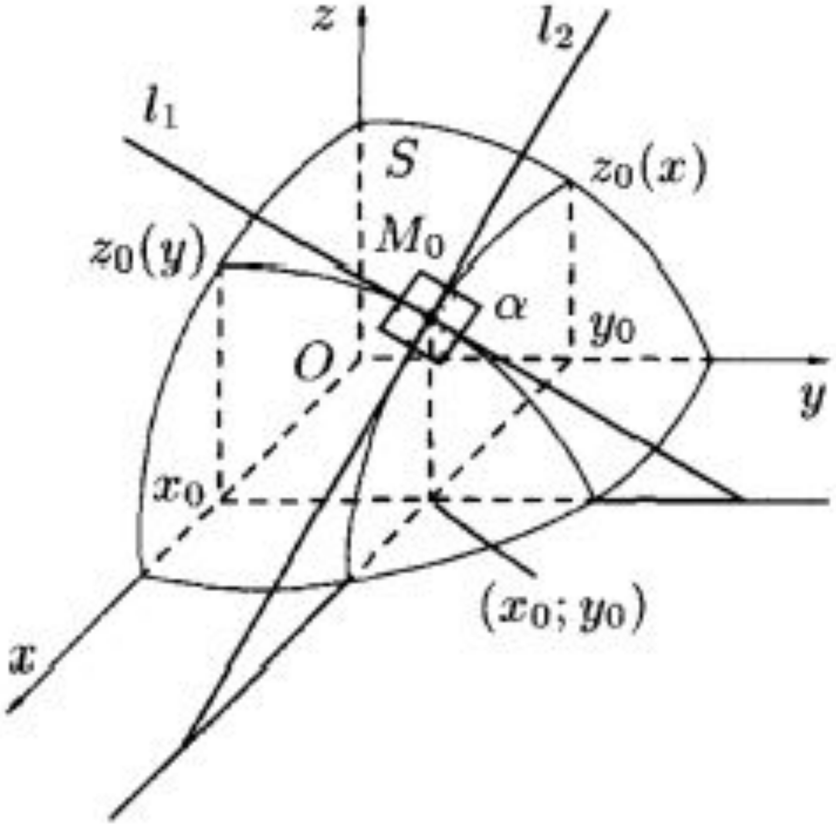
Функции нескольких переменных

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим одно из геометрических приложений частных производных функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$ некоторой области $D \in \mathbb{R}^2$. Рассечем



поверхность S, изображающую функцию z, плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ (см. рис.). Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии $z_0(y)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение исходной функции $z = f(x;y)$ вместо x числа x_0. Точка $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ принадлежит кривой $z_0(y)$. В силу дифференцируемости функции z в точке M_0 функция $z_0(y)$ также является дифференцируемой в точке $y = y_0$. Следовательно, в этой точке в плоскости $x = x_0$ к кривой $z_0(y)$ может быть проведена касательная l_1.

Проводя аналогичные рассуждения для сечения $y = y_0$, построим касательную l_2 к кривой $z_0(x)$ в точке $x = x_0$. Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α, которая называется *касательной плоскостью* к поверхности S в точке M_0.

Составим ее уравнение. Так как плоскость α проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, то ее уравнение может быть записано в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

которое можно переписать так:

$$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0)$$

(разделив уравнение на $-C$ и обозначив $\frac{A}{-C} = A_1$, $\frac{B}{-C} = B_1$).

Найдем A_1 и B_1.

Уравнения касательных l_1 и l_2 имеют вид

$$z - z_0 = f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0), \quad x = x_0;$$

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0), \quad y = y_0$$

соответственно.

Касательная l_1 лежит в плоскости α, следовательно, координаты всех точек l_1 удовлетворяют уравнению . Этот факт можно записать в виде системы

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0), \\ x = x_0, \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0). \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно B_1, получим, что $B_1 = f'_y(x_0; y_0)$.

Подставив значения A_1 и B_1 в уравнение , получаем искомое уравнение касательной плоскости:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0).}$$

Прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее ***нормалью***.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости (см. с. 103), легко получить канонические уравнения нормали:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.}$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x;y;z)=0$, то уравнения с учетом того, что частные производные могут быть найдены как производные неявной функции:

$$f'_x(x_0;y_0) = -\frac{F'_x(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}, \quad f'_y(x_0;y_0) = -\frac{F'_y(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}$$

примут соответственно вид

$$F'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0) + F'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0) + F'_z(x_0;y_0)\cdot(z-z_0) = 0$$

и

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0)}.$$

Замечание. Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности получены для обыкновенных, т. е. не особых, точек поверхности. Точка M_0 поверхности называется *особой*, если в этой точке все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует. Такие точки мы не рассматриваем.

Пример. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1; -1; 2)$.

◐ Решение: Здесь $z'_x = f'_x(x; y) = 2x$, $f'_y(x; y) = 2y$, $f'_x(1; -1) = 2$, $f'_y(1; -1) = -2$. Пользуясь формулами (45.2) и (45.3) получаем уравнение касательной плоскости: $z - 2 = 2 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y + 1)$ или $2x - 2y - z - 2 = 0$ и уравнение нормали: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$. ●

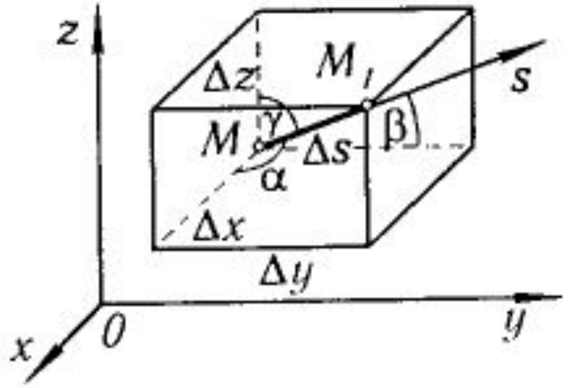
Пример. Составить уравнения касательной и нормали в точке $M_0(1;1)$ к кривой $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^3 + 2xy^3 - yx^4 - 2 = 0$.

Положим $F(x;y) = x^3 + 2xy^3 - yx^4 - 2$. Тогда $F(1;1) = 0$. Далее имеем $F'_y = 6xy^2 - x^4$, $F'_y(1;1) = 5$, $F'_x = 3x^2 + 2y^3 - 4x^3y$, $F'_x(1;1) = 1$. Условие $F'_y(1;1) \neq 0$ обеспечивает существование однозначной неявной функции $y(x)$ в окрестности точки $x_0 = 1$. Уравнение касательной к $y = y(x)$ имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = y'(x_0) = -\frac{1}{5}$, т.е. (t): $y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 1)$. Уравнение нормали имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$, т.е. (n): $y - 1 = 5(x - 1)$.

Ответ. $(t) : x + 5y - 6 = 0$, (n): $5x - y - 4 = 0$. ●

Производная по направлению

Рассмотрим в области D функцию $u = u(x, y, z)$ и точку $M(x, y, z)$. Проведем из точки M вектор $\boldsymbol{S}$, направляющие косинусы которого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$



На векторе $\boldsymbol{S}$, на расстоянии Δs от его начала, рассмотрим точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Таким образом,

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Будем предполагать, что функция $u(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по своим аргументам в области D.

Аналогично полное приращение функции представим так:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

где ε_1, ε_2 и ε_3 стремятся к нулю при $\Delta s \to 0$. Разделим все члены равенства на Δs:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Следовательно, равенство можно переписать так:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \varepsilon_3 \cos\gamma.$$

Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ называется *производной от функции* $u = u(x, y, z)$ *в точке* (x, y, z) *по направлению вектора* $\boldsymbol{S}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$, т.е.

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Таким образом, переходя к пределу в равенстве , получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma.$$

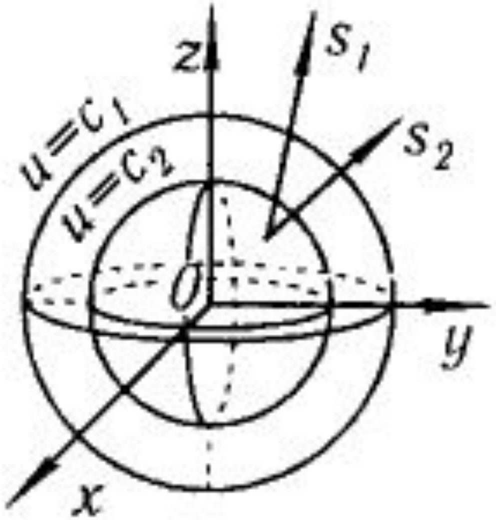
Из формулы следует, что, зная частные производные, легко найти производную по любому направлению $\boldsymbol{S}$. Сами частные производные являются частным случаем производной по направлению. Так, например, при $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = \pi/2$ получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\pi/2 + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\pi/2 = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Пример. Дана функция

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

Найти производную $\frac{\partial u}{\partial s}$ в точке $M(1,1,1)$: а) в направлении вектора $\boldsymbol{S}_1 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$; б) в направлении вектора $\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.



Решение. а) Находим направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{S}_1$:

$$\cos\alpha = 2/\sqrt{4+1+9} = 2/\sqrt{14},$$
$$\cos\beta = 1/\sqrt{14}, \quad \cos\gamma = 3/\sqrt{14}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

в точке $M(1,1,1)$ будут

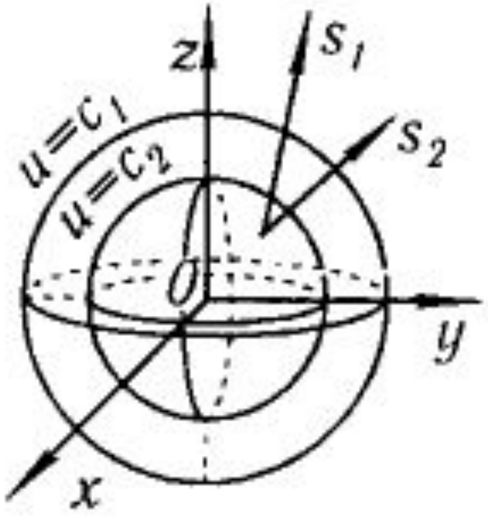
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 2.$$

Итак,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

б) Находим направляющие косинусы вектора S_2:

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{3}, \quad \cos\beta = 1/\sqrt{3}, \quad \cos\gamma = 1/\sqrt{3}.$$



Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Заметим для дальнейшего, что $2\sqrt{3} > 12/\sqrt{14}$.

Пример. Найти производную функции $z = f(x; y) = 3x^2 + 5y^2$ в точке $A(1; -1)$ по направлению к точке $B(2; 1)$.

❍ Имеем $\overline{AB} = \bar{l} = (2-1; 1+1) = (1; 2)$, $|\bar{l}| = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $\bar{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ — орт направления $\bar{l}$. Далее, имеем $z'_x = 6x$, $z'_y = 10y$, $z'_x(1; -1) = 6$, $z'_y(1; -1) = -10$, а значит $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1;-1)} = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{5}} = -\frac{14}{\sqrt{5}}$. Отрицательность $\frac{\partial z}{\partial l}$ означает, что функция в этом направлении убывает. ●

Градиент

В каждой точке области D, в которой задана функция $u = u(x, y, z)$, определим вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ этой функции в соответствующей точке:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Этот вектор называется *градиентом* функции $u(x, y, z)$. Говорят, что в области D определено *векторное поле градиентов*. Докажем, далее, следующую теорему, устанавливающую связь между градиентом и производной по направлению.

Теорема. *Пусть дано скалярное поле* $u = u(x, y, z)$ *и определено в этом скалярном поле поле градиентов*

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ *по направлению некоторого вектора* $\boldsymbol{S}$ *равняется проекции вектора* $\operatorname{grad} u$ *на вектор* $\boldsymbol{S}$.

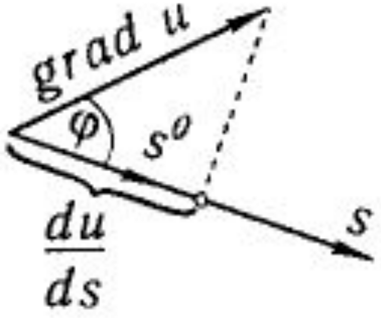
Доказательство. Рассмотрим единичный вектор $\boldsymbol{S}^0$, соответствующий вектору $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}^0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\operatorname{grad} u$ и $\boldsymbol{S}^0$:

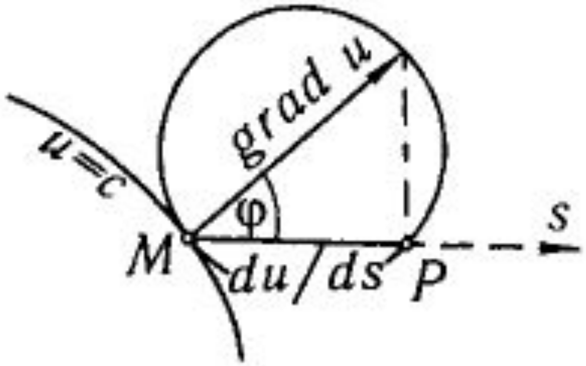
$$\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{S}^0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть производная от функции $u(x,y,z)$ по направлению вектора $\boldsymbol{S}$. Следовательно, мы можем написать:



$$\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{S}^0 = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Если обозначим угол между векторами $\operatorname{grad} u$ и $\boldsymbol{S}^0$ через φ, то можем написать:



$$|\operatorname{grad} u| \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$$

или

$$\text{пр.}_{S^0} \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Теорема доказана.

На основании доказанной теоремы наглядно устанавливается связь между градиентом и производной в данной точке по любому направлению. В данной точке $M(x, y, z)$ строим вектор $\operatorname{grad} u$ Строим сферу, для которой $\operatorname{grad} u$ является диаметром. Из точки M проводим вектор $\boldsymbol{S}$. Обозначим точку пересечения

вектора $\boldsymbol{S}$ с поверхностью сферы через P. Тогда очевидно, что $MP = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$, где φ — угол между направлениями градиента и отрезка MP (при этом $\varphi < \frac{\pi}{2}$), т.е. $MP = \frac{\partial u}{\partial s}$. Очевидно, что при изменении направления вектора $\boldsymbol{S}$ на противоположное производная изменит знак, а ее абсолютная величина останется прежней.

Установим некоторые свойства градиента.

1) *Производная в данной точке по направлению вектора* $\boldsymbol{S}$ *имеет наибольшее значение, если направление вектора* $\boldsymbol{S}$ *совпадает с направлением градиента; это наибольшее значение производной равно* $|\operatorname{grad} u|$.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из равенства : наибольшее значение $\frac{\partial u}{\partial s}$ будет при $\varphi = 0$, и в этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|.$$

2) *Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору* $\operatorname{grad} u$, *равна нулю.*

Это утверждение следует из формулы · Действительно, в этом случае

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi = 0.$$

3) Имеет место равенство $\frac{\partial f}{\partial l} = \overrightarrow{\text{grad}}\, z \cdot \bar{e}$, т. е. производная по направлению $\bar{l}$ равна скалярному произведению векторов градиента и орта направления $\bar{l}$.

Следствие. Вектор $\overrightarrow{\text{grad}}\, z$ в каждой точке направлен по нормали к линии уровня, проходящей через данную точку в сторону возрастания функции. При этом

$$\max_{\{l\}} \frac{\partial f}{\partial l} = |\overrightarrow{\text{grad}}\, z| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

4) Скорость изменения функции f по некоторому направлению l равна проекции вектора градиента на это направление, т. е. $\frac{\partial f}{\partial l} = \text{пр}_l\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

Пример Дана функция

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

а) Определим градиент в точке $M(1,1,1)$. Выражение градиента этой функции в произвольной точке будет

$$\operatorname{grad} u = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{grad} u)_M = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}, \quad |\operatorname{grad} u|_M = 2\sqrt{3}.$$

б) Определим производную от функции u в точке $M(1,1,1)$ в направлении градиента. Направляющие косинусы градиента будут

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

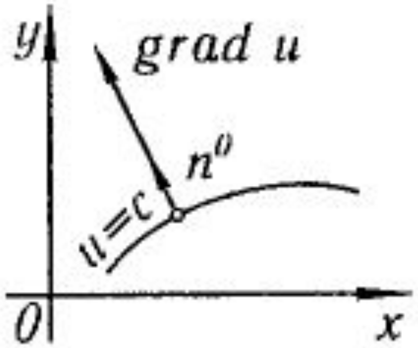
т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|.$$

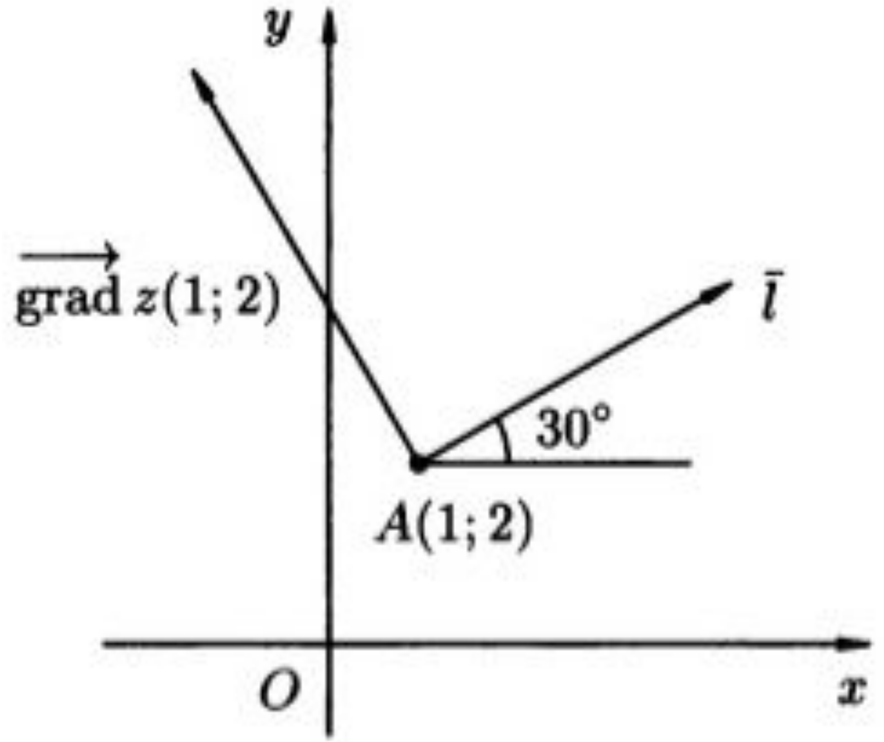
Замечание. Если функция $u = u(x, y)$ есть функция двух переменных, то вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

лежит в плоскости Oxy. Докажем, что $\operatorname{grad} u$ *направлен перпендикулярно к линии уровня* $u(x, y) = c$, лежащей в плоскости Oxy и проходящей через соответствующую точку. Действительно, угловой коэффициент k_1 касательной к линии уровня $u(x, y) = c$ будет равен $k_1 = -\frac{u'_x}{u'_y}$. Угловой коэффициент k_2 градиента равен $k_2 = \frac{u'_y}{u'_x}$. Очевидно, что $k_1 k_2 = -1$.



Пример Найти производную функции $z = 2{,}5x^2 - 5xy + 3y^2 + 5y$ в точке $A(1;2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол $30°$. Определить направление максимального роста данной функции в данной точке.



❍ Имеем $z'_x = 5x - 5y$, $z'_y = -5x + 6y + 5$, $z'_x(1;2) = -5$, $z'_y(1;2) = 12$. Следовательно, если через $\bar{l}$ обозначим данное направление, то $\dfrac{\partial f}{\partial l} = -5\cos 30^\circ + 12\sin 30^\circ = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2} + 6$. Градиент функции поля в данной точке имеет вид $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(1;2) = (-5;12) = -5\bar{i} + 12\bar{j}$. Этот вектор указывает направление, в котором функция растет быстрее, чем по другим направлениям. На рис. 127 схематически изображены точка $A(1;2)$, направление $\bar{l}$ с $\alpha = 30^\circ$ и направление $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z$. Максимальное значение производной в точке $A(1;2)$ равно модулю градиента: $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. ●

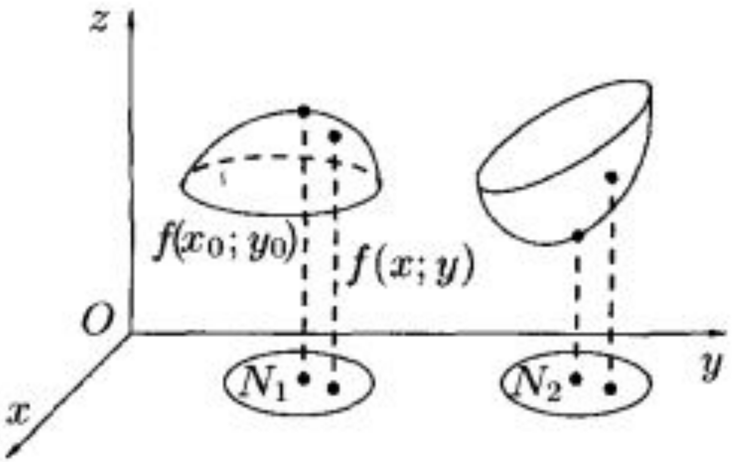
Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D, точка $N(x_0; y_0) \in D$.

Точка $(x_0; y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x; y)$, если существует такая δ-окрестность точки $(x_0; y_0)$, что для каждой точки $(x; y)$, отличной от $(x_0; y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$.

Аналогично определяется ***точка минимума*** функции: для всех точек $(x; y)$, отличных от $(x_0; y_0)$, из δ-окрестности точки $(x_0; y_0)$ выполняется неравенство: $f(x; y) > f(x_0; y_0)$.

На рисунке : N_1 — точка максимума, а N_2 — точка минимума функции $z = f(x; y)$.



Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом*** (***минимумом***) функции. Максимум и минимум функции называют ее ***экстремумами***.

Необходимые и достаточные условия существования экстремума

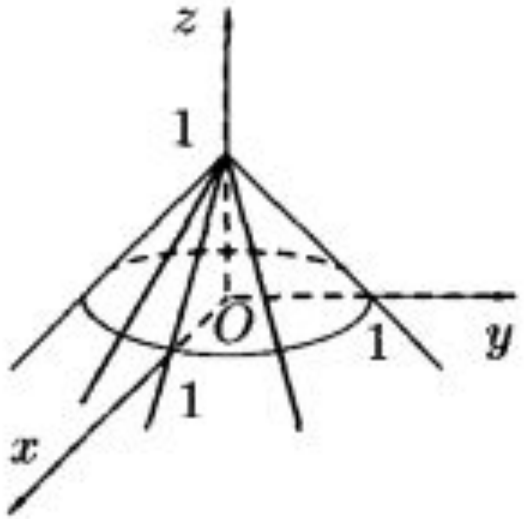
Теорема (необходимые условия экстремума). Если в точке $N(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0; y_0) = 0$, $f'_y(x_0; y_0) = 0$.

❑ Зафиксируем одну из переменных. Положим, например, $y = y_0$. Тогда получим функцию $f(x; y_0) = \varphi(x)$ одной переменной, которая имеет экстремум при $x = x_0$. Следовательно, согласно необходимому условию экстремума функции одной переменной, $\varphi'(x_0) = 0$, т. е. $f'_x(x_0; y_0) = 0$.

Аналогично можно показать, что $f'_y(x_0; y_0) = 0$. ■

Геометрически равенства $f'_x(x_0;y_0) = 0$ и $f'_y(x_0;y_0) = 0$ означают, что в точке экстремума функции $z = f(x;y)$ касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию $f(x;y)$, параллельна плоскости Oxy, т. к. уравнение касательной плоскости есть $z = z_0$

Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ имеет максимум в точке $O(0;0)$ (см. рис.), но не имеет в этой точке частных производных.



Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x;y)$ равны нулю, т. е. $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, называется ***стационарной точкой*** функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются ***критическими точками***.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Рассмотрим, например, функцию $z = xy$. Для нее точка $O(0;0)$ является критической (в ней $z'_x = y$ и $z'_y = x$ обращаются в ноль). Однако экстремума в ней функция $z = xy$ не имеет, т. к. в достаточно малой окрестности точки $O(0;0)$ найдутся точки для которых $z > 0$ (точки I и III четвертей) и $z < 0$ (точки II и IV четвертей).

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $(x_0; y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0; y_0)$ значения $A = f''_{xx}(x_0; y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0; y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0; y_0)$. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0; y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $(x_0; y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Примем без доказательства.

Пример. Найти экстремум функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

❍ Решение: Здесь $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки $M_1(6;3)$ и $M_2(0;0)$.

Находим частные производные второго порядка данной функции: $z''_{xx} = 6y - 6x$, $z''_{xy} = 6x$, $z''_{yy} = -12y^2$.

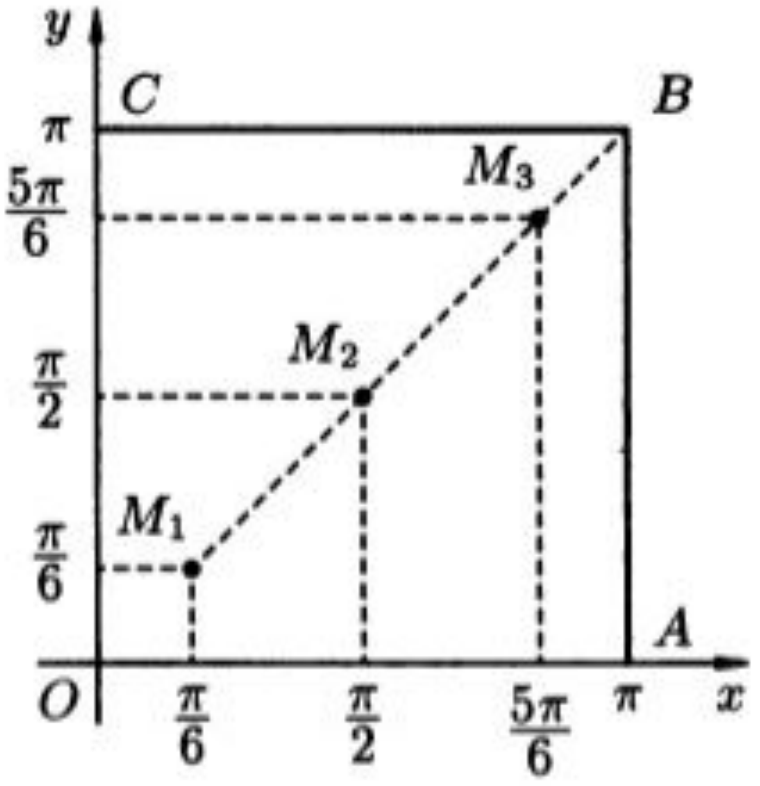
В точке $M_1(6;3)$ имеем: $A = -18$, $B = 36$, $C = -108$, отсюда

$$AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648,$$

т. е. $\Delta > 0$.

Так как $A < 0$, то в точке M_1 функция имеет локальный максимум: $z_{max} = z(6;3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 324 - 216 - 81 = 27$.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $f(x;y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ внутри квадрата $\{(x;y):\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$.



○ Область D определения функции есть вся плоскость $\mathbb{R}^2$, но нас интересует только открытый квадрат $OABC$ (см.рис. 129).

1. Стационарные точки определим из системы

$$\begin{cases} f'_x = \cos x - \sin(x+y) = 0, \\ f'_y = \cos y - \sin(x+y) = 0. \end{cases}$$

После вычитания друг из друга этих уравнений получаем

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x - y = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

В нашем квадрате может иметь место только условие $x - y = 0$ ($n = 0$), а тогда, присоединив к этому уравнению первое уравнение системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} y = x, \\ \cos x - \sin 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x, \\ x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

Тем самым, получили три стационарные точки $M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$, $M_2\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$.

2. Достаточные условия.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\sin x-\cos(x+y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\sin y-\cos(x+y).$$

Для точек $M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ и $M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$:

$$A_1=-1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad C_1=-1,\quad A_1C_1-B_1^2>0,\quad A_1<0.$$

Поэтому M_1 и M_3 — точки максимума с $f_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)=$ $=f\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$. Для точки $M_2\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

$$A_2=0,\quad B_2=1,\quad C_2=0,\quad A_2C_2-B_2^2<0.$$

Поэтому M_2 не является точкой экстремума.

Таким образом, в данном квадрате данная функция имеет две точки максимума $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ с $f_{\max}=\frac{3}{2}$. ●

Условный экстремум

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x; y)$. При отыскании экстремумов этой функции иногда необходимо найти их не на всей области определения $D(f)$, а только на некотором ее подмножестве, например на линии $\Gamma \subset D(f)$. Таким образом, ставится задача отыскания на линии Γ точки P_0, в которой значение функции является наибольшим или наименьшим по сравнению с ее значениями в других точках линии Γ, находящихся вблизи точки P_0.

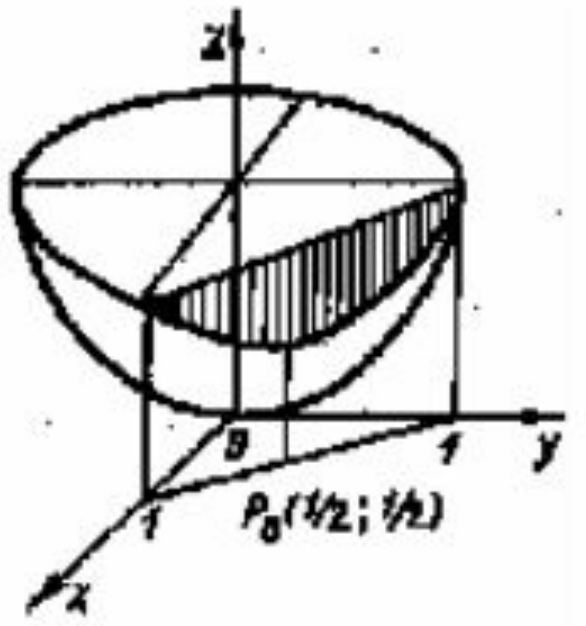
Пример. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $x + y - 1 = 0$.

Решение. Уравнение $x + y - 1 = 0$ в $\boldsymbol{R}^3$ определяет плоскость, параллельную оси Oz и пересекающую плоскость Oxy по прямой Γ.

Функция $z = x^2 + y^2$ определена на всей плоскости $\boldsymbol{R}^2$, а ее экстремумы требуется найти только среди тех точек плоскости, которые лежат на прямой Γ: $x + y - 1 = 0$. Из данного уравнения находим $y = 1 - x$. Подставляя это выражение в уравнение $z = x^2 + y^2$, получаем функцию $z = 2x^2 - 2x - 1$ одной переменной x.

Таким образом, задача свелась к задаче отыскания безусловных локальных экстремумов функции одной переменной. Найдем точки локальных экстремумов, лежащих на линии Г. Так как $z'_x = 4x - 2$, то $x_0 = \dfrac{1}{2}$ – точка возможного экстремума. Она является точкой локального минимума, поскольку $z''(x_0) = z''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4 > 0$, т.е. $z_{\min} = z\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0{,}5$. Следовательно, функция $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 1 = 0$ имеет условный локальный минимум $z = \dfrac{1}{2}$ в точке $P_0\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Из рис. видно, что на поверхности параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ безусловный минимум равен 0 и достигается в точке $O(0;0)$, т.е. он не совпадает с точкой $P_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ условного минимума, лежащей на прямой $x + y - 1 = 0$.



Рассмотрим функцию $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$ при условии, что ее аргументы являются связанными между собой соотношениями

$$\begin{cases} F_1(x_1; x_2; ... x_n) = 0, \\ F_2(x_1; x_2; ... x_n) = 0, \\ ...., \\ F_k(x_1; x_2; ... x_n) = 0, \end{cases}$$

которые называются ***уравнениями связи.*** И пусть координаты точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Говорят, что функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n) = f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ ***условный минимум (максимум)*** при условиях связи, если существует такая δ-окрестность точки P_0, что для любой точки

$$P(x_1; x_2; \dots; x_n) \in \delta, \quad P \neq P_0,$$

координаты которой удовлетворяют уравнениям, выполняется неравенство $f(P) > f(P_0)$ $\quad (f(P) < f(P_0))$.

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой δ-окрестности точки P_0, а только в тех ее точках, которые связаны между собой условиями связи.

Метод множителей Лагранжа. Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $z = f(x;y)$, не разрешая уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ относительно x или y. Для этого используем ***метод множителей Лагранжа***.

Введем вспомогательную функцию, называемую ***функцией Лагранжа***:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

где $f(x;y)$ – заданная функция; $\varphi(x;y)$ – левая часть уравнения связи.

Пример. Найти локальный минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что точки $(x; y)$ лежат на прямой l, уравнение которой $x + y - 1 = 0$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа по переменным x, y и λ:

$$L'_x = 2x + \lambda, \; L'_y = 2y + \lambda, \; L'_\lambda = x + y - 1.$$

Составляем и решаем систему уравнений вида (4):

$$\left.\begin{aligned} 2x + \lambda = 0, \\ 2y + \lambda = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 0{,}5$, $\lambda = -1$.

Таким образом, мы нашли единственную критическую точку $P_0(0{,}5;0{,}5)\in l$. Для любой точки $P\in l$ выполняется условие $f(P_0)>f(P)$. Следовательно, точка $P_0(0{,}5;0{,}5)$ является точкой условного минимума.

Метод множителей Лагранжа имеет место и для функции многих переменных $u=f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$.

Набольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$. Тогда она достигает в некоторых точках $\overline{D}$ своего наибольшего M и наименьшего m значений (т. н. *глобальный экстремум*). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области $\overline{D}$, или в точках, лежащих на границе области.

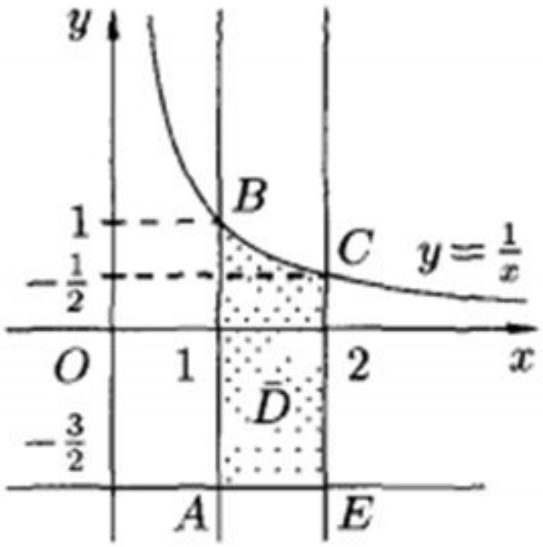
Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области $\overline{D}$ функции $z = f(x; y)$ состоит в следующем:

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие $\overline{D}$, и вычислить значения функции в них;

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ на границах области;

3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = -1{,}5$ (см. рис.).



Решение: Здесь $z'_x = 2xy + y^2 + y$, $z'_y = x^2 + 2xy + x$.

1. Находим все критические точки:

$$\begin{cases} y(2x + y + 1) = 0, \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются точки $(0;0)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$, $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Ни одна из найденных точек не принадлежит области $\overline{D}$.

2. Исследуем функцию z на границе области, состоящей из участков AB, BC, CE и EA.

На участке AB: $x = 1$, $z = y^2 + 2y$, где $y \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$, $z'_y = 2y + 2$, $2y + 2 = 0$, $y = -1$. Значения функции $z(-1) = -1$, $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$, $z(1) = 3$.

На участке BC: $y = \frac{1}{x}$, $z = x + \frac{1}{x} + 1$, где $x \in [1; 2]$, $z'_x = 1 - \frac{1}{x^2}$, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1 \notin [1; 2]$. Значения функции $z(1) = 3$, $z(2) = 3{,}5$.

На участке CE: $x = 2$, $z = 2y^2 + 6y$, $y \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $z'_y = 4y + 6$, $4y + 6 = 0$, $y = -\frac{3}{2}$. Значения функции $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -4{,}5$, $z\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}5$.

На участке AE: $y = -\frac{3}{2}$, $z = -\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4}x$, $x \in [1; 2]$, $z'_x = -3x + \frac{3}{4}$, $-3x + \frac{3}{4} = 0$, $x = \frac{1}{4} \notin [1; 2]$. Значения функции $z(1) = -\frac{3}{4}$, $z(2) = -4{,}5$.

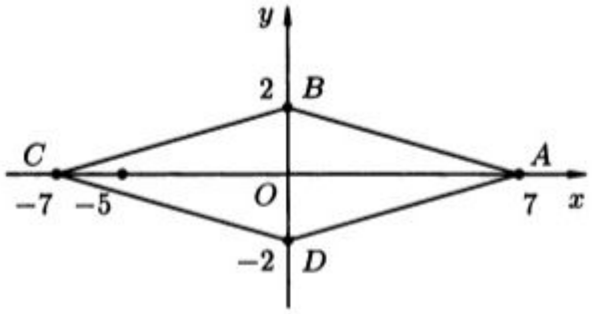
3. Сравнивая полученные результаты, имеем:

$$M = +3{,}5 = z\left(2; \frac{1}{2}\right) = z(C),$$

а $m = -4{,}5 = z\left(2; -\frac{3}{2}\right) = z(E)$. ●

Пример .

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$ в замкнутой области D: $\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} \leqslant 1$.



1. Исследуем функцию на локальный экстремум внутри D.

$$\begin{cases} z'_x = -10y^2 + 2x + 10 = 0, \\ z'_y = -20xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -5, \\ y = 0. \end{cases}$$

Получили три стационарные точки, которые все лежат в области $\bar{D}$: $M_1(0;1)$, $M_2(0;-1)$, $M_3(-5;0)$.

Примечание. При поиске наибольшего и наименьшего значений функции в области не обязательно находить характер точек экстремума, т. е. достаточные условия можно опускать. Надо найти значения функции в этих стационарных точках и среди них выбирать наибольшее и наименьшее.

Итак, имеем $z(0;1) = 1$, $z(0;-1) = 1$, $z(-5;0) = -24$.

2. Исследуем функцию на границе ∂D области D: $\left|\frac{x}{7}\right| + \left|\frac{y}{2}\right| = 1$ — представляет собой ромб $ABCD$.

Заметим, что $z(y) = z(-y)$, т. е. функция принимает одинаковые значения в точках $(x; y)$ и в точках $(x; -y)$ (имеем четность по переменной y). Отсюда следует вывод о достаточности рассмотрения границы ABC ромба $ABCD$.

Один из способов дальнейшего исследования такой. Составим уравнения для AB и BC, подставим их в z, получим функции одной переменной, которые исследуем на экстремум.

а) Уравнение отрезка AB — это $y = 2 - \frac{2x}{7}$, $0 \leqslant x \leqslant 7$.

Подставляем его в выражение нашей функции

$$z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1 = -10x\left(2 - \frac{2x}{7}\right)^2 + x^2 + 10x + 1 =$$

$$= -40x + \frac{80}{7}x^2 - \frac{40}{49}x^3 + x^2 + 10x + 1 = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{87}{7}x^2 - 30x + 1.$$

Дифференцируем:

$$z' = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30 = 0,$$

отсюда $x = \left(\frac{87}{7} \pm \frac{63}{7}\right) \cdot \frac{49}{120}$, $x_1 = \frac{35}{4}$ — не принадлежит отрезку $[0; 7]$, $x_2 = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

Нам необязательно знать, что это за точка — максимума или минимума. Вычислим $z\left(\frac{7}{5}\right)$. Поскольку при $x = 1{,}4$ получаем $y = 2 - \frac{2x}{7} = 1{,}6$, то достаточно вычислить

$$z(x; y) = z(1{,}4; 1{,}6) = -10 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}6^2 + 1{,}4^2 + 10 \cdot 1{,}4 + 1 = \\ = -35{,}84 + 1{,}96 + 14 + 1 = -18{,}88.$$

Отдельно считаем $z(A)$ и $z(B)$, т. е. $z(7; 0) = 120$, $z(0; 2) = 1$.

б) На BC займемся условным экстремумом. Поскольку уравнение прямой BC — это $-\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$, то составим функцию Лагранжа:

$$F(x;y;\lambda) = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1 + \lambda\left(-\frac{x}{7}+\frac{y}{2}-1\right).$$

Ищем стационарные точки этой функции:

$$\begin{cases} F'_x = -10y^2 + 2x + 10 - \frac{\lambda}{7} = 0, & \times 7 \\ F'_y = -20xy + \frac{\lambda}{2} = 0, & \times 2 \\ F'_\lambda = -\frac{x}{7} + \frac{y}{2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 7, второе — на 2 и сложим результаты. Этим исключим параметр λ из системы:

$$\begin{cases} -70y^2 - 40xy + 14x + 70 = 0, \\ x = \frac{7y}{2} - 7. \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой приходим к уравнению, которое после сокращений имеет вид $30y^2-47y+4=0$. Отсюда находим $y = \dfrac{47 \pm 41{,}6}{60}$. Сразу получим точки $(y_1 = 1{,}5,\ x_1 = -1{,}75)$, $(y_2 = 0{,}1,\ x_1 = -6{,}65)$, т. е. $M_1(-1{,}75; 1{,}5)$, $M_2(-6{,}65; 0{,}1)$.

Результаты вычислений значений функции в M_1, M_2 и C таковы: $z(M_1) \approx -25{,}935$, $z(M_2) \approx -22{,}9$, $z(C) = 20$.

Сравнивая все полученные величины, приходим к выводу: наибольшее значение функции в D, т. е. $\max\limits_{(x;y)\in D} f(x;y) = f(7;0) = 120$, а наименьшее значение, т. е. $\min\limits_{(x;y)\in D} f(x;y) = f(-5;0) = -24$. ●