Иррациональные неравенства.

...

Определение. *Неравенство, содержащее переменную под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень, называется* ***иррациональным неравенством.***

ПРИМЕР

$\sqrt{x+3} > x + 1$; $\sqrt{x^2 - 5x + 3} < \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$; $x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{3}} < 2$.

При решении иррациональных неравенств, как и иррациональных уравнений, корни четной степени рассматриваются как арифметические, а корни нечетной степени — на всей числовой оси.

Иррациональные неравенства решаются в основном методом возведения в степень. Но при этом надо знать и использовать следующие утверждения:

1) Если неравенство, обе части которого неотрицательны при всех допустимых значениях переменной, возвести в квадрат (или в любую четную степень) и сохранить его знак, то получим неравенство, равносильное данному.

Другими словами, если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$, причем при всех x из ОДЗ (область допустимых значений) переменной $f_1(x) \geqslant 0$ и $f_2(x) \geqslant 0$, то неравенство $(f_1(x))^{2n} > (f_2(x))^{2n}$ равносильно данному.

2) Если обе части неравенства возвести в нечетную натуральную степень и сохранить его знак, то получим неравенство, равносильное исходному. Иначе говоря, если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$, то неравенство $(f_1(x))^{2n+1} > (f_2(x))^{2n+1}$ равносильно данному.

Используя эти два утверждения можно свести решение иррациональных неравенств к решению рациональных неравенств или систем рациональных неравенств.

ПРИМЕР

1. Решим неравенство $\sqrt{x-1} < 3 - x$.

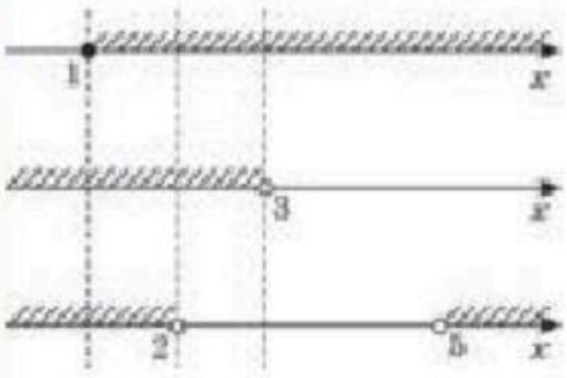

Рис. 42

Решение. Область допустимых значений переменной определяется из условия $x - 1 > 0$. Но по смыслу данного неравенства должно выполняться и условие $3 - x > 0$, поскольку левая его часть — арифметический корень. При этих условиях обе части неравенства неотрицательны, поэтому можно использовать метод возведения в квадрат. Если обе части исходного неравенства возвести в квадрат, то, учитывая указанные выше условия, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - x > 0, \\ x - 1 < (3 - x)^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x < 3, \\ (x-2)(x-5) > 0. \end{cases}$$

Отсюда $1 < x < 2$, т. е. решением исходного неравенства является множество $[1; 2)$ (рис. 42).

Ответ: $[1; 2)$.

ПРИМЕР

2. Решим иррациональное неравенство $\sqrt{x-1} > 3 - x$.

Решение. Область определения неравенства задается условием $x - 1 > 0$, т. е. $x > 1$. Правая часть неравенства обращается в нуль при $x = 3$ и она отрицательна при $x > 3$. Учитывая эти условия утверждаем, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$1)\ \begin{cases} 1 < x < 3, \\ x - 1 > (3 - x)^2; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x-1} > 3 - x. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} 1 < x < 3, \\ x - 1 > (3 - x)^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 < x < 3, \\ (x-2)(x-5) < 0. \end{cases}$$

Решением первой системы является промежуток $(2; 3]$.

Решим вторую систему: $\begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x-1} > 3 - x. \end{cases}$

Решением этой системы являются все значения x из промежутка $(3; +\infty)$, так как значение выражения $(3 - x)$ отрицательно, а левая часть $\sqrt{x-1}$ положительна. Объединяя решение первой системы с решением второй системы устанавливаем, что решением исходной системы будет промежуток $(2; +\infty)$ (рис. 43).

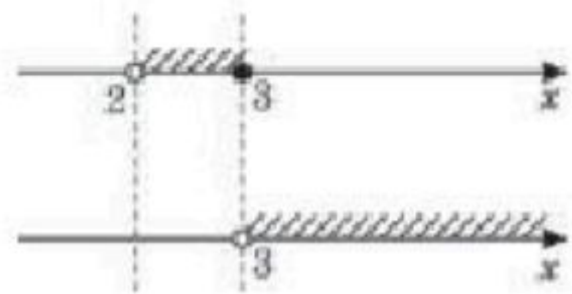

Рис. 43

Ответ: $(2; +\infty)$.

Основные равносильные соотношения, применяемые для решения иррациональных неравенств:

1. $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

2. $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

3. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$

4. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$

5. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < [g(x)]^{2n+1}.$

6. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > [g(x)]^{2n+1}.$

7. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < [g(x)]^{2n}. \end{cases}$

8. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > [g(x)]^{2n}. \end{cases} \end{array} \right.$

9. $\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}}{g(x)} > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 0, \\ \sqrt[n]{f(x)} > a \cdot g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ \sqrt[n]{f(x)} < a \cdot g(x). \end{cases} \end{array} \right.$

Приведем примеры решения иррациональных неравенств с использованием данных соотношений.

ПРИМЕР

3. Решим неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$.

Решение. Применим соотношение (7), тогда получим:

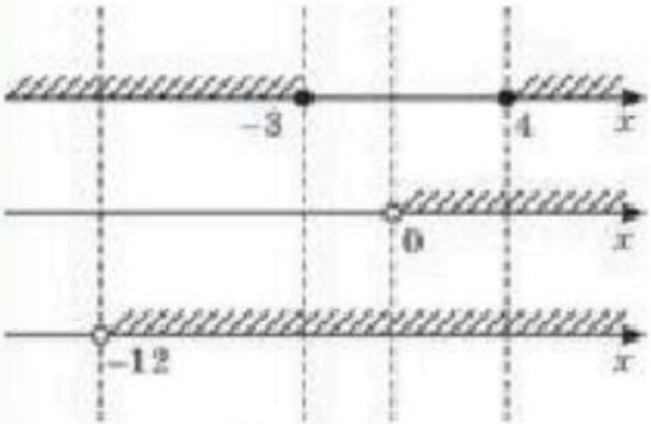

Рис. 44

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x - 4)(x + 3) \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x > -12. \end{cases}$$

Множество решений системы неравенств показано на рисунке 44.

Ответ: $[4; +\infty)$.

ПРИМЕР

4. Решим неравенство $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$.

Решение. Применяя соотношение (2) получим:

$$\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ 8-x^2 \geqslant 0, \\ x+2 > 8-x^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2-8 \leqslant 0, \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant -2, \\ \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right) \leqslant 0, \\ (x-2)(x+3) > 0. \end{cases}$$

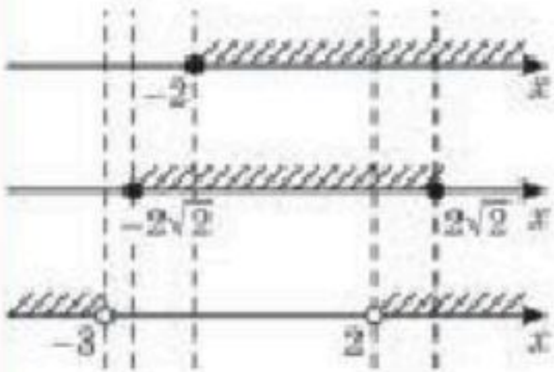

Рис. 45

Множество решений системы неравенств показано на рисунке 45.

Ответ: $(2;\ 2\sqrt{2}\,]$.

ПРИМЕР

5. Решим неравенство $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

Решение. Применим соотношение (8), тогда данное неравенство сведется к совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} -x^2+6x-5 \geqslant 0, \\ 8-2x < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 8-2x > 0, \\ -x^2+6x-5 > (8-2x)^2. \end{cases}$$

Решим каждую систему в отдельности.

1) $$\begin{cases} -x^2+6x-5 \geqslant 0, \\ 8-2x < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2-6x+5 \leqslant 0, \\ 2(4-x) < 0 \end{cases} \text{ или }$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-5) \leqslant 0, \\ 4-x < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 < x < 5, \\ x > 4. \end{cases}$$

Решением системы неравенств является промежуток (4; 5] (рис. 46).

2) $$\begin{cases} 8-2x > 0, \\ -x^2+6x-5 > (8-2x)^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4-x \geqslant 0, \\ 5x^2-38x+69 < 0 \end{cases} \text{ или }$$

$$\begin{cases} x \leqslant 4, \\ 5(x-3)\left(x-\dfrac{23}{5}\right) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leqslant 4, \\ 3 < x < \dfrac{23}{5}. \end{cases}$$

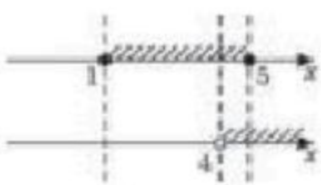

Рис. 46

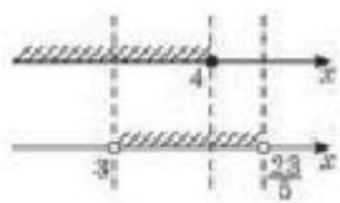

Рис. 47

Решением системы неравенств является промежуток (3; 4] (рис. 47). Объединив решения двух систем неравенств, получим решение исходного неравенства — промежуток (3; 5].

Ответ: (3; 5].

ПРИМЕР

6. Решим неравенство $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 7 - x^2 - 2x$.

Решение. ***Первый способ.*** Применим непосредственно соотношение (8), тогда получим неравенство четвертой степени. Поэтому данное неравенство предварительно запишем в следующем виде $\sqrt{5(x^2 + 2x) + 1} > 7 - (x^2 + 2x)$ и введем обозначение: $y = x^2 + 2x$. Тогда последнее неравенство примет вид $\sqrt{5y + 1} > 7 - y$.

Применяя соотношение (8) из последнего неравенства получим две системы неравенств:

1) $\begin{cases} 5y + 1 \geqslant 0, \\ 7 - y < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 5y \geqslant -1, \\ y > 7 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \geqslant -\dfrac{1}{5}, \\ y > 7. \end{cases}$

Отсюда получим $y > 7$. Решением системы неравенств является промежуток $(7; +\infty)$.

2) $\begin{cases} 7 - y \geqslant 0, \\ 5y + 1 > (7 - y)^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y < 7, \\ y^2 - 19y + 48 < 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} y < 7, \\ (y - 3)(y - 16) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y < 7, \\ 3 < y < 16. \end{cases}$

Множеством решений системы неравенств будет промежуток $(3; 7]$ (рис. 48). Следовательно, объединив решения двух этих систем, имеем $y > 3$.

Подставив вместо y его обозначение $x^2 + 2x$, имеем: $x^2 + 2x > 3$. Решим последнее неравенство: $x^2 + 2x - 3 > 0$ или $(x - 1)(x + 3) > 0$. Решением неравенства является множество $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ (рис. 49).

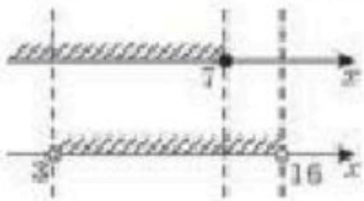

Рис. 48

Рис. 49

Второй способ. Умножим обе части неравенства $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 7 - 2x - x^2$ на число $5 > 0$, тогда получим равносильное неравенство $5\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 35 - 5x^2 - 10x$. Полученное неравенство запишем в виде:

$$5\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 36 - (5x^2 + 10x + 1).$$

Введем новую переменную: $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = a$ $(a > 0)$. Тогда последнее неравенство примет вид: $5a > 36 - a^2$ или $a^2 + 5a - 36 > 0$. Решением неравенства является множество $(-\infty; -9) \cup (4; +\infty)$.

Так как $a > 0$, то рассмотрим только множество $(4; +\infty)$. Итак $a > 4$, значит, $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 4$. Возведем обе части неравенства в квадрат, получим: $5x^2 + 10x + 1 > 16$ или $5x^2 + 10x - 15 > 0$. Сократим полученное неравенство на 5. $x^2 + 2x - 3 > 0$, решением этого неравенства является множество $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

ПРИМЕР

7. Докажем неравенство $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$, где $x > 0$, $y > 0$.

Доказательство. Первый способ. Сумму $x + y$ преобразуем следующим образом:

$$x + y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{x}\,\sqrt{y} + 2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}.$$

Тогда $\frac{x+y}{2} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 + \sqrt{xy}$. Равенство достигается, если $x = y$.

Следовательно, правая часть данного неравенства состоит из суммы, где первое слагаемое неотрицательно, а второе слагаемое есть правая часть доказываемого неравенства.

Поэтому очевидно, что $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$. Равенство достигается, если $x = y$.

Второй способ. Составим разность $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$ и найдем ее знак: $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2}$. Неравенство $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 > 0$ верно при любых неотрицательных значениях x и y. Значит $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$.

Домашнее задание:
Краткий конспект.
Решить №15.1-№15.4 (все первые задания)

Упражнения

А

Решите неравенства (15.1—15.3):

15.1. 1) $\sqrt{x} \geq 2$; 2) $\sqrt{x} < 5$; 3) $\sqrt[3]{x} > 3$; 4) $\sqrt[3]{x} \leq 2$.

15.2. 1) $\sqrt{x+1} > 2$; 2) $\sqrt{1-x} \leq 4$; 3) $\sqrt{3x+1} \geq 1$; 4) $\sqrt{2x-1} < 3$.

15.3. 1) $\sqrt{3x-8} < -2$; 2) $\sqrt[3]{x+2} \leq -5$;
3) $\sqrt{2x+1} > 8$; 4) $(x-12)\sqrt{x-3} \leq 0$.

В

Решите неравенства (15.4—15.6):

15.4. 1) $\sqrt{x^2+x-2} < 2$; 2) $\sqrt{x^2+x+1} < 1$;
3) $\sqrt{x^2+3x} > 4$; 4) $\sqrt{x^2-5x} > 3$.

15.5. 1) $\sqrt{2x-1} > x-2$; 2) $\sqrt{2x+1} < x-1$;
3) $x+2 < \sqrt{x+14}$; 4) $x-3 < \sqrt{x+27}$.