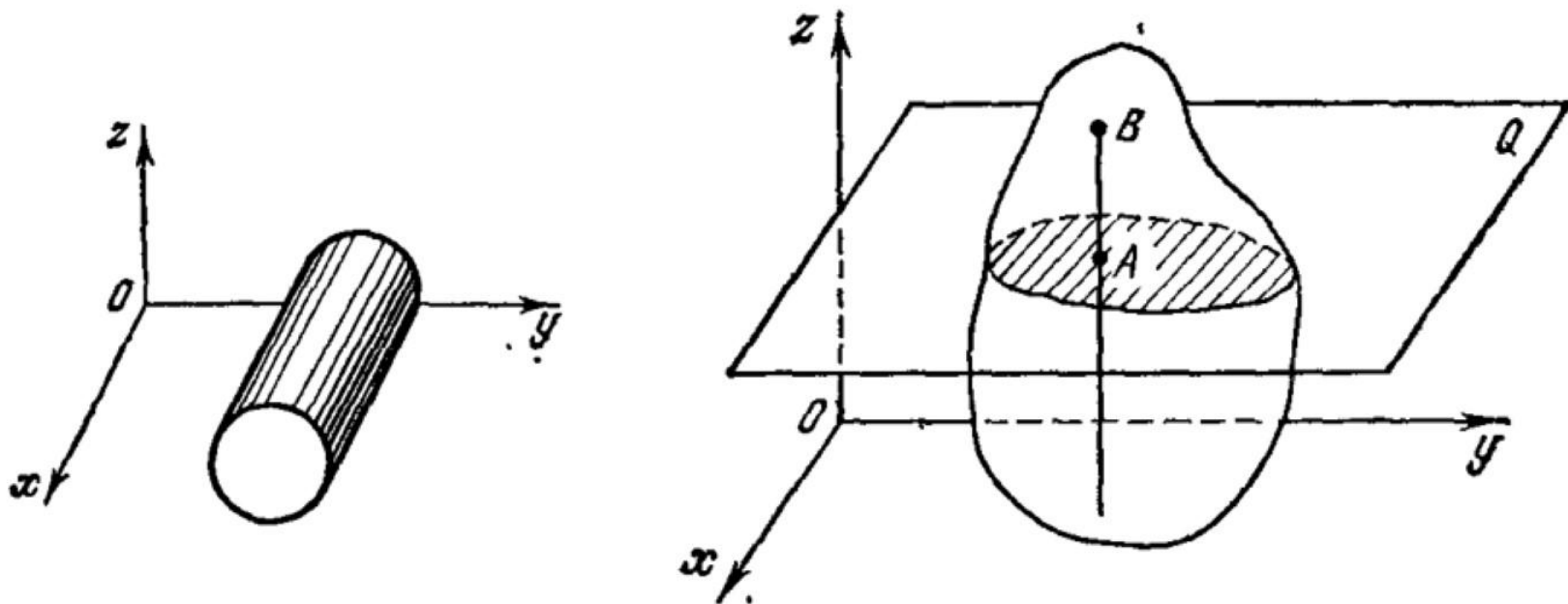


# **Плоско-параллельное движение твердого тела**

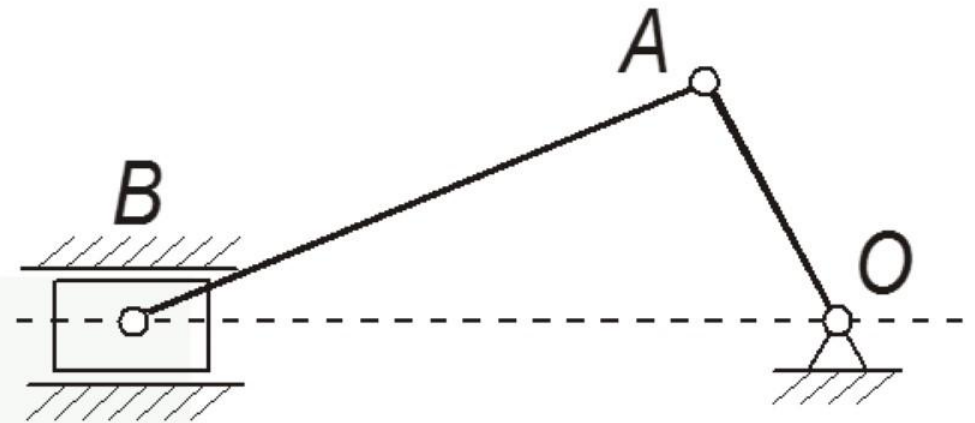
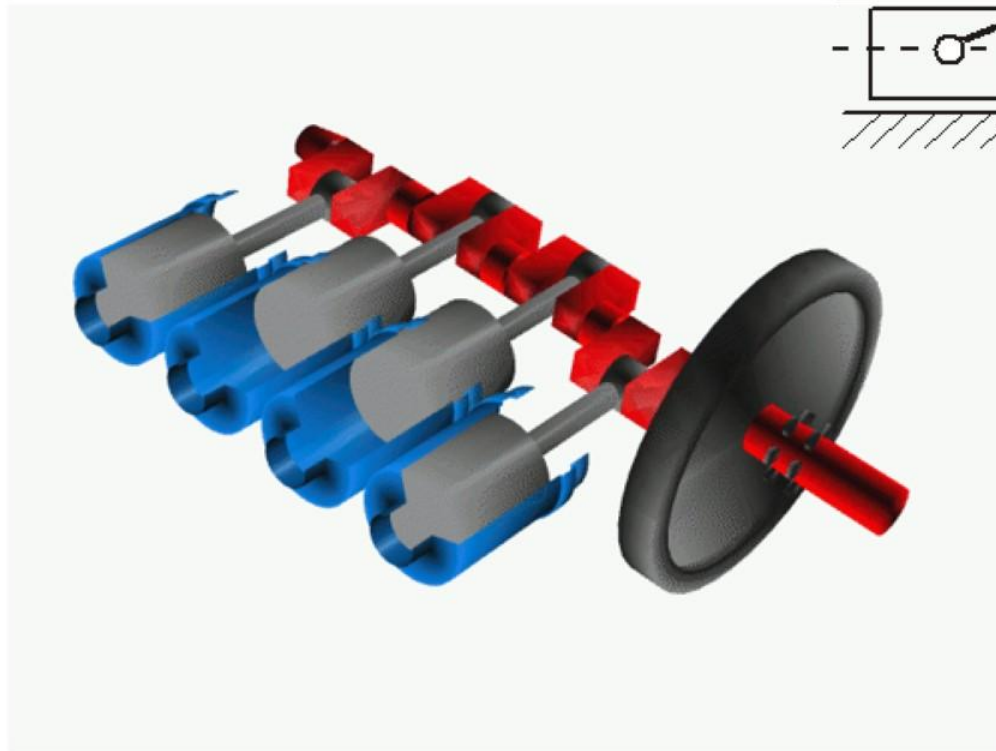
## **Лекция 8**

# Определение движения и его замена

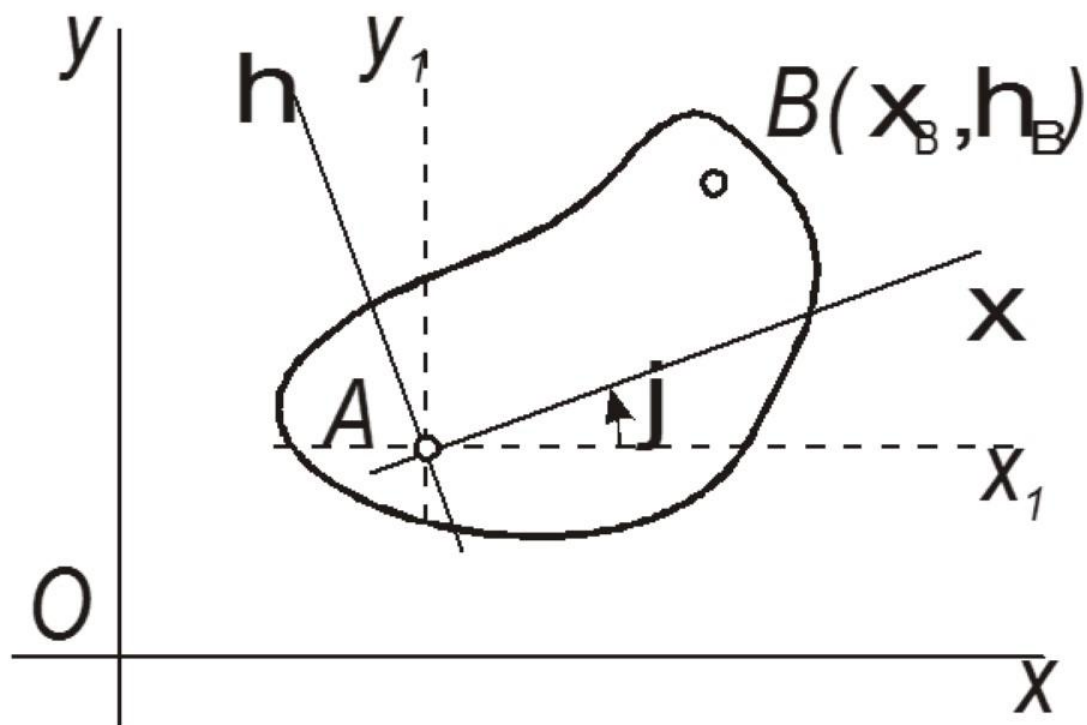
Движение тела называется плоско-параллельным (плоским), если траектория любой его точки лежит в плоскости, которая параллельна некоторой неподвижной заданной плоскости



# Плоский механизм



# Аналитическое задание плоско-параллельного движения



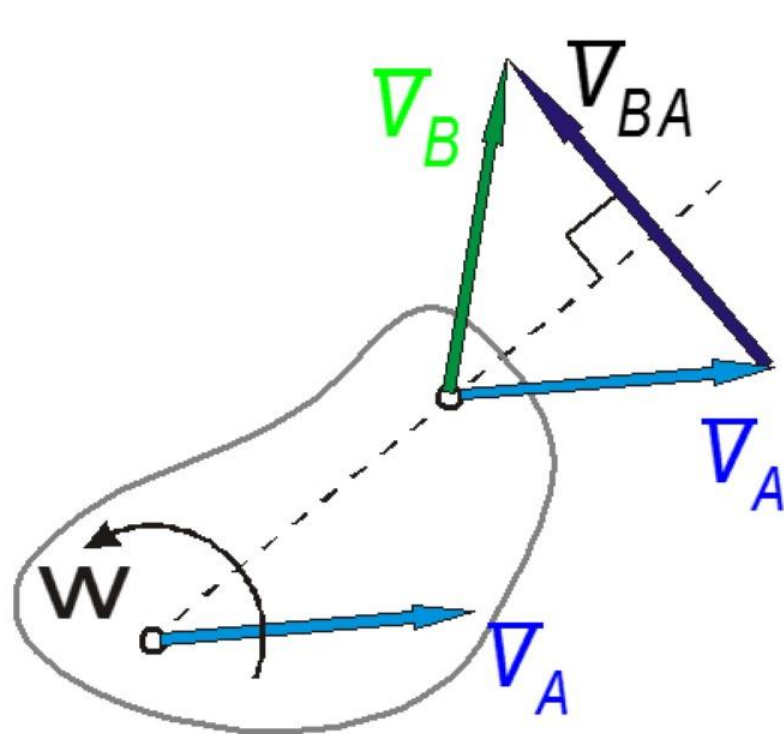
Закон плоско-  
параллельного  
движения

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = x_A(t) + \xi_B \cos \varphi(t) - \eta_B \sin \varphi(t), \\ y_B = y_A(t) + \xi_B \sin \varphi(t) + \eta_B \cos \varphi(t). \end{cases}$$

# Теорема о скоростях точек плоских фигур

*Скорость любой точки плоской фигуры есть геометрическая сумма скорости полюса и скорости вращения точки вокруг полюса*



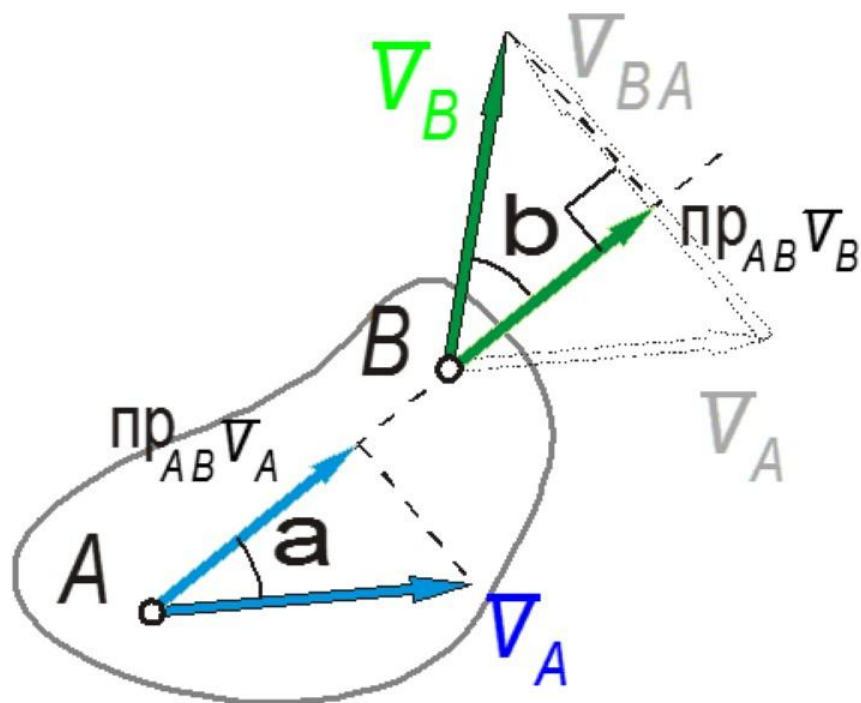
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

$$v_{BA} = \omega \cdot AB$$

$$\mathbf{v}_{BA} \perp AB$$

# Следствия из теоремы о скоростях точек плоских фигур

**Следствие 1.** Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на отрезок соединяющий точки равны



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

**Доказательство:**

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

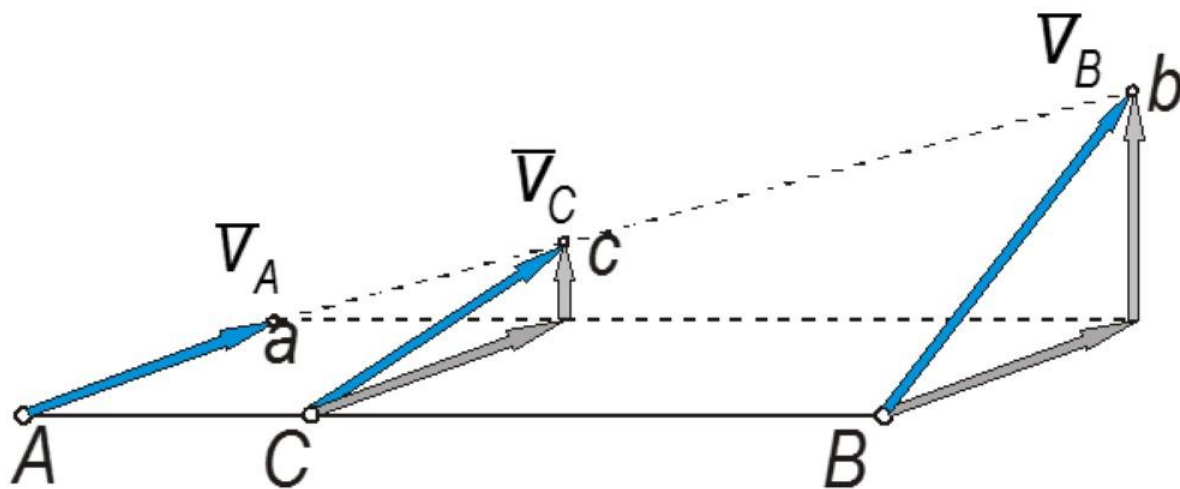
$$\text{пр}_{AB} \mathbf{v}_B = \text{пр}_{AB} \mathbf{v}_A + \text{пр}_{AB} \mathbf{v}_{BA} \quad 0(\mathbf{v}_{BA} \perp AB)$$

Удобная форма записи

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$$

## Следствия из теоремы о скоростях точек плоских фигур

**Следствие 2.** Концы векторов скоростей различных точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками



$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ac}{AC}$$

# Мгновенный центр скоростей

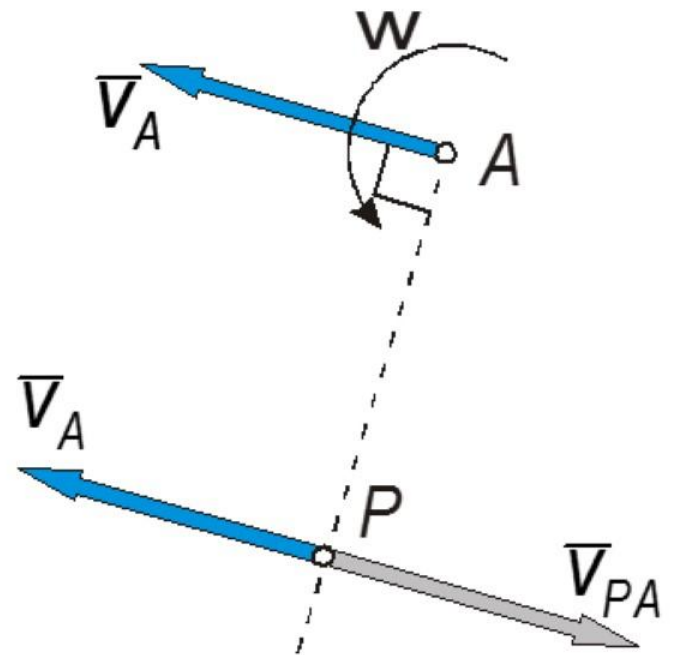
Мгновенным центром скоростей (м.ц.с.) называется такая точка плоской фигуры или точка плоскости, неизменно связанной с этой фигурой, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

## Теорема о существовании м.ц.с.

Если угловая скорость плоской фигуры не равна нулю, то мгновенный центр скоростей существует

$$AP = \frac{V_A}{\omega}, \quad V_{PA} = \omega \cdot AP = V_A$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA} = 0$$





# Свойства мгновенного центра скоростей

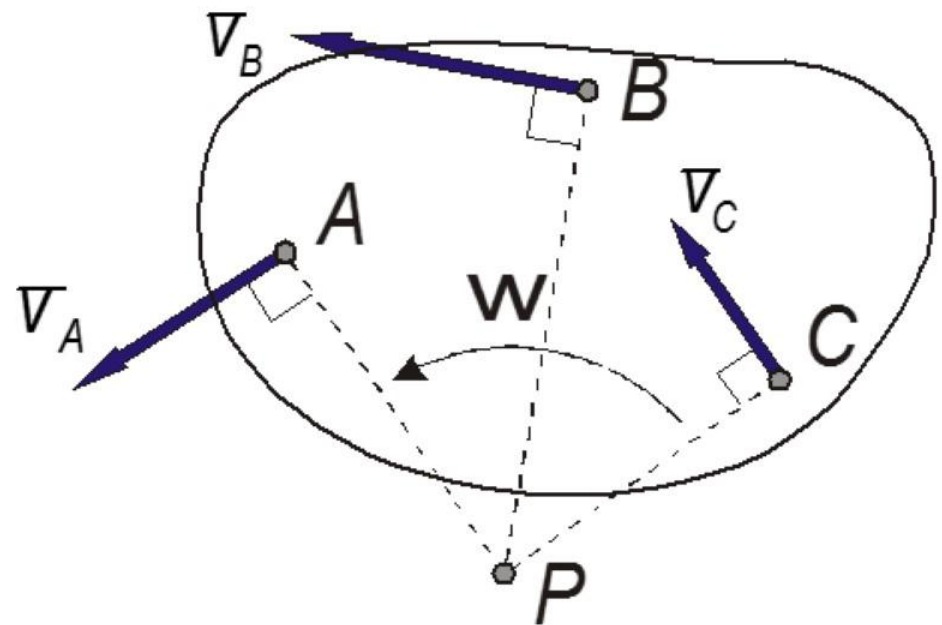
$$\nabla_B = \nabla_P + \nabla_{PB} = \nabla_{PB}$$

Скорость любой точки плоской фигуры есть скорость вращения этой точки вокруг мгновенного центра скоростей.

1.  $\nabla_B \perp PB$

2.  $v_B = \omega \cdot PB$

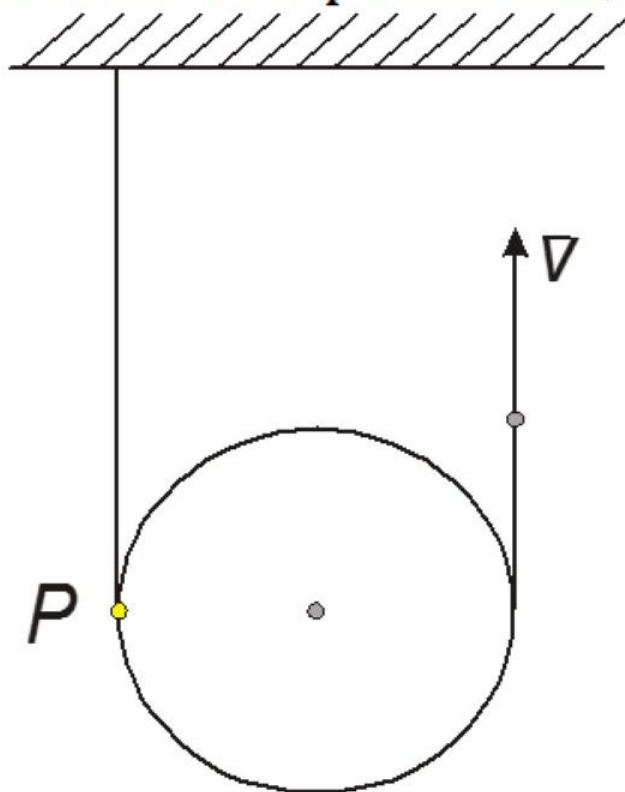
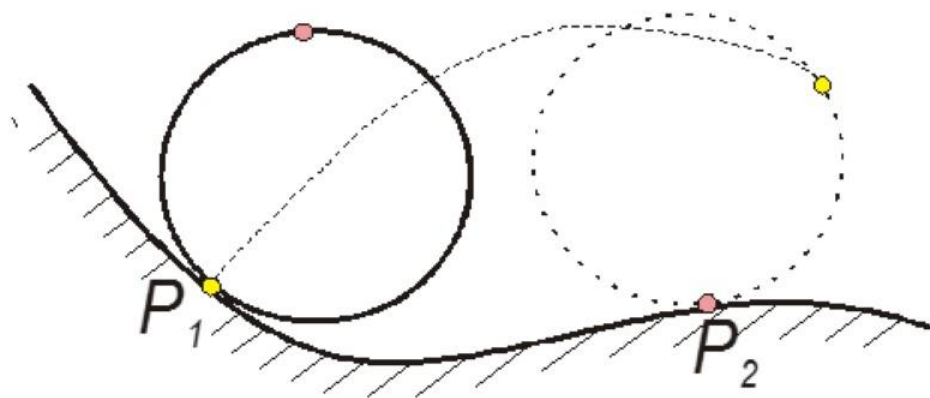
$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP}$$



# Способы определения положения мгновенного центра скоростей

## 1. Исходя из условия задачи

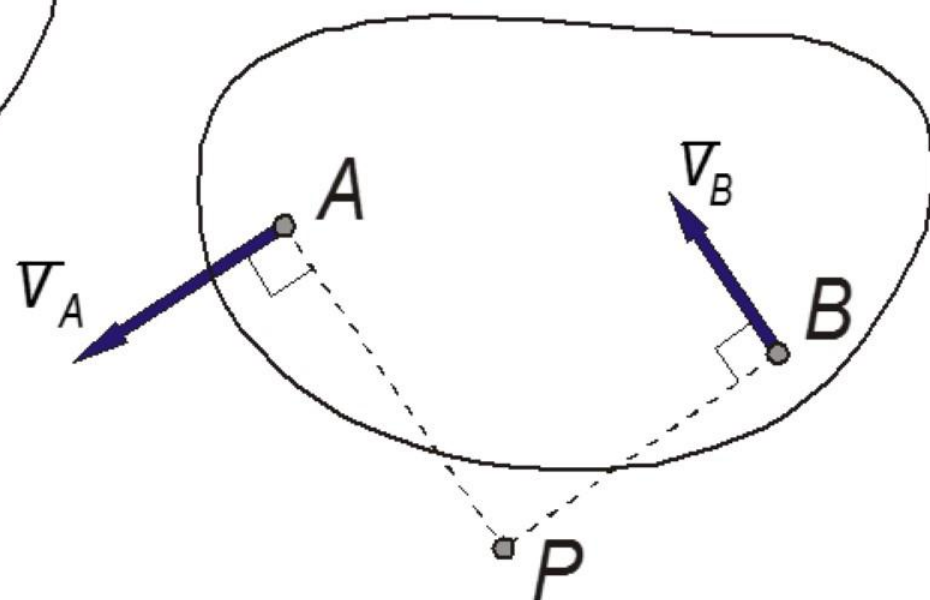
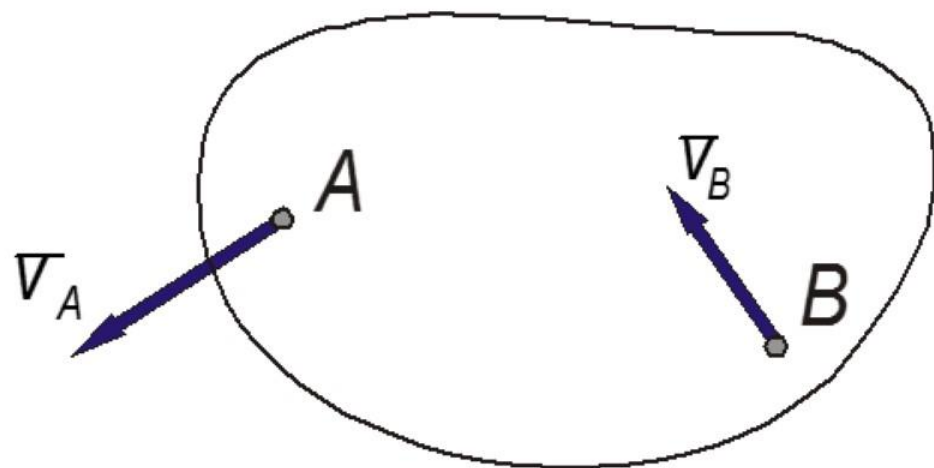
Мгновенный центр скоростей находится в той точке тела, которая соприкасается с неподвижной поверхностью, если нет проскальзывания.



# Способы определения положения мгновенного центра скоростей

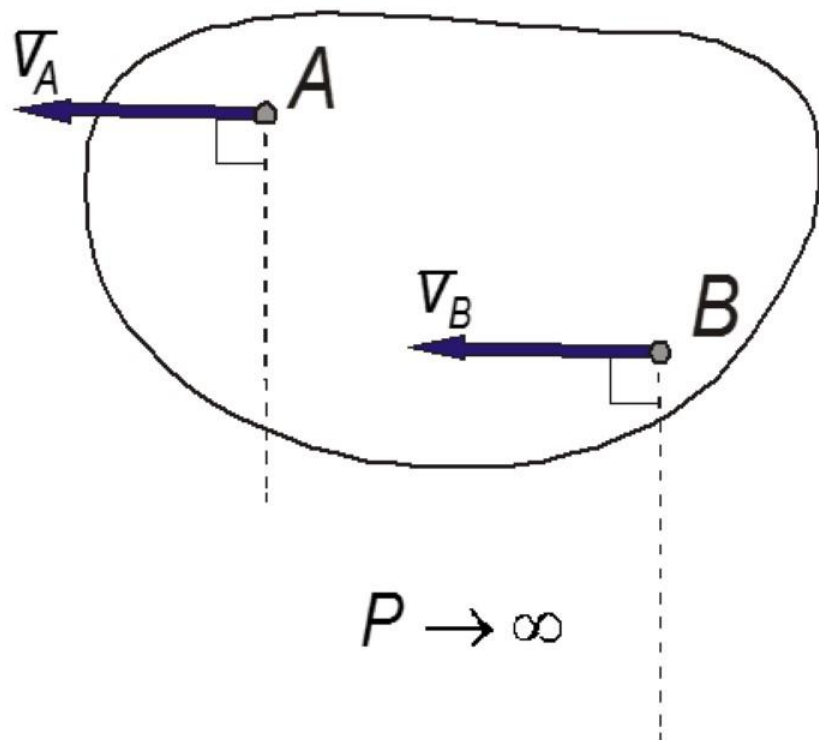
## 2. По скоростям двух точек плоской фигуры

A)  $\vec{v}_A \nparallel \vec{v}_B$



## Способы определения положения мгновенного центра скоростей

Б)  $\nabla_A \parallel \nabla_B$ ,  $AB \not\perp \nabla_A$



$$\omega = \frac{v_A}{AP} = 0$$

В такой момент времени  
движение тела называется  
мгновенным поступательным

$$\nabla_A = \nabla_B = \nabla_C$$

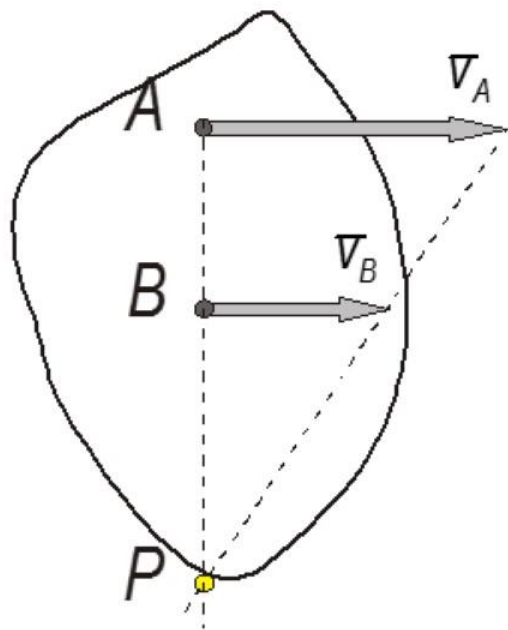
Но !!!

$$\mathcal{W}_A \neq \mathcal{W}_B$$

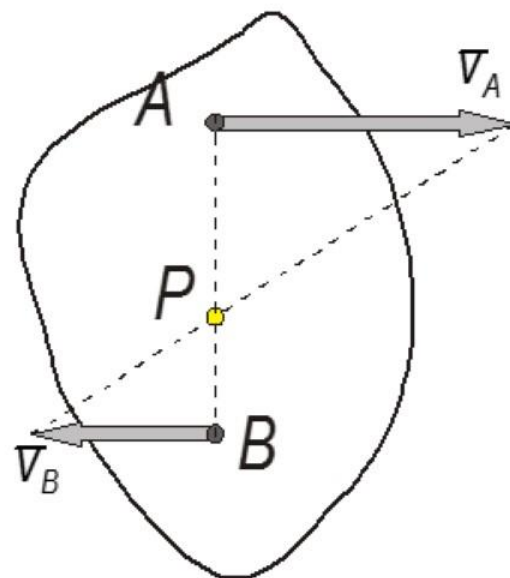
$$\varepsilon \neq 0$$

# Способы определения положения мгновенного центра скоростей

В)  $\nabla_A \parallel \nabla_B$ ,  $AB \perp \nabla_A$



$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A - V_B}{AB} = \omega$$

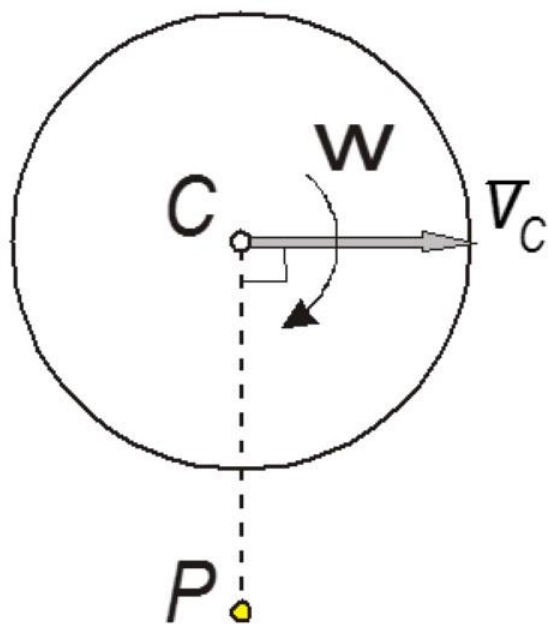


$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A + V_B}{AB} = \omega$$

## Способы определения положения мгновенного центра скоростей

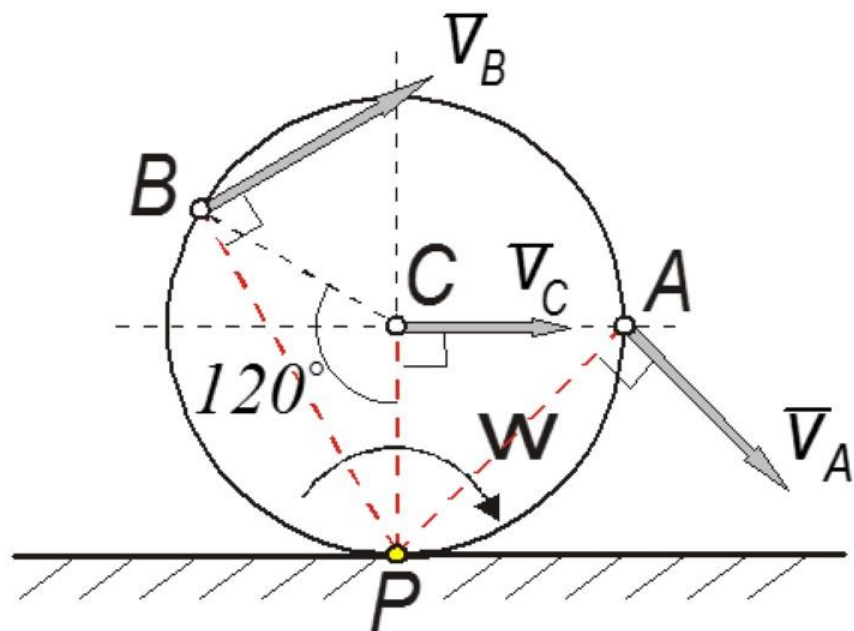
---

**3. По известной скорости одной из точек и угловой скорости тела - по теореме о существовании м.ц.с.**



$$CP = \frac{V_C}{\omega}$$

## Примеры определения скоростей точек плоских фигур



Колесо катится без проскальзывания по неподвижной плоскости. Скорость центра колеса равна  $2\text{ м/с}$ . Найти скорости точек  $A$  и  $B$ , а также угловую скорость колеса. Радиус колеса  $0.5\text{ м}$ .

$$\frac{v_C}{CP} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \omega, \quad CP = R, \quad AP = R\sqrt{2}, \quad BP = R\sqrt{3}$$

$$v_A = 2\sqrt{2}\text{ м/с}, \quad v_B = 2\sqrt{3}\text{ м/с}, \quad \omega = 4\text{ рад/с}$$

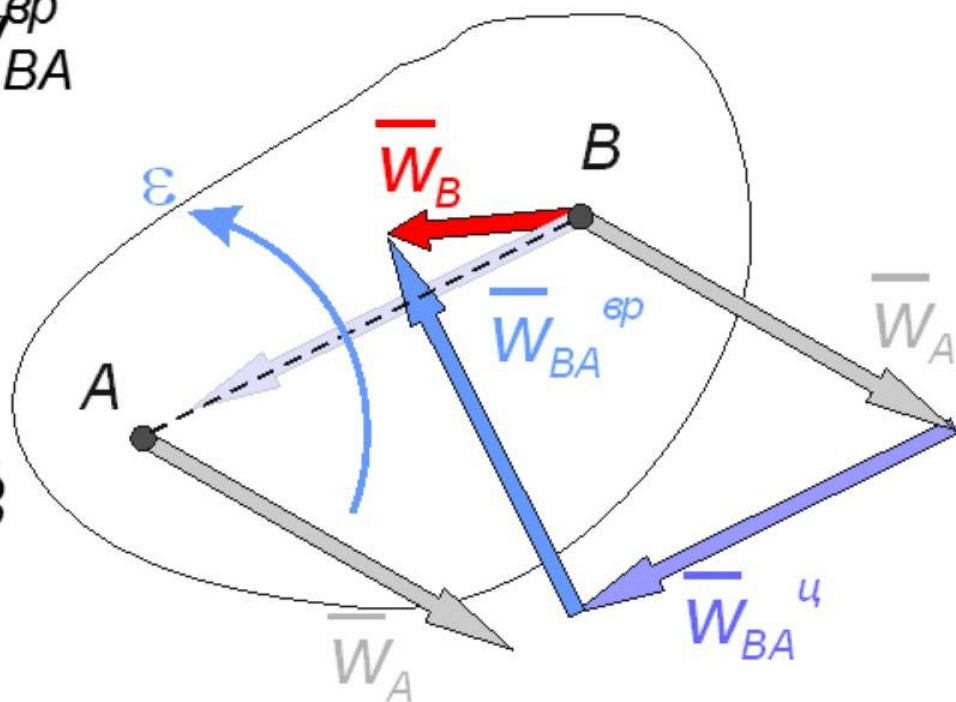
# фигур

Ускорение любой точки плоской фигуры есть геометрическая сумма ускорения полюса и центростремительного и вращательного ускорений при вращении точки вокруг полюса.

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^u + \vec{W}_{BA}^{sp}$$

$$W_{BA}^{sp} = \varepsilon \cdot AB, \quad W_{BA}^{sp} \perp AB$$

$$W_{BA}^u = \omega^2 \cdot AB \quad W_{BA}^u \parallel \overline{AB}$$





# фигур

Доказательство теоремы

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}$$

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}_B = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times \dot{\overline{AB}} =$$

$$= \mathbf{w}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB})$$

Вращательное ускорение

$$\mathbf{w}_{BA}^{sp} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB}$$

$$\mathbf{w}_{BA}^{sp} = \varepsilon \cdot AB, \quad \mathbf{w}_{BA}^{sp} \perp AB$$

Центростремительное ускорение

$$\mathbf{w}_{BA}^u = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB})$$

$$\mathbf{w}_{BA}^u = \omega^2 \cdot AB \quad \mathbf{w}_{BA}^u \parallel \overline{AB}$$

