Дискретные случайные величины (показательный закон распределения)

- ***Показательным (экспоненциальным)*** называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины , которое описывается плотностью:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

где – λ постоянная положительная величина

- Функция распределения показательного закона:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \ x \geq 0, \\ 0 & , \ x < 0. \end{cases}$$

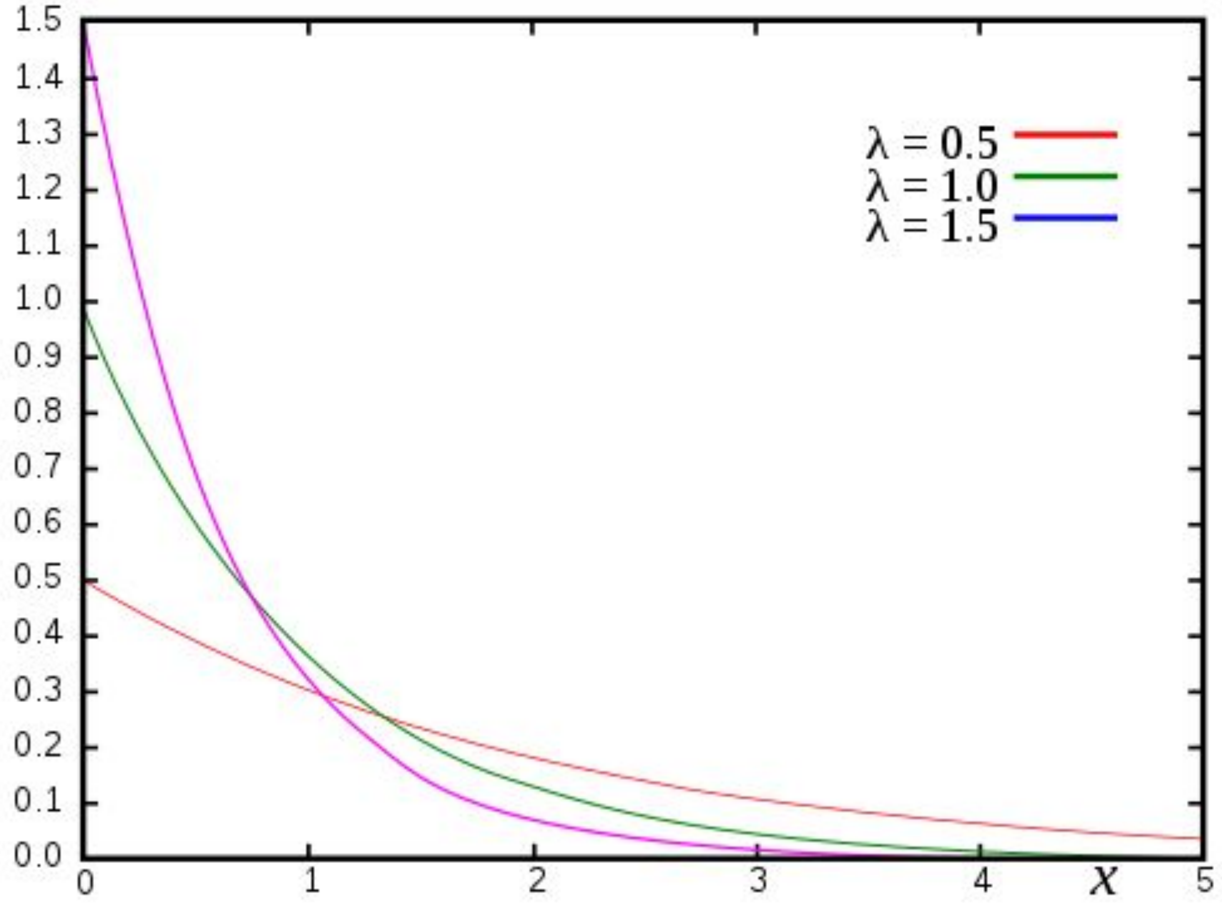


График плотности распределения

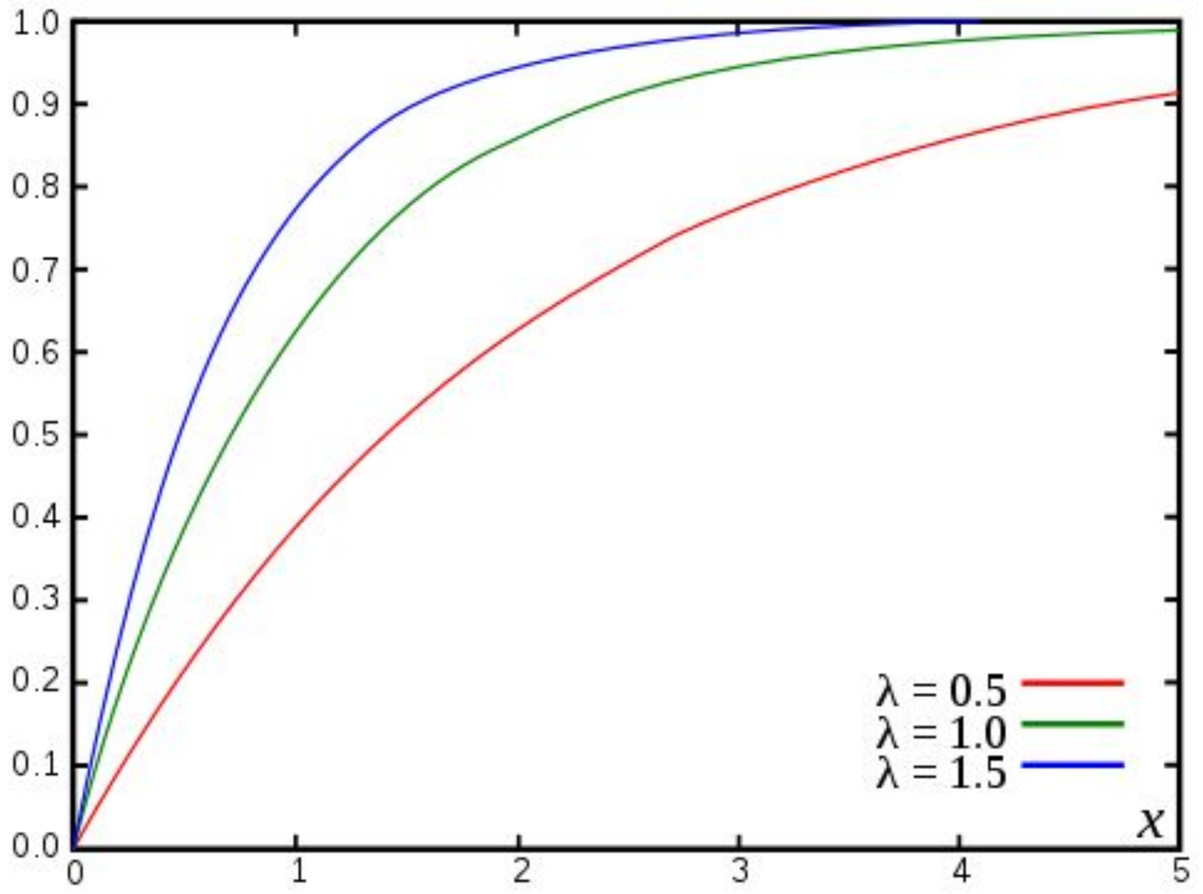


График функции распределения

- Вероятность попадания в интервал (a,b) непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

- Математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- Дисперсия случайной величины, распределенной по показательному закону

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- Среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по показательному закону:

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Пример 1

- Случайная величина ξ задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-4x} & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x \le 0 \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этого распределения.

Найдите вероятность того, что случайная величина примет значение от 0,2 до

Решение

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Среднее квадратическое отлонение:

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Вероятность того, что случайная величина примет значение от 0,2 до 1:

$$P(0{,}2 < x < 1) = \mathrm{e}^{-4\cdot 0{,}2} - \mathrm{e}^{-4\cdot 1} = 0{,}431$$

Ответ:

M(X)=0,25 ; σ = 0,25 ; p(0,2 < x < 1) = 0,431

Пример 2

- Постройте интегральную и дифференциальную функции распределения случайной величины X. Найдите математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), среднее квадратическое отклонение σ(X), если известно, что случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ=1.

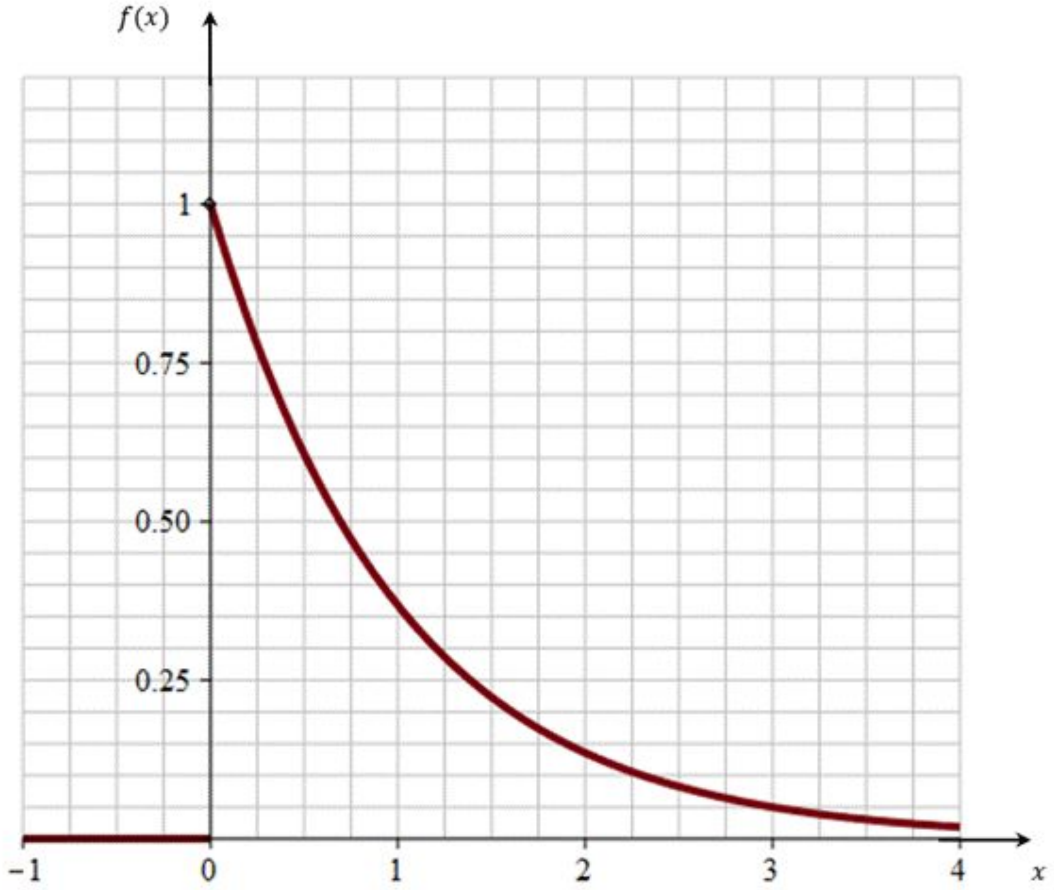
Решение

Плотность распределения случайной величины X, распределенной по показательному закону:

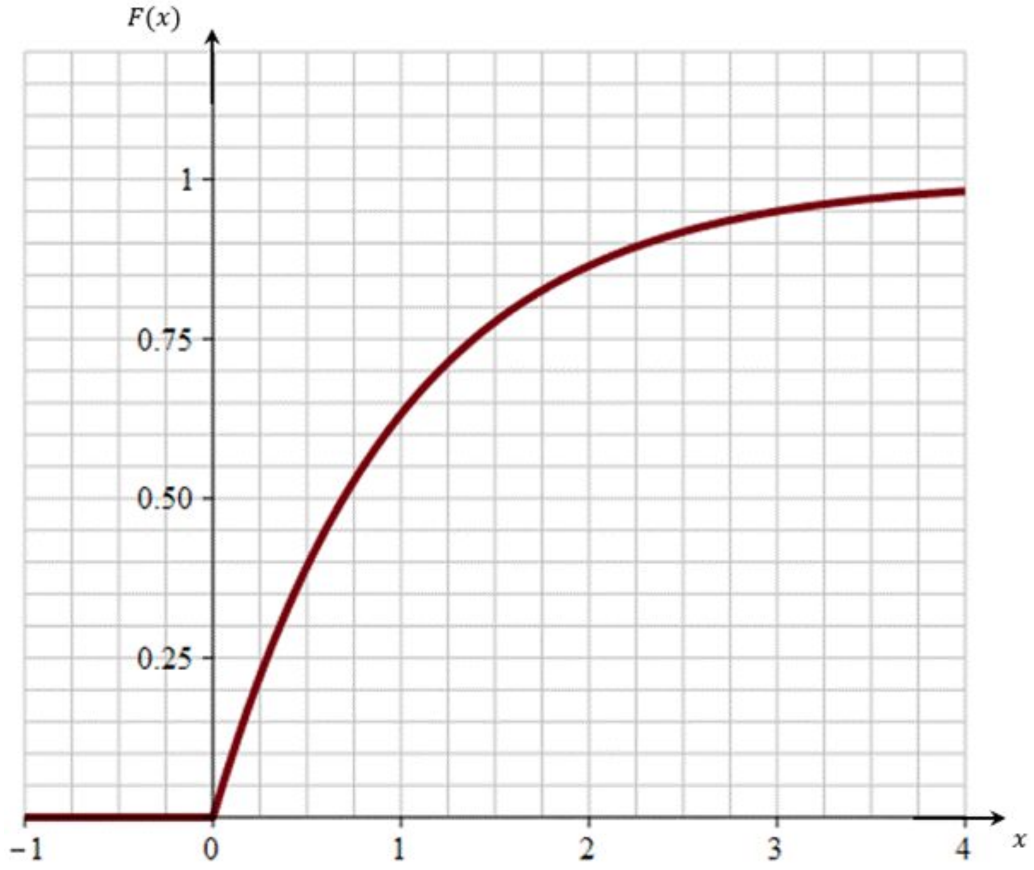
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ e^{-x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



$f(x)$
1
0.75
0.50
0.25
−1
0
1
2
3
4
x



$F(x)$
1
0.75
0.50
0.25
−1
0
1
2
3
4
x

Математическое ожидание показательно распределенной случайной величины X:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1} = 1$$

Дисперсия:

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1} = 1$$

Пример 3

- Длительность телефонного разговора подчиняется показательному закону. Найти среднюю длительность разговора, если вероятность того, что разговор продлится более 5 минут, равна 0,4.

Решение

- Используем известную формулу для показательного распределения:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

По условию, известна вероятность того, что того, что разговор продлится более 5 минут, она равна 0,4:

$$P = P(5 < X < \infty) = e^{-5\lambda} - e^{-\infty} = e^{-5\lambda} - e^{-\infty} = e^{-5\lambda} = 0{,}4,$$

$$\lambda \approx 0{,}183$$

Тогда средняя длительность разговора:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}183} \approx 5{,}46 \text{ минут.}$$

Пример 4

- Среднее время безотказной работы прибора равно 80 часов. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти:

а) выражение его плотности вероятности и функции распределения;

б) вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя.

Решение

- Так как для показательного закона $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, а среднее время безотказной работы прибора равно 80 часов, получаем, что $\lambda = \frac{1}{80}$
- Тогда плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \; x<0, \\ \frac{1}{80}e^{-1/80x}, \; x\ge 0. \end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \; x<0, \\ 1-e^{-1/80x}, \; x\ge 0. \end{cases}$$

- Найдем вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя, то есть вероятность того, что время безотказной работы будет не меньше 100, Х ≥100 . Используем известную формулу для показательного распределения:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} = e^{-1/80a} - e^{-1/80b}.$$

Подставляем:

$$P(100 < X < \infty) = e^{-1/80\cdot 100} - e^{-1/80\cdot\infty} = e^{-5/4} - e^{-\infty} = e^{-5/4} \approx 0,287.$$

Ответ:

0,287.

Спасибо за внимание