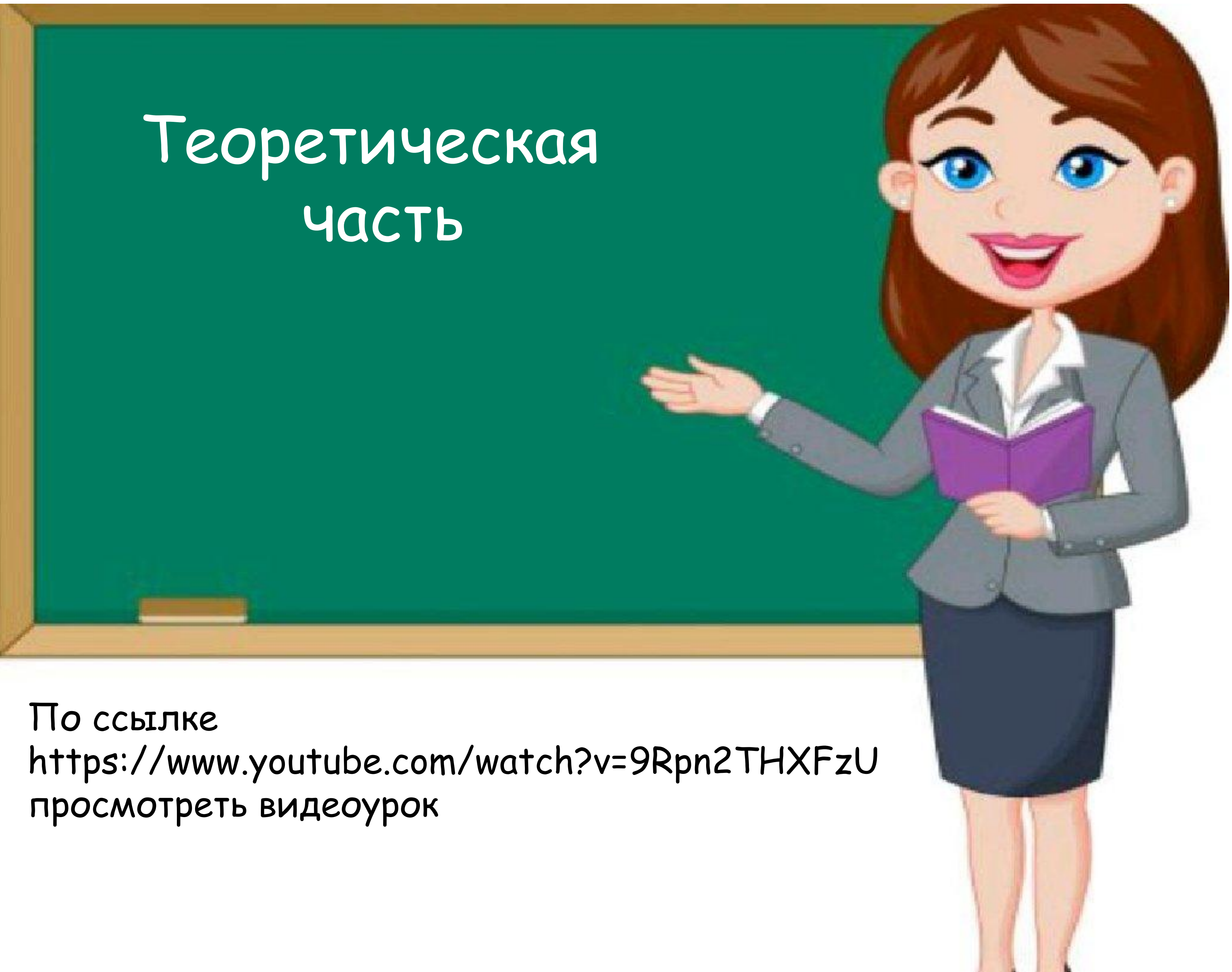
Обратные тригонометрические функции



Теоретическая часть

По ссылке
https://www.youtube.com/watch?v=9Rpn2THXFzU
просмотреть видеоурок

Обратные тригонометрические функции

$y = \arcsin x$

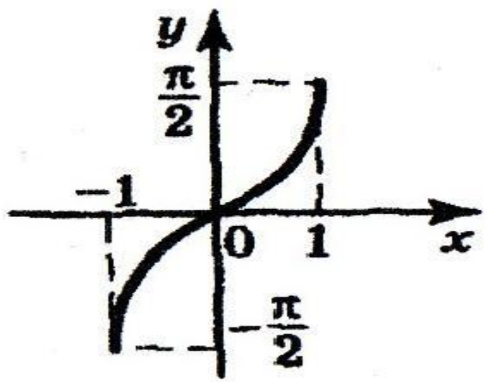


Рис. 15

$y = \arccos x$

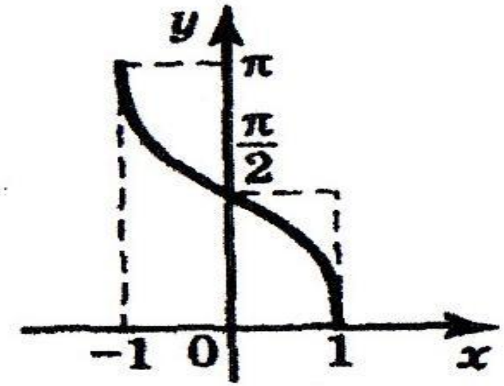


Рис. 16

$y = \operatorname{arctg} x$

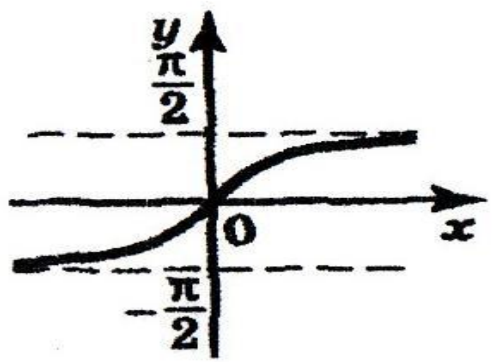


Рис. 17

$y = \operatorname{arcctg} x$

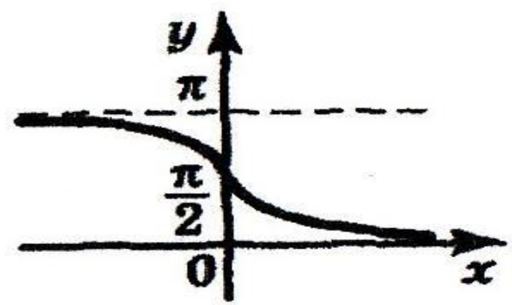
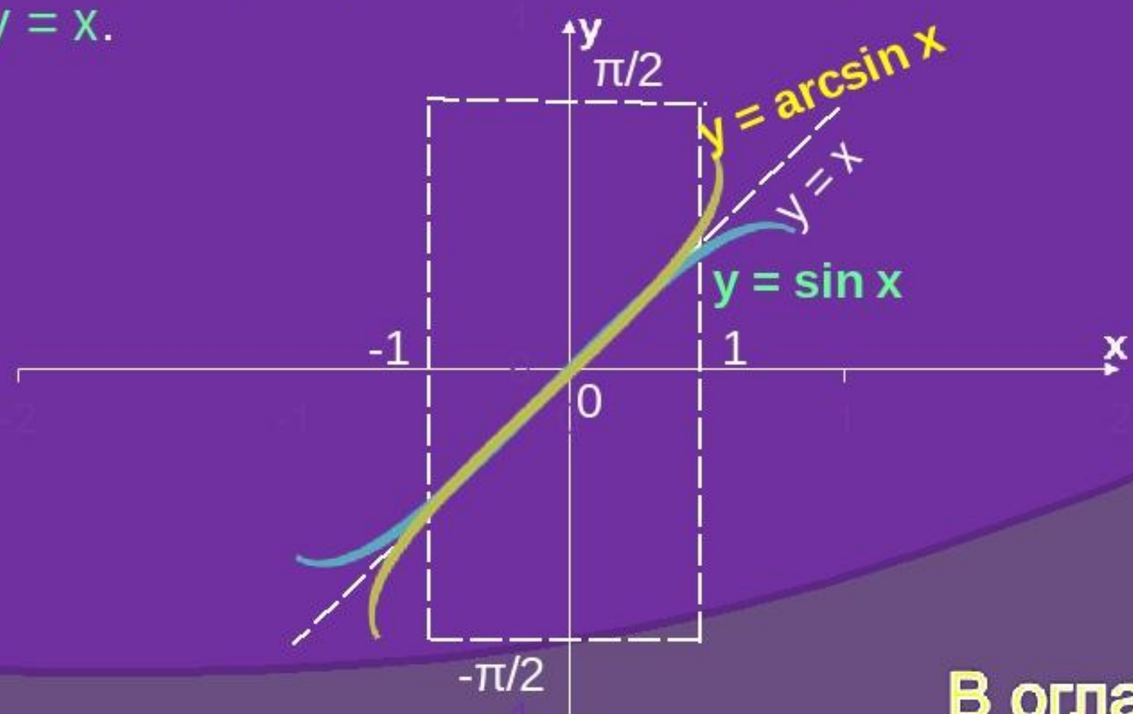


Рис. 18

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ФУНКЦИЯ Y = ARCSIN X

Определение. y = arcsin x (читают: арксинус x) – это функция, обратная к функции y = sin x. График функции y = arcsin x может быть получен из графика функции y = sin x, x є [-π/2; π/2] с помощью преобразования симметрии относительно прямой y = x.



В оглавление

Свойства функции y = arcsin x

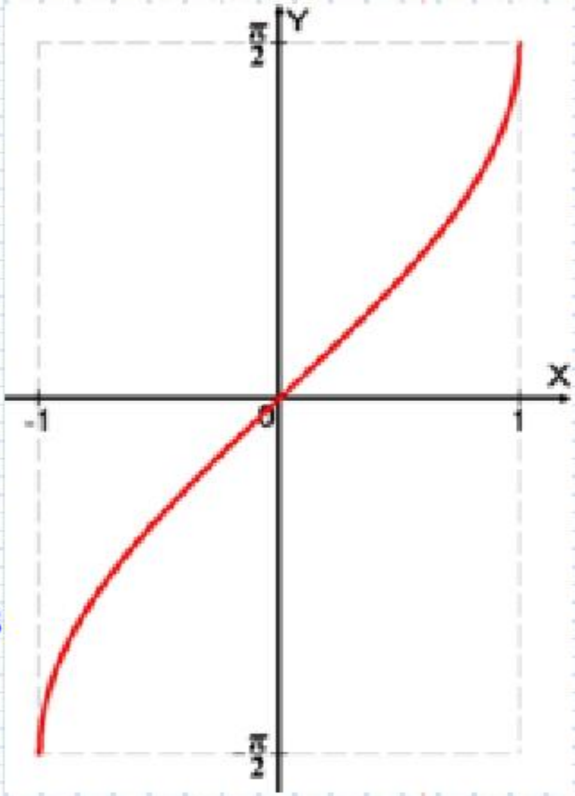
1)Область определения: отрезок [-1; 1];

2)Область изменения: отрезок [-π/2,π/2];

3)Функция y = arcsin x нечетная: arcsin (-x) = - arcsin x;

4)Функция y = arcsin x монотонно возрастающая;

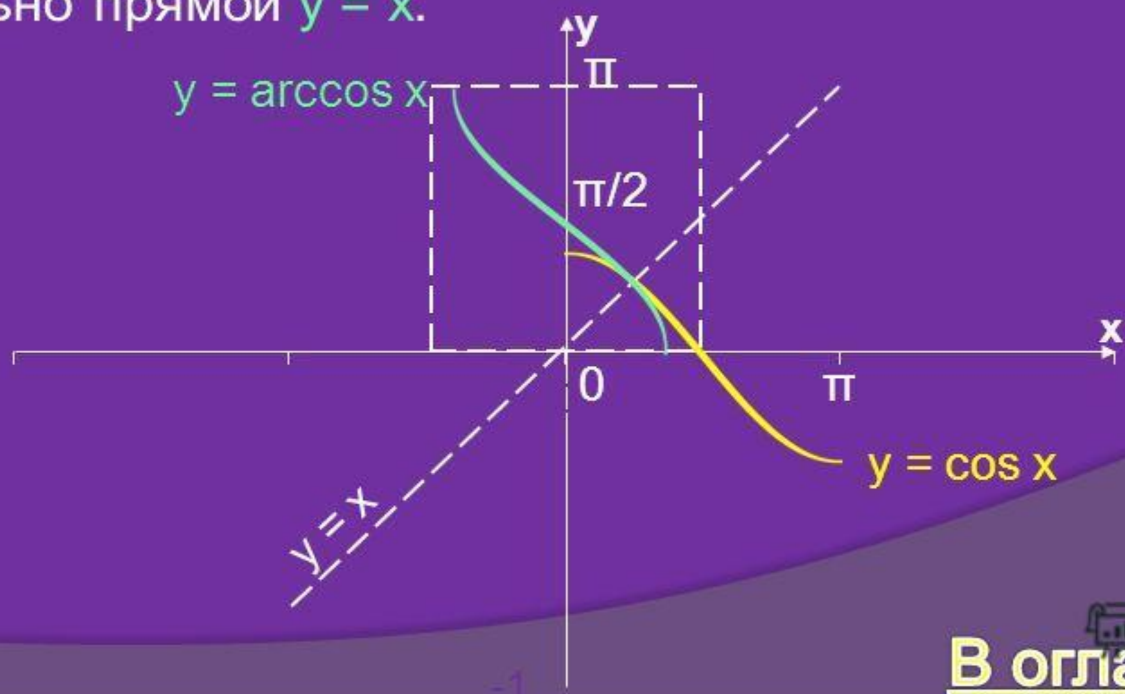
5)График пересекает оси Ox, Oy в начале координат.



ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ФУНКЦИЯ Y = ARCCOS X

Определение. y = arccos x (читают: арккосинус x) – это функция, обратная к функции y = cos x, x [0; π].График функции y = arccos x может быть получен из графика функции y = cos x, x є [0; π] с помощью преобразования симметрии относительно прямой y = x.



В оглавление

Свойства функции y = arccos x .

Функция y= arccosx **является строго убывающей**

cos(arccosx) = x **при**

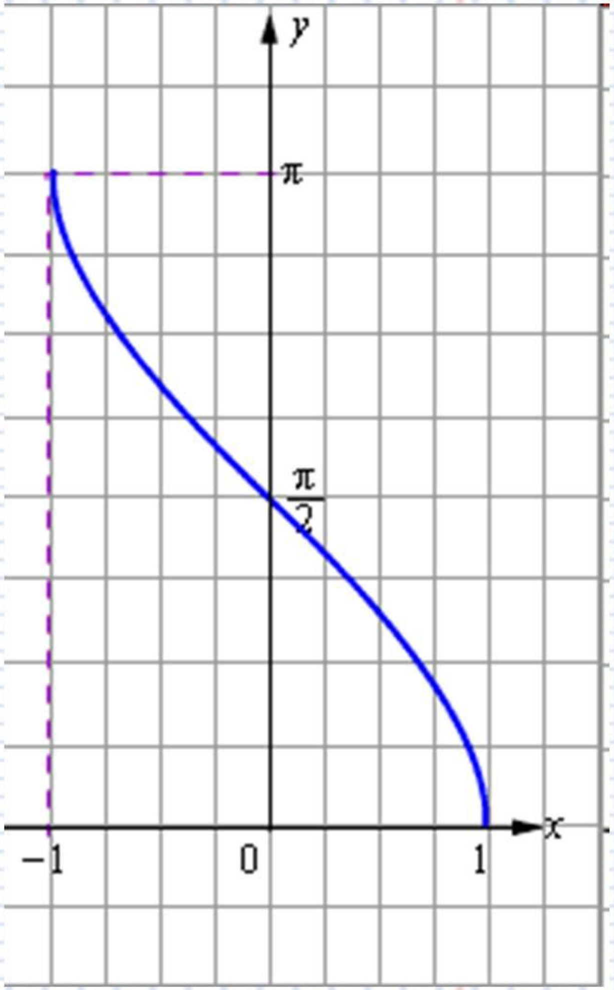
$-1 \leq x \leq 1$

arccos(cosy) = y **при**

$0 \leq y \leq \pi$

D(arccosx)= [−1;1]]

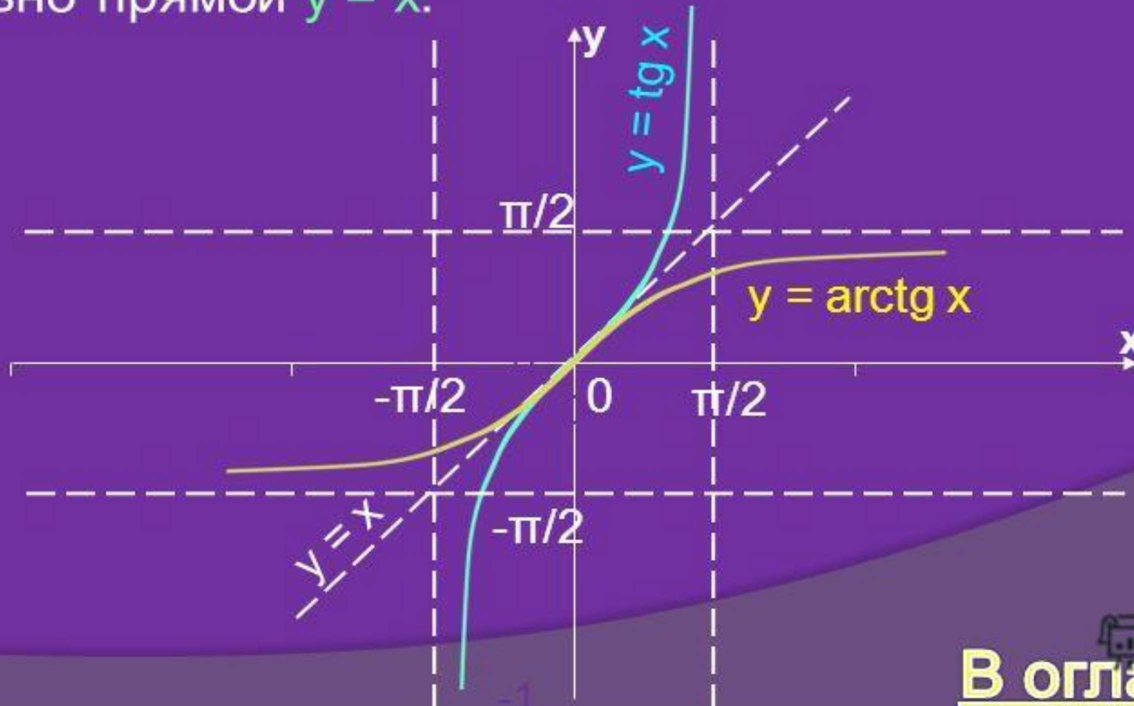
E(arccosx)= [0;π]]



ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ФУНКЦИЯ Y = ARCTG X

Определение. y = arctg x (читают: арктангенс x) – это функция, обратная к функции y = tg x, x є (-π/2; π/2). График функции y = arctg x может быть получен из графика функции y = tg x, x є (-π/2; π/2), с помощью преобразования симметрии относительно прямой y = x.



В оглавление

y=arctg x

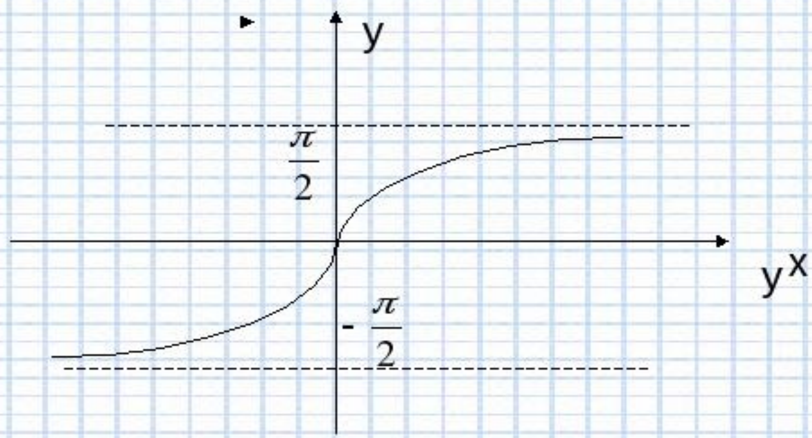
1)Область определения: R

2)Область значения: отрезок [-π/2,π/2];

3)Функция y = arctg x нечетная: arctg (-x) = - arctg x;

4)Функция y = arctg x монотонно возрастающая;

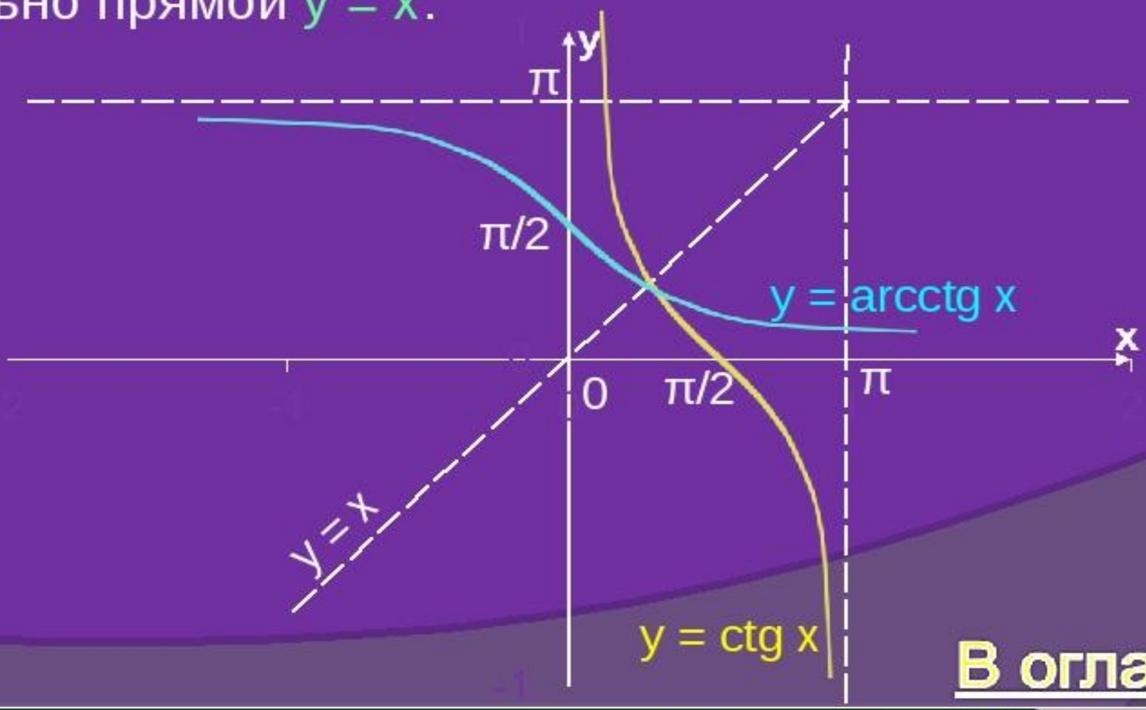
5)График пересекает оси Ox, Oy в начале координат.



ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ФУНКЦИЯ Y = ARCCTG X

Определение. y = arcctg x (читают: арккотангенс x) – это функция, обратная к функции y = ctg x, x є (0; π). График функции y = arcctg x может быть получен из графика функции y = ctg x, x є (0; π), с помощью преобразования симметрии относительно прямой y = x.



В оглавление

1)Область определения: R

2)Область значения: отрезок

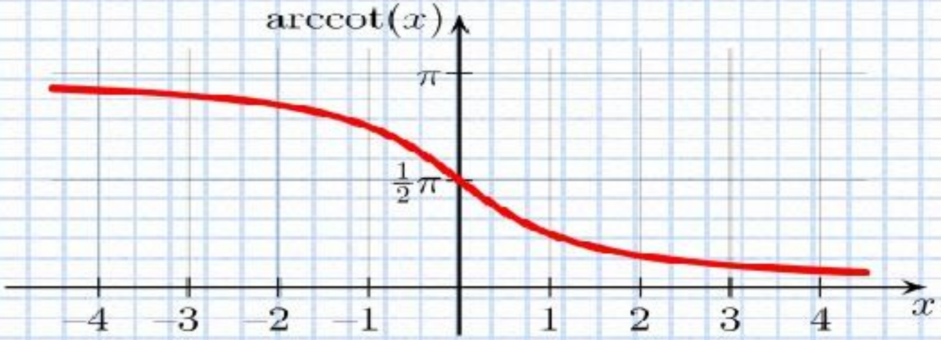
[0;];

arcctg x

3)Функция y = arcctg x нечетная:

arcctg (-x) = - arcctg x;

4)Функция y = arcctg x монотонно убывающая;



Основные свойства обратных тригонометрических функций

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$arctg(-x) = -arctgx$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx$$

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$$

$$arctgx + arcctgx = \pi/2$$

$\arcsin(\sin x)=x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$ $\sin(\arcsin x)=x,\quad x\in[-1;1].$	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x.$
$\arccos(\cos x)=x,\quad x\in[0;\pi];$ $\cos(\arccos x)=x,\quad x\in[-1;1].$	$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)=x,\quad x\in(0;\pi);$ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x.$
$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad x\in[-1;1].$	$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}.$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Примеры вычислений

- 1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$,так как $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *и* $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
- 2) $\arcsin 0=$ 0, так как $\sin 0=0$ *и* $0\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
- 3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ = $-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$, так как

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Примеры вычислений

- 1) $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, т. к. $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$;
- 2) $\arccos 1=0$, т. к. $\cos 0=1$, $0\in[0;\pi]$;
- 3) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, т. к. $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$;
- 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$, т. к. $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$.

Примеры вычислений

- 1) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, т.к. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$;
- 2) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

$$arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \quad -\pi/6$$

$$arctg\sqrt{3} = \quad \pi/3$$

$$arcctg\sqrt{3} = \quad \pi/6$$

$$arctg(-\sqrt{3}) = \quad -\pi/3$$

$$arcctg(-\sqrt{3}) = \quad 5\pi/6$$

$$arcctg(-1) = \quad 3\pi/4$$

$$arctg1 = \quad \pi/4$$

$$arcctg1 = \quad \pi/4$$

$$arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \quad \pi/6$$

$$arctg(-1) = \quad -\pi/4$$

Пример:

Вычислить

$$arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+arcctg\sqrt{3}+arcctg\,0+arctg\,(-2)+arctg\,2.$$

Решение:

$$arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

$$arcctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$arcctg\,0=\frac{\pi}{2}$$

$$arctg\,(-2)=-arctg\,2$$

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-arctg\,2+arctg\,2=\frac{\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(-1)$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Практическая часть

https://yadi.sk/i/e58CznUDHNTfeg

По ссылке посмотреть мои видеокомментарии

«Обратные тригонометрические функции»

Вычислить:

1) $arccos\frac{\sqrt{3}}{2} =$

2) $arcsin(-1) =$

3) $arctg\,1 =$

4) $arccos(-\frac{1}{2}) =$

5) $arcsin(-\frac{1}{2}) =$

6) $arcctg\frac{\sqrt{3}}{3} =$

7) $arccos(-1) =$

8) $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} =$

9) $arctg(-\sqrt{3}) =$

10) $arcctg\,0 =$

11) $arcsin(-1{,}3) =$

12) $arcctg(-1) =$

13) $arccos\,5 =$

14) $arctg\,0 =$

Вычислите значение выражения.

1. $\arcsin 0$
2. $\arccos 1$
3. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\arccos 3$
5. $\arcsin (-1)$
6. $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
7. $\mathrm{arctg}\ 0$
8. $\mathrm{arcctg}\ 1$
9. $\mathrm{arctg} \left(-\sqrt{3}\right)$
10. $\mathrm{arcctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
11. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos 1$
12. $\arcsin -\frac{1}{2} + \arccos 1$
13. $\cos (\arccos 1)$
14. $\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
15. $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$
16. $\arccos \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
17. $\cos \left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$
18. $\mathrm{tg} \left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$
19. $\sin \left(\mathrm{arcctg}(-2)\right)$
20. $\arcsin \left(\cos \frac{\pi}{9}\right)$

1. **Вычислите:**

1) $\arcsin 1$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arccos\frac{1}{2}$;

5) $\arcsin 0$; 6) $\arccos(-1)$; 7) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

9) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 10) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 11) $\operatorname{arctg} 1$; 12) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$;

13) $\operatorname{arcctg} 0$; 14) $\operatorname{arctg}(-1)$; 15) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

2. **Найдите значение выражения:**

1) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

3) $\arcsin 1 - 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $-\arcsin(-1) - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(-1)$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Вычислите:

а) $\operatorname{arcctg}(-1) + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \operatorname{arcctg} 0;$

Вычислите:

а) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right);$