

# Типы моделей процессов и систем

# УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1. Математические схемы процессов и систем.**
- 2. Формальная модель объекта.**
- 3. Типовые математические схемы.**

## ***ЛИТЕРАТУРА:***

*Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа, 2005 г., с. 45...50.*

# 1. Математические схемы процессов и систем

**Математическую схему** можно определить как звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учетом воздействия внешней среды, т.е. имеет место цепочка «описательная модель — математическая схема — математическая [аналитическая или (и) имитационная] модель».

Введение понятия «*математическая схема*» позволяет рассматривать математику не как метод расчета, а как метод мышления, как средство формулирования понятий, что является наиболее важным при переходе от словесного описания системы к формальному представлению процесса ее функционирования в виде некоторой математической модели (аналитической или имитационной). При использовании математической схемой исследователя системы  $S$  в первую очередь должен интересовать вопрос об адекватности отображения в виде конкретных схем реальных процессов в исследуемой системе, а не возможность получения ответа (результата решения) на конкретный вопрос исследования.

Каждая конкретная система  $S$  характеризуется набором свойств, под которыми понимаются величины, отражающие поведение моделируемого объекта (реальной системы) и учитывающие условия ее функционирования во взаимодействии с внешней средой (системой)  $E$ . При построении математической модели системы необходимо решить вопрос об ее полноте. Полнота модели регулируется в основном выбором границы «система  $S$  – среда  $E$ ». Также должна быть решена задача упрощения модели, которая помогает выделить основные свойства системы, отбросив второстепенные. Причем отнесение свойств системы к основным или второстепенным существенно зависит от цели моделирования системы (например, анализ вероятностно-временных характеристик процесса функционирования системы, синтез структуры системы и т.д.).

## 2. Формальная модель объекта

**Модель объекта моделирования, т. е. систему S, можно представить в виде множества величин описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих в общем случае следующие подмножества**

1) совокупность входных воздействий на систему (1):

$$x_i \in X, i = \overline{1, n} \quad (1)$$

2) совокупность воздействий внешней среды (2):

$$v_l \in V, l = \overline{1, n_v} \quad (2)$$

3) совокупность внутренних (собственных) параметров системы (3):

$$h_k \in H, k = \overline{1, n_H} \quad (3)$$

4) совокупность выходных характеристик системы (4):

$$y_j \in Y, j = \overline{1, n_Y} \quad (4)$$

При моделировании системы  $S$  входные воздействия, воздействия внешней среды  $E$  и внутренние параметры системы являются независимыми (экзогенными) переменными, которые в векторной форме имеют соответственно вид (5):

$$\begin{aligned}
 \overline{x}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n_X}(t)); \\
 \overline{v}(t) &= (v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n_V}(t)); \\
 \overline{h}(t) &= (h_1(t), h_2(t), \dots, h_{n_H}(t))
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

а выходные характеристики системы являются зависимыми (эндогенными) переменными и в векторной форме имеют вид (6):

$$\overline{y}(t) = F_S(y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n_Y}(t))
 \tag{6}$$

Процесс функционирования системы  $S$  описывается во времени оператором  $F_S$ , который, в общем случае, преобразует экзогенные переменные в эндогенные в соответствии с соотношениями вида (7):

$$\overline{y}(t) = (\overline{x}, \overline{v}, \overline{h}, t)
 \tag{7}$$

Для статических моделей математическая модель (7) представляет собой отображение между двумя подмножествами свойств моделируемого объекта  $Y$  и  $\{X, V, H\}$ , что в векторной форме может быть записано как (8):

$$\overline{y}(t) = (\overline{x}, \overline{v}, \overline{h})
 \tag{8}$$

Совокупность зависимостей выходных характеристик системы от времени для всех видов , называется **выходной траекторией** . Зависимость (7) называется **законом функционирования системы**  $S$  и обозначается  $F_S$ . В общем случае закон функционирования системы  $F_S$  может быть задан в виде функции, функционала, логических условий, в алгоритмической и табличной формах или в виде словесного правила соответствия.

Весьма важным для описания и исследования системы  $S$  является понятие **алгоритма функционирования**  $A_S$ , под которым *понимается* метод получения выходных характеристик с учетом входных воздействий внешней среды и собственных параметров системы. Очевидно, что один и тот же закон функционирования  $F_S$  системы  $S$  может быть реализован различными способами, т. е. с помощью множества различных алгоритмов функционирования  $A_S$ .



Для статических моделей математическая модель (7) представляет собой отображение между двумя подмножествами свойств моделируемого объекта  $Y$  и  $\{X, V, H\}$ , что в векторной форме может быть записано как

$$\bar{y}(t) = (\bar{x}, \bar{v}, \bar{h}). \quad (8)$$

Соотношения (7) и (8) могут быть заданы различными способами: аналитически (с помощью формул), графически, таблично и т.д. Такие соотношения в ряде случаев могут быть получены через свойства системы  $S$  в конкретные моменты времени, называемые состояниями. Состояние системы  $S$  характеризуется векторами (9):

$$\bar{z} = (z_1^i, z_2^i, \dots, z_k^i) \text{ и } \bar{z}'' = (\bar{z}_1'', \bar{z}_2'', \dots, \bar{z}_k''), \quad (9)$$

где  $z_1^i = z_1(t^i)$ ,  $z_2^i = z_2(t^i)$ , ...,  $z_k^i = z_k(t^i)$

в момент  $t^i \in (t_0, T)$ ;  $z_1'' = z_1(t'')$ ,  $z_2'' = z_2(t'')$ , ...,  $z_k'' = z_k(t'')$

в момент  $t'' \in (t_0, T)$  и т.д.,  $k = \overline{1, n_z}$ .

Если рассматривать процесс функционирования системы  $S$  как последовательную смену состояний  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)$ , то они могут быть интерпретированы как координаты точки в  $k$ -мерном фазовом пространстве, причем каждой реализации процесса будет соответствовать некоторая фазовая траектория. Совокупность всех возможных значений состояний  $\{\bar{z}\}$  называется пространством состояний объекта моделирования  $Z$ , причем  $z_k \in Z$ .

Состояния системы  $S$  в момент времени  $t_0 < t^* \leq T$  полностью определяются начальными условиями  $\bar{z}^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_k^0)$  [где  $z_1^0 = z_1(t_0), z_2^0 = z_2(t_0), \dots, z_k^0 = z_k(t_0)$ ], входными воздействиями  $\bar{x}(t)$ , внутренними параметрами  $h(t)$  и воздействиями внешней среды  $v(t)$ , которые имели место за промежуток времени  $t^* - t_0$ , с помощью двух векторных уравнений (10) и (11):

$$z(t) = \Phi(\bar{z}^0, \bar{x}, \bar{v}, \bar{h}, t). \quad (10)$$

$$\bar{y}(t) = F(\bar{z}, t). \quad (11)$$

Таким образом, под математической моделью объекта (реальной системы) понимают конечное подмножество переменных  $\{x(t), v(t), h(t)\}$  вместе с математическими связями между ними и характеристиками  $y(t)$ .

Если математическое описание объекта моделирования не содержит элементов случайности или они не учитываются, т. е. если можно считать, что в этом случае стохастические воздействия внешней среды  $v(t)$  и стохастические внутренние параметры  $h(t)$  отсутствуют, то модель называется детерминированной в том смысле, что характеристики однозначно определяются детерминированными входными воздействиями:

$$\bar{y}(t) = f(\bar{x}, t). \quad (13)$$

Очевидно, что детерминированная модель является частным случаем стохастической модели.

### 3. Типовые математические схемы

- дифференциальные уравнения;
- конечные и вероятностные автоматы;
- системы массового обслуживания;
- сети Петри.

*При построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы:*

1. непрерывно-детерминированный (например, дифференциальные уравнения);
2. дискретно-детерминированный (конечные автоматы);
3. дискретно-стохастический (вероятностные автоматы);
4. непрерывно-стохастический (системы массового обслуживания);
5. обобщенный или универсальный (агрегативные системы).