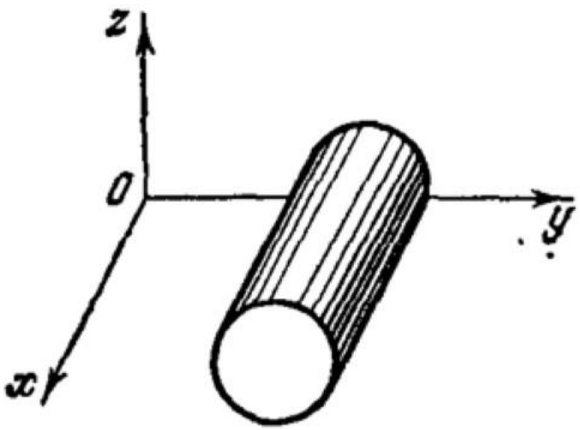
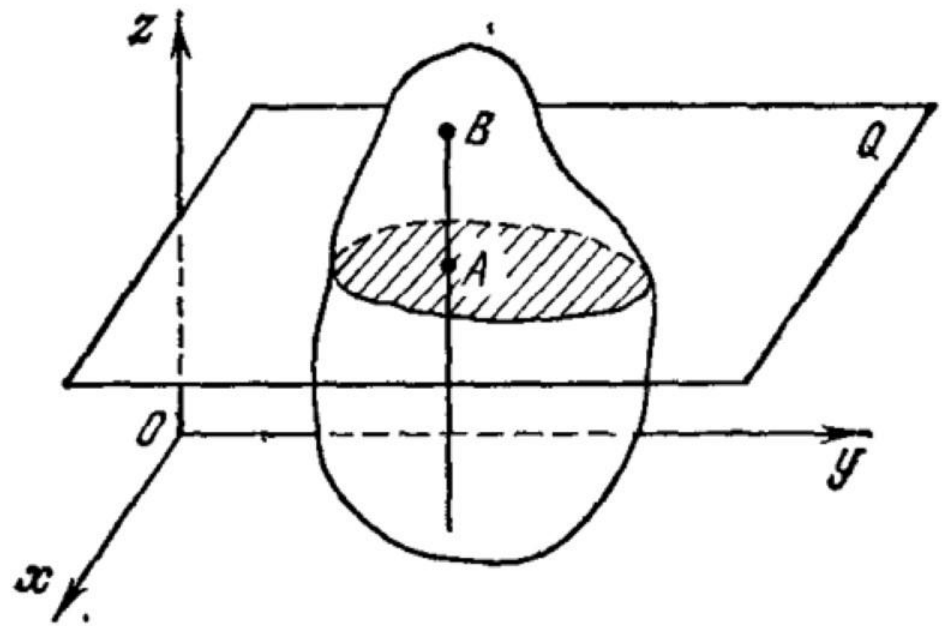
Плоско-параллельное движение твердого тела

Лекция 8

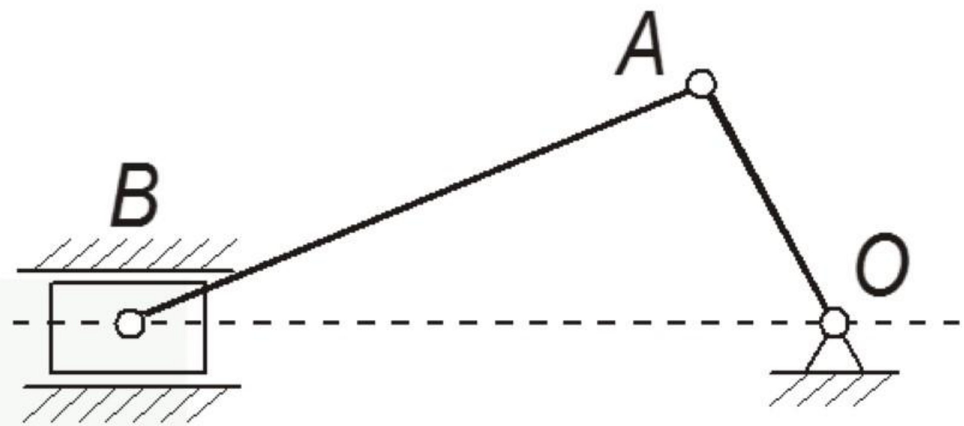
Определение движения и его замена

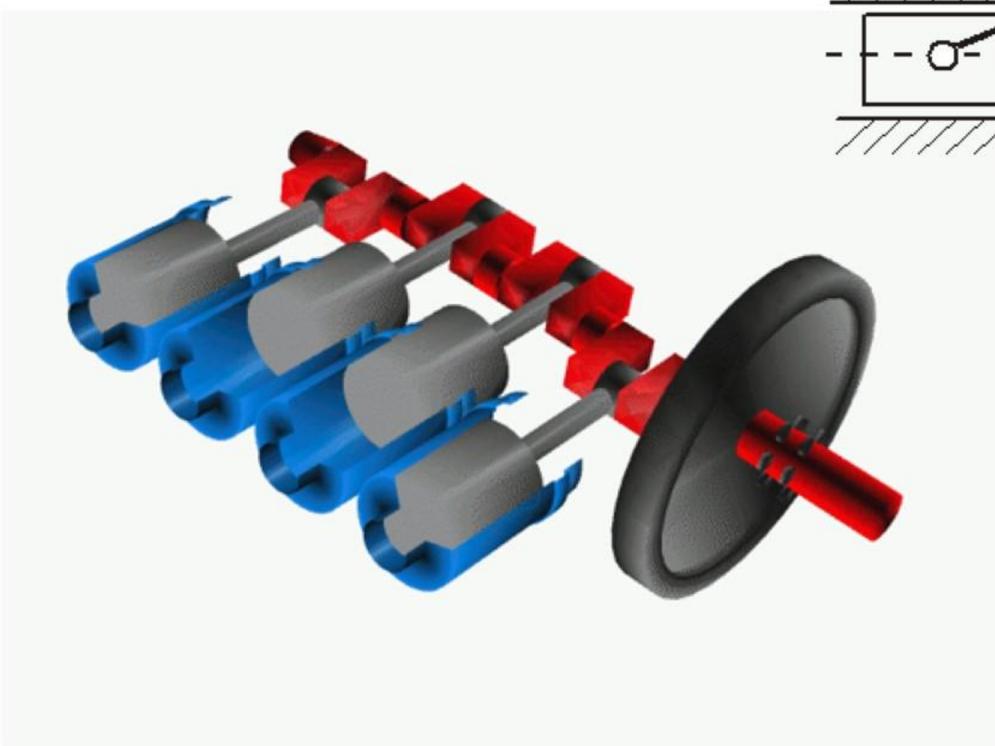
Движение тела называется плоско-параллельным (плоским), если траектория любой его точки лежит в плоскости, которая параллельна некоторой неподвижной заданной плоскости



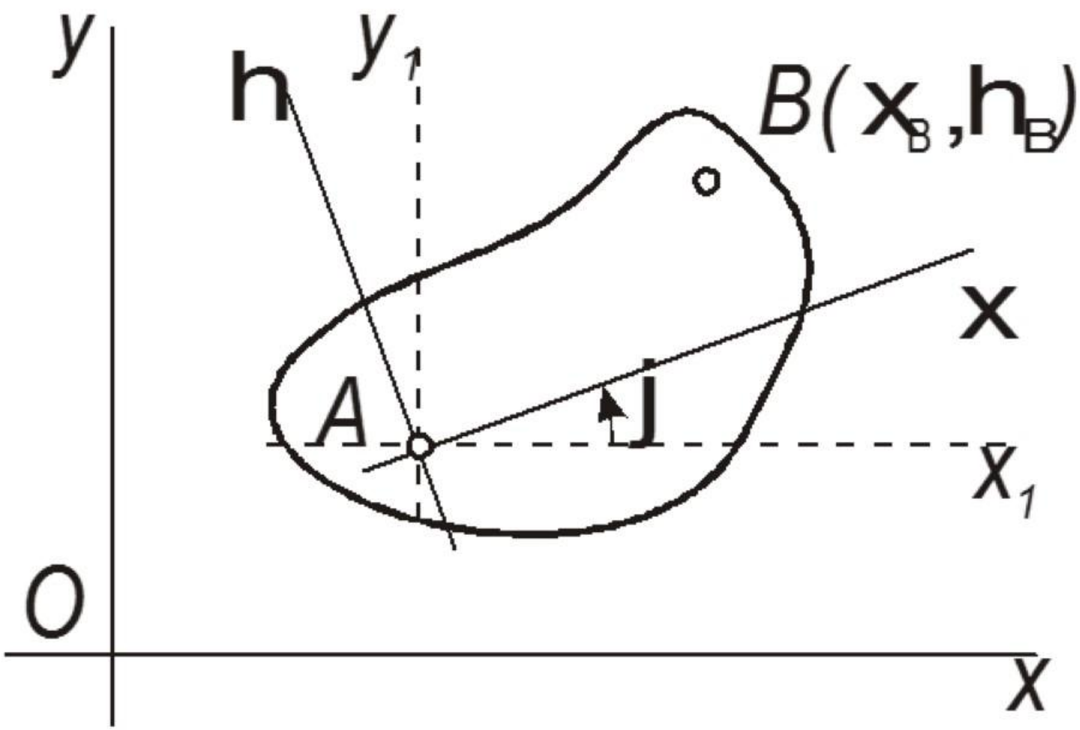


Плоский механизм





Аналитическое задание плоско-параллельного движения



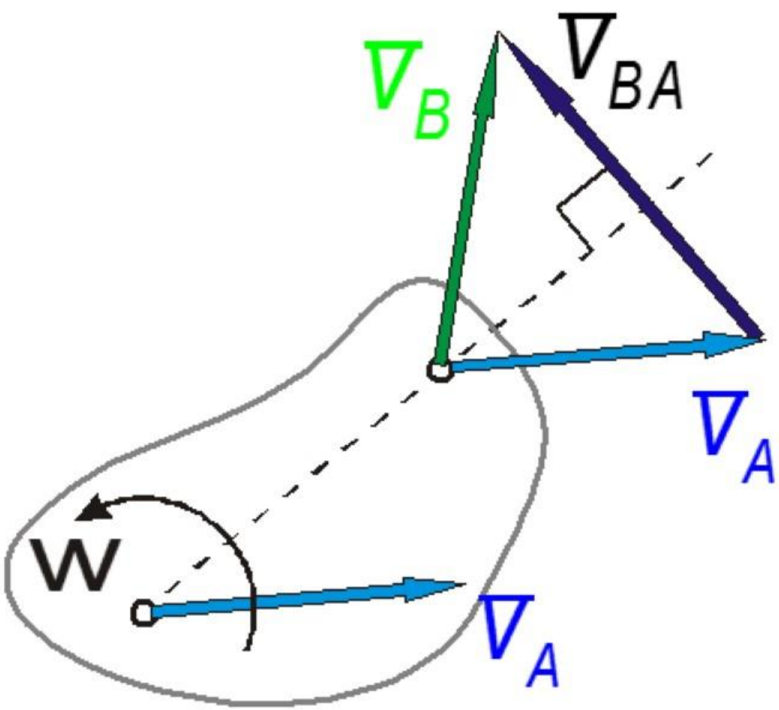
Закон плоско-параллельного движения

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = x_A(t) + \xi_B \cos\varphi(t) - \eta_B \sin\varphi(t), \\ y_B = y_A(t) + \xi_B \sin\varphi(t) + \eta_B \cos\varphi(t). \end{cases}$$

Теорема о скоростях точек плоских фигур

Скорость любой точки плоской фигуры есть геометрическая сумма скорости полюса и скорости вращения точки вокруг полюса



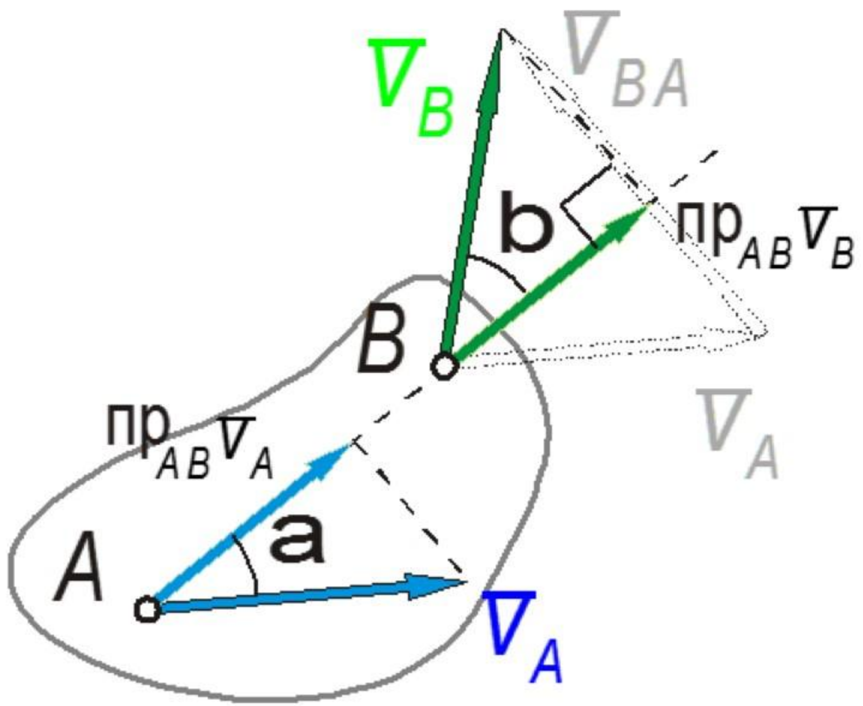
$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB} = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

$$v_{BA} = \omega \cdot AB$$

$$\bar{v}_{BA} \perp AB$$

Следствия из теоремы о скоростях точек плоских фигур

Следствие 1. Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на отрезок соединяющий точки равны



$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

Доказательство:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

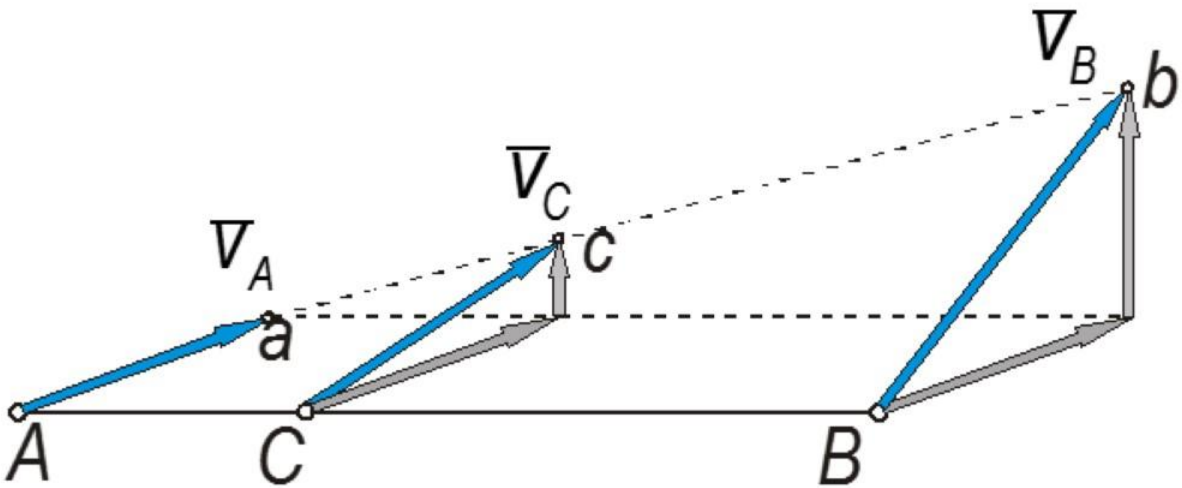
$$\text{пр}_{AB}\bar{v}_B = \text{пр}_{AB}\bar{v}_A + \cancelto{0\,(\bar{v}_{BA}\perp AB)}{\text{пр}_{AB}\bar{v}_{BA}}$$

Удобная форма записи

$$v_A\cos\alpha = v_B\cos\beta$$

Следствия из теоремы о скоростях точек плоских фигур

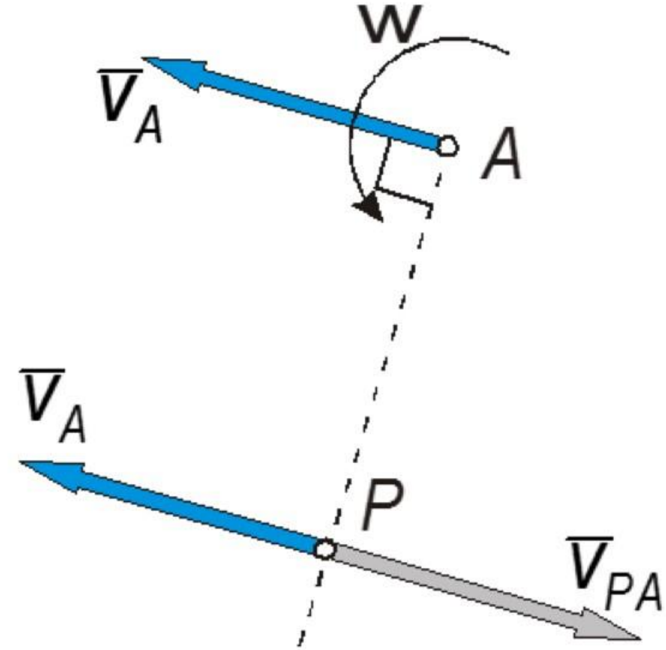
Следствие 2. Концы векторов скоростей различных точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками



$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ac}{AC}$$

Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей (м.ц.с.) называется такая точка плоской фигуры или точка плоскости, неизменно связанной с этой фигурой, скорость которой в данный момент времени равна нулю.



Теорема о существовании м.ц.с.

Если угловая скорость плоской фигуры не равна нулю, то мгновенный центр скоростей существует

$$AP = \frac{V_A}{\omega}, \quad V_{PA} = \omega \cdot AP = V_A$$

$$\bar{V}_P = \bar{V}_A + \bar{V}_{PA} = 0$$

Свойства мгновенного центра скоростей

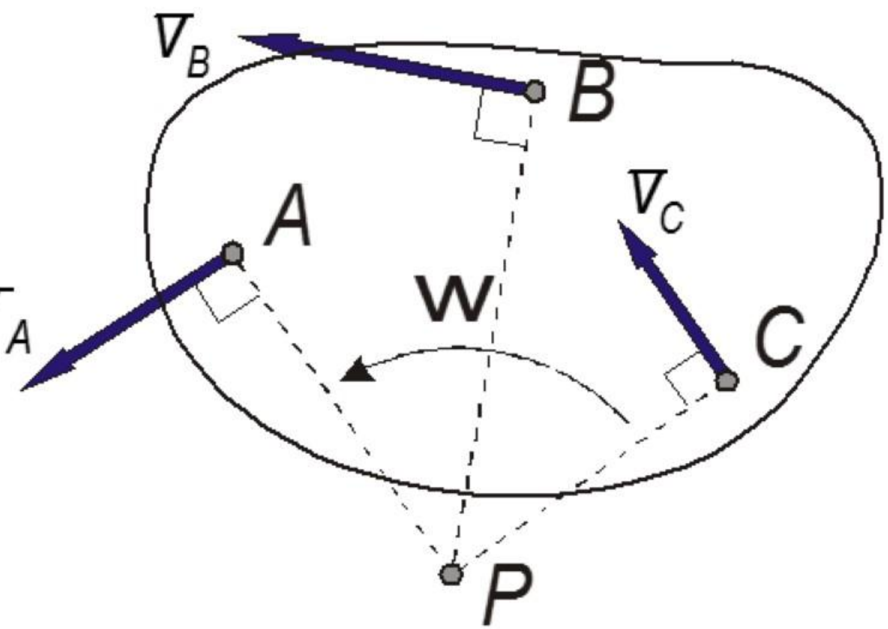
$$\bar{V}_B = \bar{V}_P + \bar{V}_{PB} = \bar{V}_{PB}$$

Скорость любой точки плоской фигуры есть скорость вращения этой точки вокруг мгновенного центра скоростей.

1. $\bar{V}_B \perp PB$

2. $V_B = \omega \cdot PB$

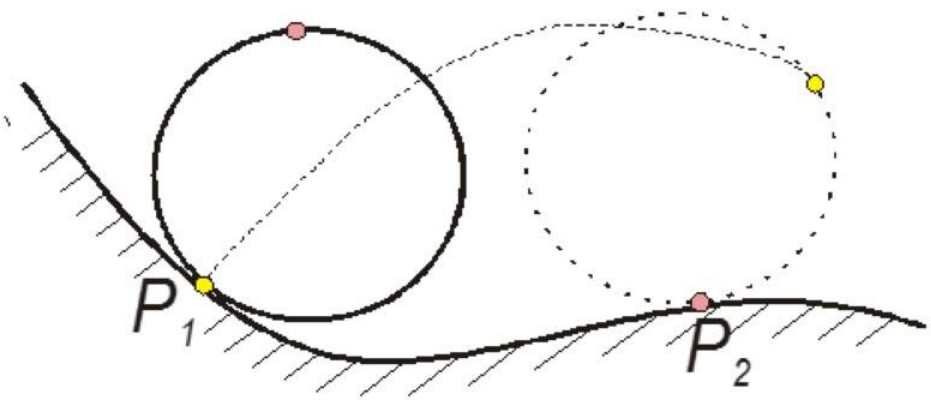
$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}$$

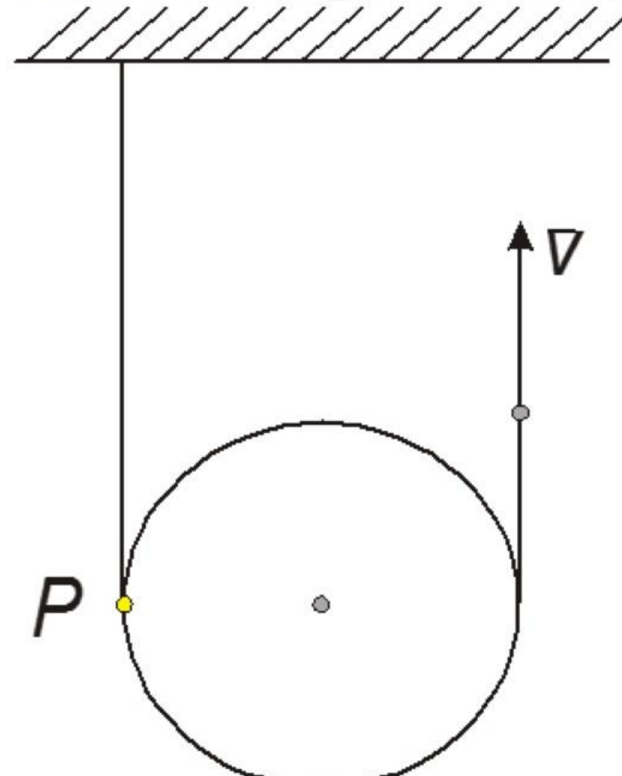


Способы определения положения мгновенного центра скоростей

1. Исходя из условия задачи

Мгновенный центр скоростей находится в той точке тела, которая соприкасается с неподвижной поверхностью, если нет проскальзывания.

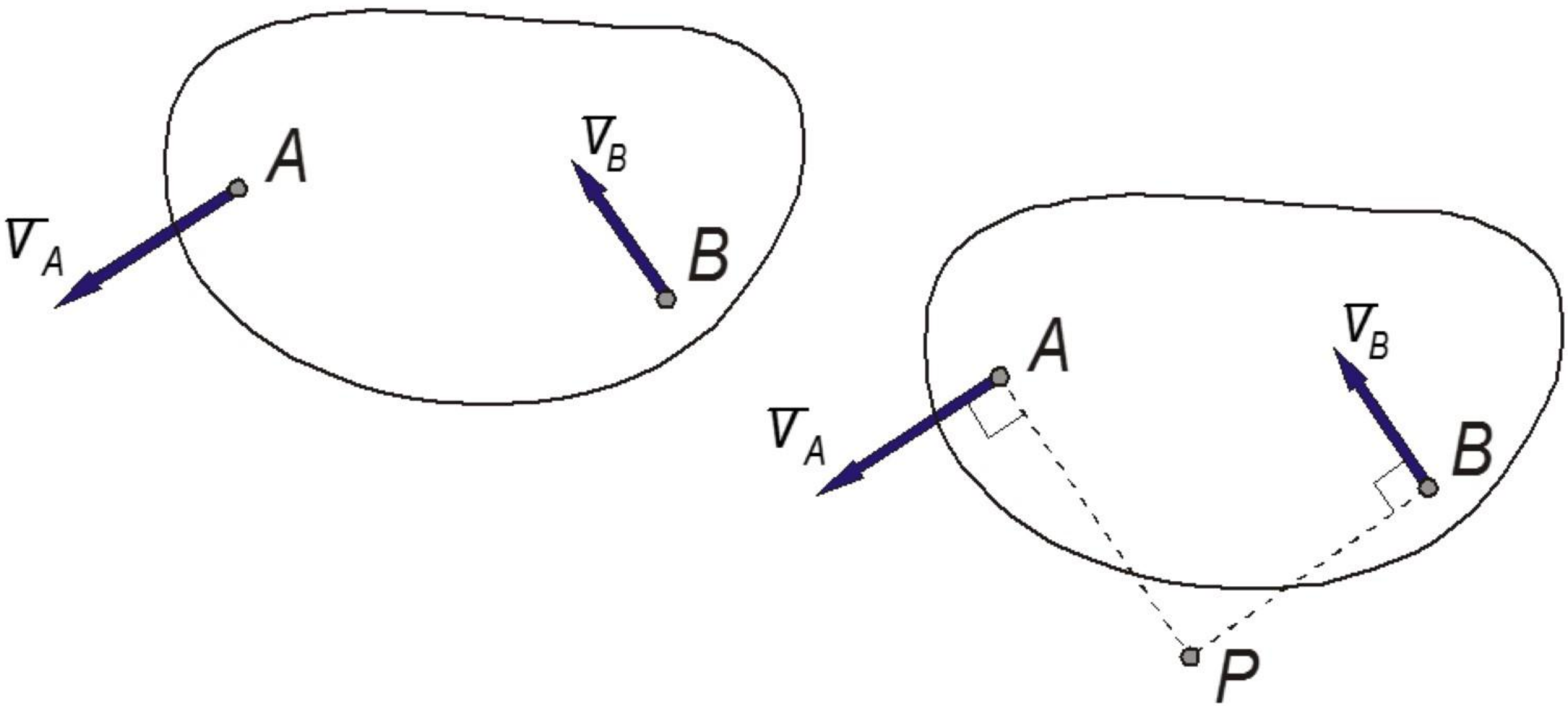




Способы определения положения мгновенного центра скоростей

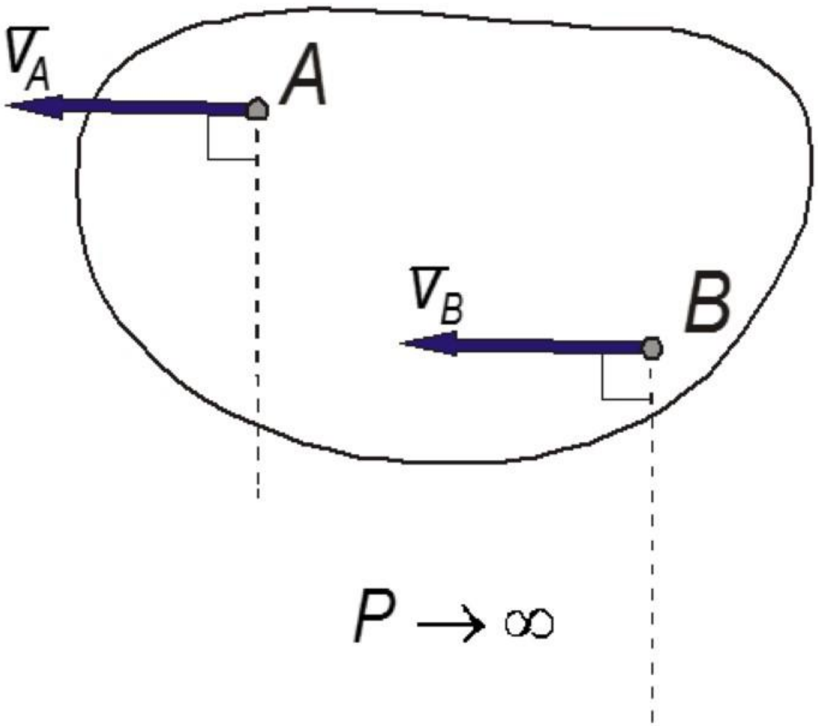
2. По скоростям двух точек плоской фигуры

А) $\bar{V}_A \nparallel \bar{V}_B$



Способы определения положения мгновенного центра скоростей

Б) $\bar{V}_A \parallel \bar{V}_B,\ \ AB \not\perp \bar{V}_A$



$$P \to \infty$$

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = 0$$

В такой момент времени движение тела называется мгновенным поступательным

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B = \bar{V}_C$$

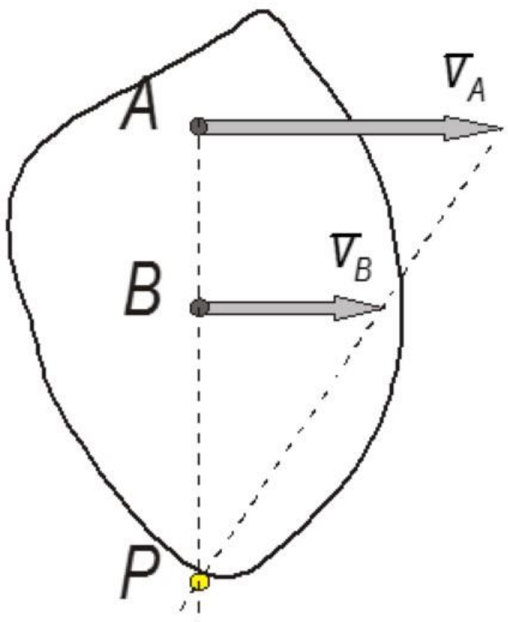
Но !!!

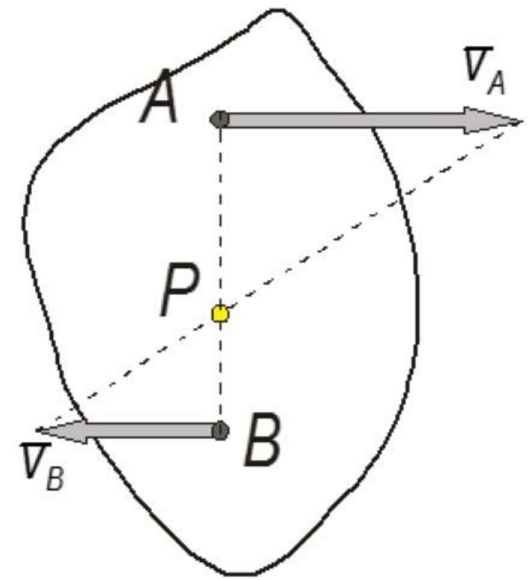
$$\bar{W}_A \neq \bar{W}_B$$

$$\varepsilon \neq 0$$

Способы определения положения мгновенного центра скоростей

в) $\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B, \quad AB \perp \bar{v}_A$



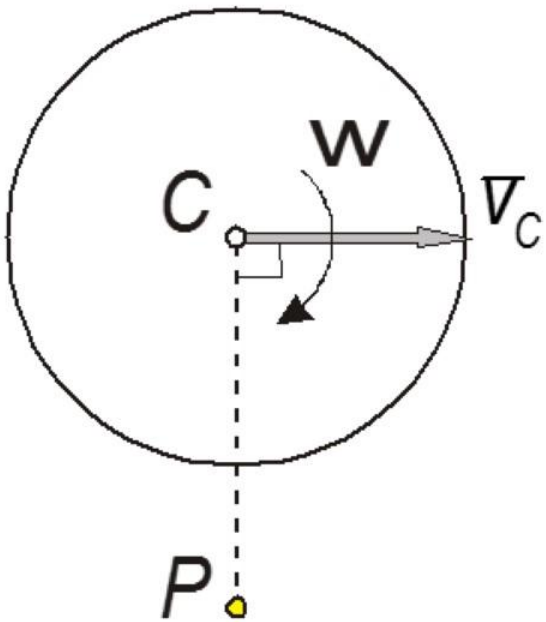


$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A - v_B}{AB} = \omega$$

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A + v_B}{AB} = \omega$$

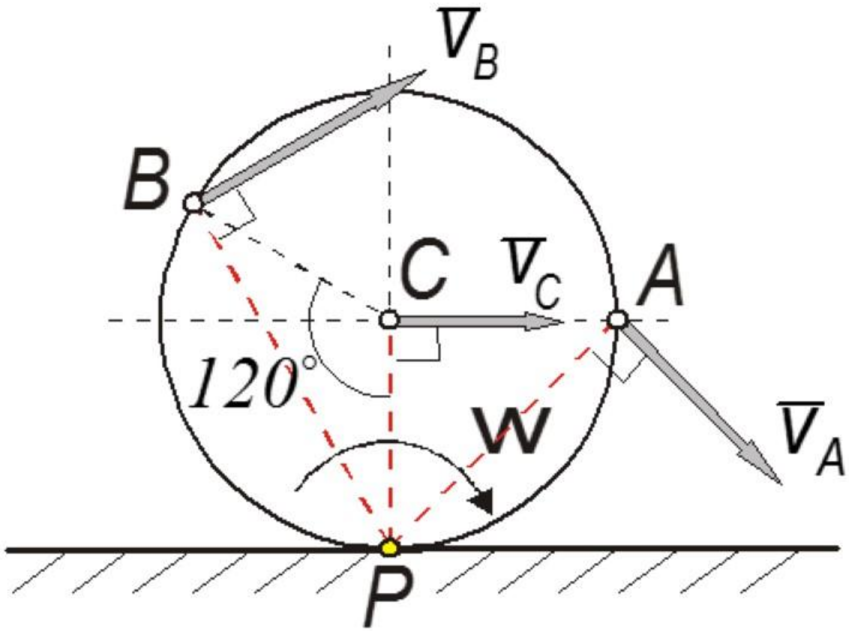
Способы определения положения мгновенного центра скоростей

3. По известной скорости одной из точек и угловой скорости тела - по теореме о существовании м.ц.с.



$$CP = \frac{V_C}{\omega}$$

Примеры определения скоростей точек плоских фигур



Колесо катится без проскальзывания по неподвижной плоскости. Скорость центра колеса равна 2м/с. Найти скорости точек А и В, а также угловую скорость колеса. Радиус колеса 0.5м.

$$\frac{v_C}{CP} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \omega, \qquad CP = R,\ AP = R\sqrt{2},\ BP = R\sqrt{3}$$

$$v_A = 2\sqrt{2}\,м/с,\ v_B = 2\sqrt{3}\,м/с,\ \omega = 4\,рад/с$$

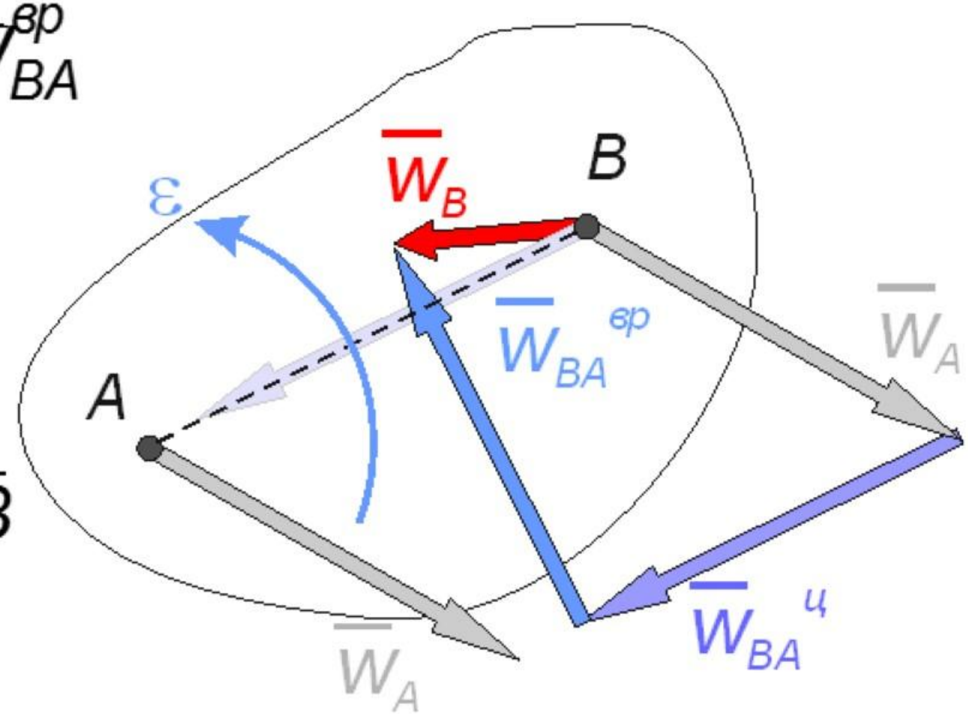
Теорема об ускорениях точек плоских фигур

Ускорение любой точки плоской фигуры есть геометрическая сумма ускорения полюса и центростремительного и вращательного ускорений при вращении точки вокруг полюса.

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^{\text{ц}} + \overline{w}_{BA}^{\text{вр}}$$

$$w_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot AB, \ \ \overline{w}_{BA}^{\text{вр}} \perp AB$$

$$w_{BA}^{\text{ц}} = \omega^2 \cdot AB \quad \overline{w}_{BA}^{\text{ц}} \parallel \overline{AB}$$



фигур

- Доказательство теоремы

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}$$

$$\bar{w} = \dot{\bar{v}}_B = \dot{\bar{v}}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times \dot{\overline{AB}} =$$

$$= \bar{w}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overline{AB}\right)$$

Вращательное ускорени

$$\bar{w}_{BA}^{вр} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB}$$

$$w_{BA}^{вр} = \varepsilon \cdot AB, \;\; \bar{w}_{BA}^{вр} \perp AB$$

Центростремительное уско

$$\bar{w}_{BA}^{ц} = \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overline{AB}\right)$$

$$w_{BA}^{ц} = \omega^2 \cdot AB \quad \bar{w}_{BA}^{ц} \parallel \overline{AB}$$