то *работа результирующей силы равна алгебраической сумме работ составляющих сил.*

Мощность — величина, численно равная работе, совершаемой силой в единицу времени

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Так как $dA = \left(\vec{F}, \vec{dr}\right)$, то, поделив левую и правую части этого равенства на dt, получим $N = \left(\vec{F}, \frac{\vec{dr}}{dt}\right)$ или

$$N = \left(\vec{F}, \vec{v}\right).$$

Мощность в каждый данный момент времени равна произведению проекции силы на направление перемещения на скорость движения.

Кинетическая энергия

В механике различают два вида энергии: кинетическую и потенциальную. *Кинетической* энергией называется энергия всякого движущегося тела.

Измерить изменение кинетической энергии тела можно с помощью работы, вызвавшей это изменение.

Следовательно, $A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W_K - W_{K_0}$.

Если начальная скорость тела равна нулю, то величина работы будет измерять его кинетическую энергию

Если система состоит из поступательно движущихся тел, то её кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий тел, входящих в эту систему

$$W_K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

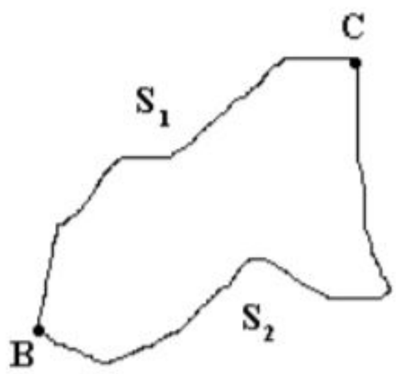
Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии поступательного движения системы со скоростью $\vec{v_0}$ *её центра масс и кинетической энергии* $W_K^{'}$ *системы в её относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчёта с началом в центре масс.*

Потенциальная энергия

Энергию, зависящую от взаимного положения взаимодействующих тел или частей тела, называют *потенциальной энергией.*

Величину потенциальной энергии можно подсчитывать относительно *любого* начального уровня. Для того, чтобы иметь возможность сравнивать потенциальные энергии тел в полях тяготения, созданных различными телами, за общий нулевой уровень принимается уровень, находящийся в бесконечности ($W_n \to 0$ при $r \to \infty$).

Работа в поле силы тяжести не зависит от формы пути, а зависит только от положений начальной и конечной точек пути.



Поэтому работа, совершаемая по перемещению тела из В в С как по пути S_1, так и по пути S_2, будет одинаковой

$$A_{S_1} = A_{S_2}.$$

Очевидно, что работа, совершаемая по тому же самому пути, но в обратном направлении $A'_{S_1} = -A_{S_1}$.

Силы, характеризующие взаимодействия, в результате которых работа по замкнутому контуру равна нулю, называются *консервативными*. Механические системы, в которых действуют консервативные силы, называются *консервативными*. В консервативных системах нет перехода механического движения в другие формы движения и наоборот.

Силы, работа которых возрастает по величине при увеличении пути независимо от того, замкнут путь или нет, называются *диссипативными*. В этом случае механическая энергия переходит во внутреннюю энергию, и работа этих сил конечным и начальным положением тела определяется неоднозначно.

Сила гравитационного притяжения является частным случаем, так называемых, *центральных* сил. Сила называется центральной, если она направлена к одной и той же точке (или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой *центром сил* или *силовым центром*. Другим примером таких сил могут служить кулоновские силы электростатического взаимодействия.

Как видно из вывода работа центральных сил $A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr$ зависит только от расстояний r_1 и r_2 до силового центра и не зависит от формы пути.

Поле сил, в котором работа силы, действующей на точку, зависит не от пути, а только от конечного и начального положения точки, называется потенциальным полем. Следовательно, гравитационное поле — это потенциальное поле.

Значит, если сила является консервативной, то соответствующее ей поле является потенциальным.

Связь между потенциальной энергией и силой

Каждой точке потенциального поля соответствует, с одной стороны, некоторое значение вектора силы $\vec{F}$, действующей на тело, с другой стороны, некоторое значение потенциальной энергии тела W_n. Следовательно, между силой и потенциальной энергией должна существовать определённая связь.

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial W_n}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_n}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_n}{\partial z}\vec{k} \right)$$ или сокращённо

$$\vec{F} = -grad\, W_n.$$

Силы и потенциальная энергия

Взаимодействие тел можно описывать либо с *помощью сил*, либо *с помощью потенциальной энергии* как функции координат взаимодействующих частиц. В механике применяются оба способа.

Первый способ обладает несколько большей общностью, т.к. он применим и к таким силам, для которых нельзя ввести потенциальную энергию (например, силы трения).

Второй же способ применим только в случае консервативных сил. Зная действующие силы как функции координат материальных точек системы, можно вычислить её потенциальную энергию. Эта задача решается *интегрированием.*

Можно поставить и обратную задачу: вычислить действующие силы по заданной потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих материальных точек. Эта задача решается *дифференцированием.*

Закон изменения механической энергии

Полная механическая энергия W системы материальных точек складывается из её кинетической энергии $W_к$ и потенциальной энергии $W_п$, т.е.

$$W = W_k + W_n .$$

При движении точек системы под действием внутренних и внешних сил, действующих на эти точки, изменяются как скорости точек, так и их взаимное расположение. Следовательно, изменяются и кинетическая, и потенциальная энергия системы.

$$\Delta W = A_{дисс} + A_{внеш} .$$

Это выражение представляет собой *закон изменения механической энергии.*

Условие равновесия механической системы

В замкнутой консервативной системе полная энергия остаётся постоянной, поэтому кинетическая энергия может возрастать только за счёт уменьшения потенциальной энергии.

Если система находится в таком состоянии, что скорости всех тел равны нулю, а потенциальная энергия имеет минимальное значение, то без воздействия извне тела системы не могут прийти в движение, т.е. система будет находиться в равновесии.

Таким образом, *для замкнутой консервативной системы равновесной может быть только такая конфигурация тел, которая соответствует минимуму потенциальной энергии системы.*

Условие минимума W_n имеет вид

$$\frac{dW_{\bar{\imath}}}{dx} = 0 \text{ или } F = 0.$$

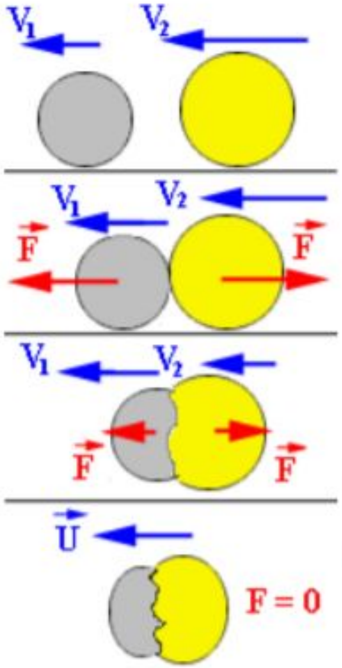
Таким образом, *конфигурация системы, соответствующая минимуму потенциальной энергии, обладает тем свойством, что силы, действующие на тела системы, равны нулю.*

Удар — это кратковременное взаимодействие тел, в результате которого резко изменяется состояние из движения. При этом считается, что как до, так и после удара тела не взаимодействуют.

В процессе удара происходит весьма быстрое перераспределение энергии между соударяющимися телами. При ударе оба тела *деформируются* и в результате возникают *силы взаимодействия*, *препятствующие деформациям,* т.е. направленные противоположно относительным скоростям соударяющихся тел. За счёт работы этих сил и происходит передача энергии от одного из соударяющихся тел другому.

Прямая, совпадающая с нормалью к поверхностям соударяющихся тел в точке их соприкосновения, называется *линией удара*. Если линия удара проходит через центры масс тел, удар называется *центральным.* Очевидно, что удар двух шаров всегда будет центральным. Если оба соударяющихся тела до удара двигались по линии удара, то удар называется прямым, в противном случае удар будет *косым.*

Прямой центральный удар является абсолютно неупругим, если скорости соударяющихся тел после удара оказываются одинаковыми, так что оба тела движутся далее вместе, оставаясь в соприкосновении друг с другом. После удара оба тела остаются деформированными.



Удар будет неупругим, когда силы взаимодействия между соударяющимися телами, возникающие при их соприкосновении, зависят лишь от быстроты их изменения, а не от величины деформации. Силы эти будут велики, если деформации, даже небольшие по величине, быстро изменяются. Когда же деформации будут изменяться достаточно медленно, то независимо от их величины силы взаимодействия будут малыми.

Следовательно, импульс обоих шаров как до удара, так и после него будет одинаковым

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Отсюда общая скорость шаров после удара

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}.$$

Из этого выражения видно, что после удара оба шара будут двигаться в сторону движения шара, обладавшего до удара б о́ л ь ш и м импульсом. В частности, если шары до удара двигались навстречу друг другу с *равными по величине импульсами* ($m_1v_1 = m_2v_2$), то их скорость после удара окажется *равной нулю*, в результате удара оба шара остановятся. Если скорости шаров до удара v_1 и $v_2 < v_1$ направлены в одну сторону, то после они будут двигаться в ту же сторону со скоростью u, заключённой в пределах $v_1 > u > v_2$.

Суммарная кинетическая энергия шаров после неупругого удара будет меньше, чем до удара, поскольку часть её безвозвратно расходуется на создание деформаций, не исчезающих и после удара, а превращается в конечном итоге в энергию молекулярно-теплового движения.

Таким образом, кинетическая энергия шаров после удара $W_{\hat{e}}^{'}$ равна разности между кинетической энергией до удара $W_{\hat{e}}^{0}$ и её потерями на совершение работы деформации A:

$$W_{\hat{e}}^{'} = W_{\hat{e}}^{0} - A.$$

До удара кинетическая энергия обоих шаров равна

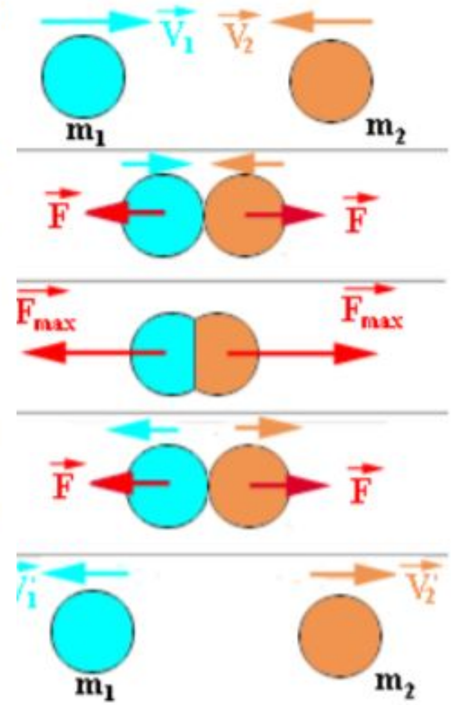
$$W_{\hat{e}}^{0} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

после удара
$$W_{\hat{e}}^{'} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Следовательно, работа деформации в процессе удара

$$A = W_{\hat{e}}^{0} - W_{\hat{e}}^{'} = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2,$$

Удар будет абсолютно упругим, если кинетическая энергия соударяющихся тел после удара оказывается такой же, как и до удара.



При абсолютно упругом ударе силы взаимодействия между соударяющимися телами являются упругими силами, зависящими только от величины их деформаций, тем большими по величине, чем больше деформации, и исчезающими с исчезновением деформаций.

При приближении соударяющихся тел, начиная с момента первоначального их соприкосновения, когда деформации возрастают, возрастают и упругие силы взаимодействия, препятствующие деформациям.

$$v_1' = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}.$$

В частном случае, если $m_1 = m_2 = m$, то получаем $v_2' = v_1$ и $v_1' = v_2$, т.е. тела обмениваются скоростями. Если одно из тел до удара покоилось, например, $v_2 = 0$, то $v_2' = v_1$ и $v_1' = 0$, а тело, бывшее до удара неподвижным, после удара начнёт двигаться со скоростью, равной скорости ударяющего тела.

Соотношение, выражающее равенство кинетической энергии обоих шаров как до, так и после удара может быть представлено в виде

$$\frac{m_1\left(v_{1\tau}^2 + v_{1n}^2\right)}{2} + \frac{m_2\left(v_{2\tau}^2 + v_{2n}^2\right)}{2} = \frac{m_1\left(v_{1\tau}'^2 + v_{1n}'^2\right)}{2} + \frac{m_2\left(v_{2\tau}'^2 + v_{2n}'^2\right)}{2}$$