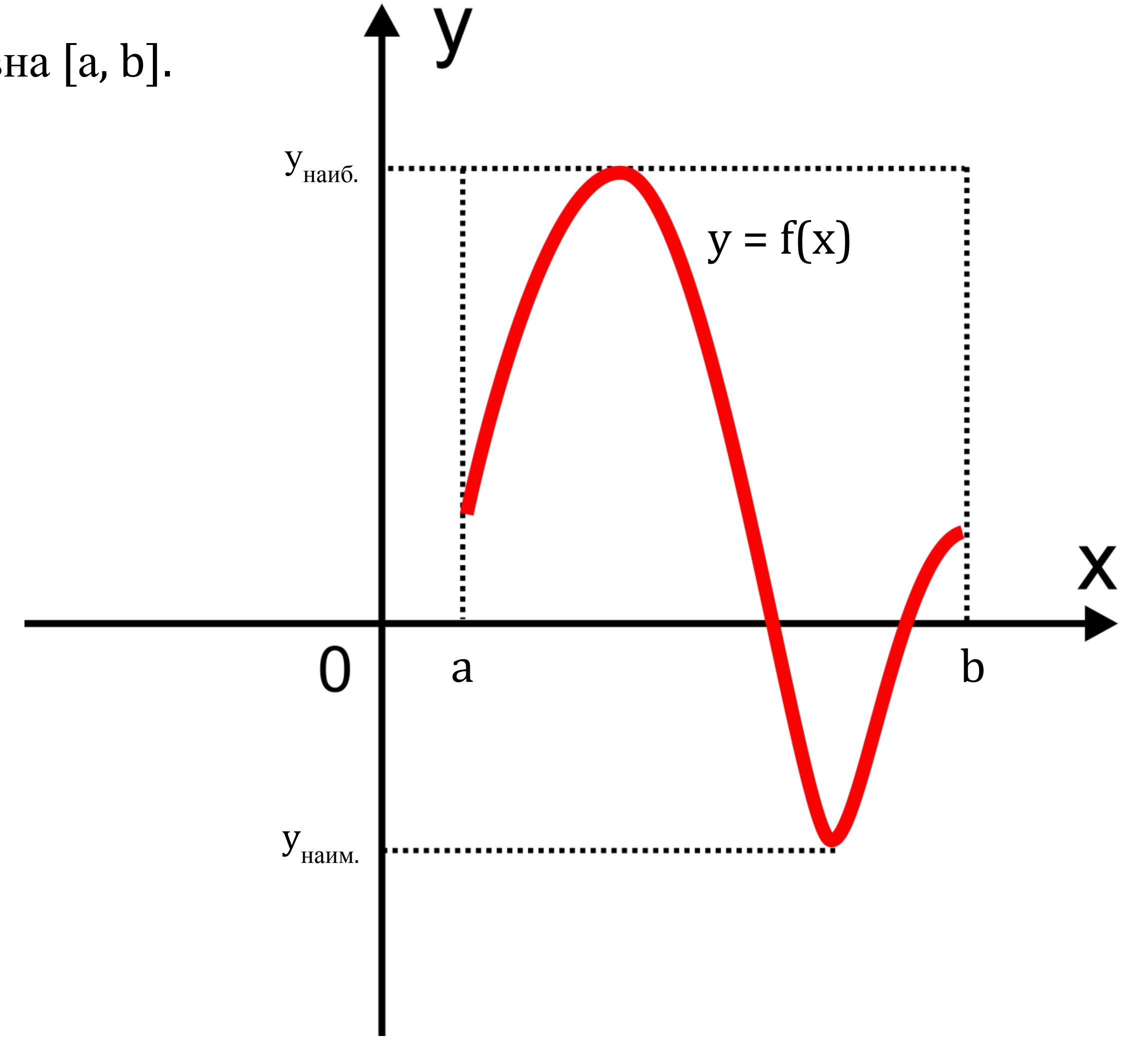
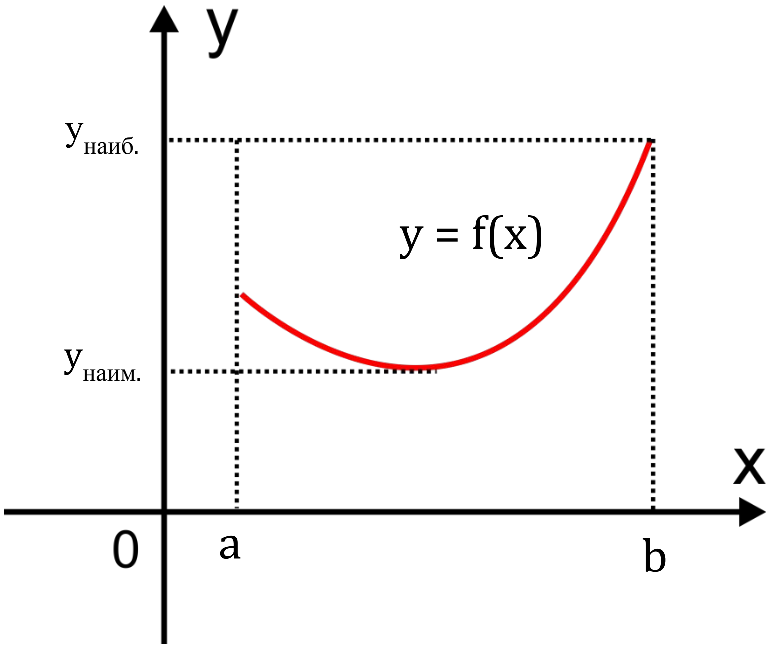
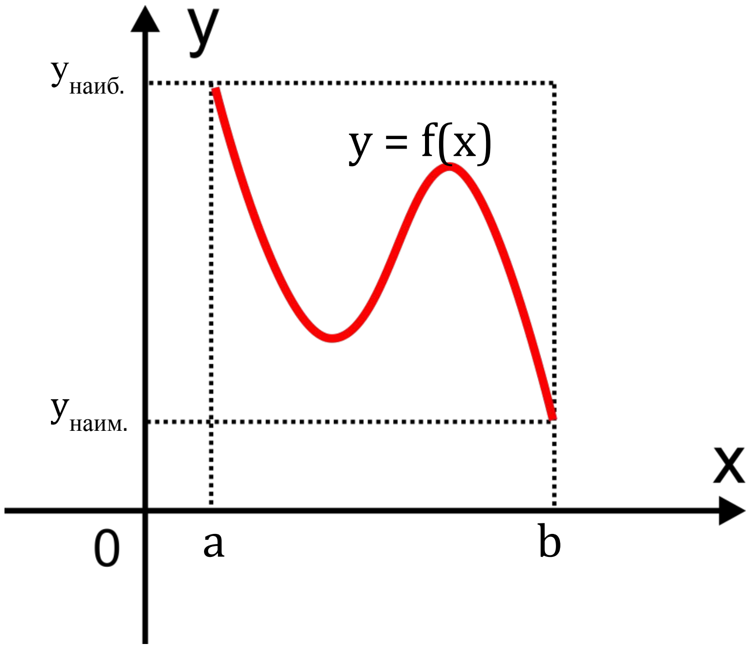
y = f(x) непрерывна [a, b].



1. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нём и своего наибольшего, и своего наименьшего значений.

2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.





3. Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

Стационарные точки — точки максимума или минимума.

Критические точки — это точки, в которых производная не существует.

Алгоритм отыскания наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1) найти производную $f'(x)$;

2) найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a, b]$;

3) вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это и будет $y_{\text{наим.}}$) и наибольшее (это и будет $y_{\text{наиб.}}$).

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$y = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $[\frac{1}{2}, 2]$.

Решение.

1)

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$y = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $[\frac{1}{2}, 2]$.

2)

$y' = 0;$

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$y = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $[\frac{1}{2}, 2]$.

$x_1 = 1, x_2 = -1.$

3)

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $[\frac{1}{2}, 2]$.

x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$6\frac{1}{8}$	4	$9\frac{1}{2}$

$$y_{\text{наим.}} = 4, x = 1;$$

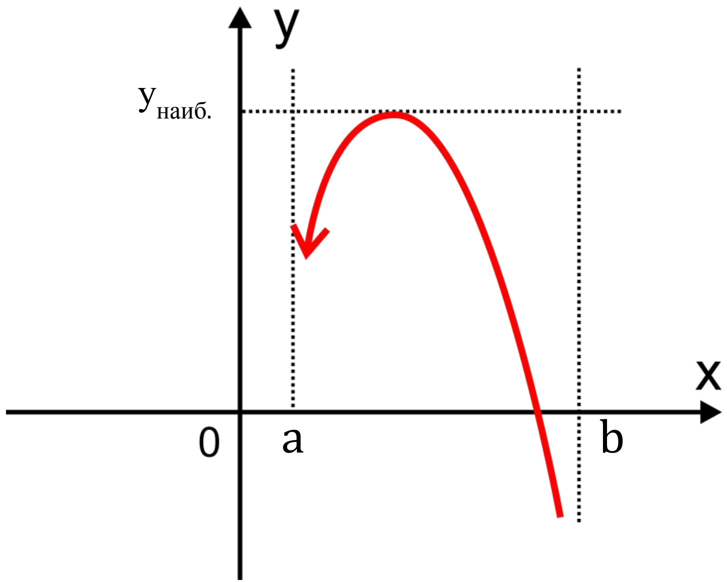
Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $[\frac{1}{2}, 2]$.

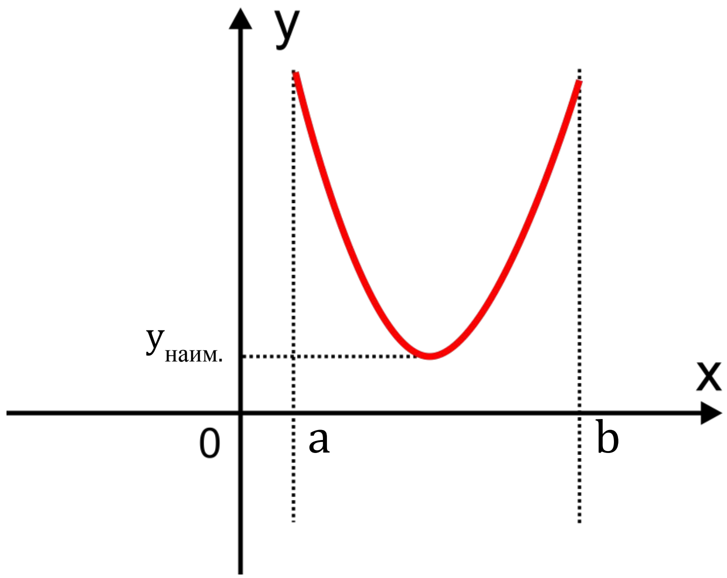
Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$.

Тогда:

а) если $x = x_0$ — точка максимума, то $y_{наиб.} = f(x_0)$;

б) если $x = x_0$ — точка минимума, то $y_{наим.} = f(x_0)$.





Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $[\frac{1}{2}, 2]$.

Решение.

1)

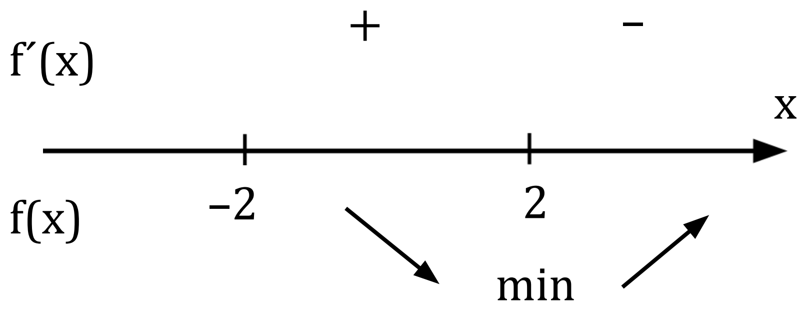
Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $[\frac{1}{2}, 2]$.

$$y' = 0;$$

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $[\frac{1}{2}, 2]$.

$$x = -3,\ x = 2;$$

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $[\frac{1}{2}, 2]$.



$x < 2,\ y' < 0;$

$x > 2,\ y' > 0;$

$x = 2$ — min;

$y_{min} = f(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 = -44;$

$y_{наим.} = y_{min} = f(2) = -44.$

Ответ: $y_{наим.} = -44.$