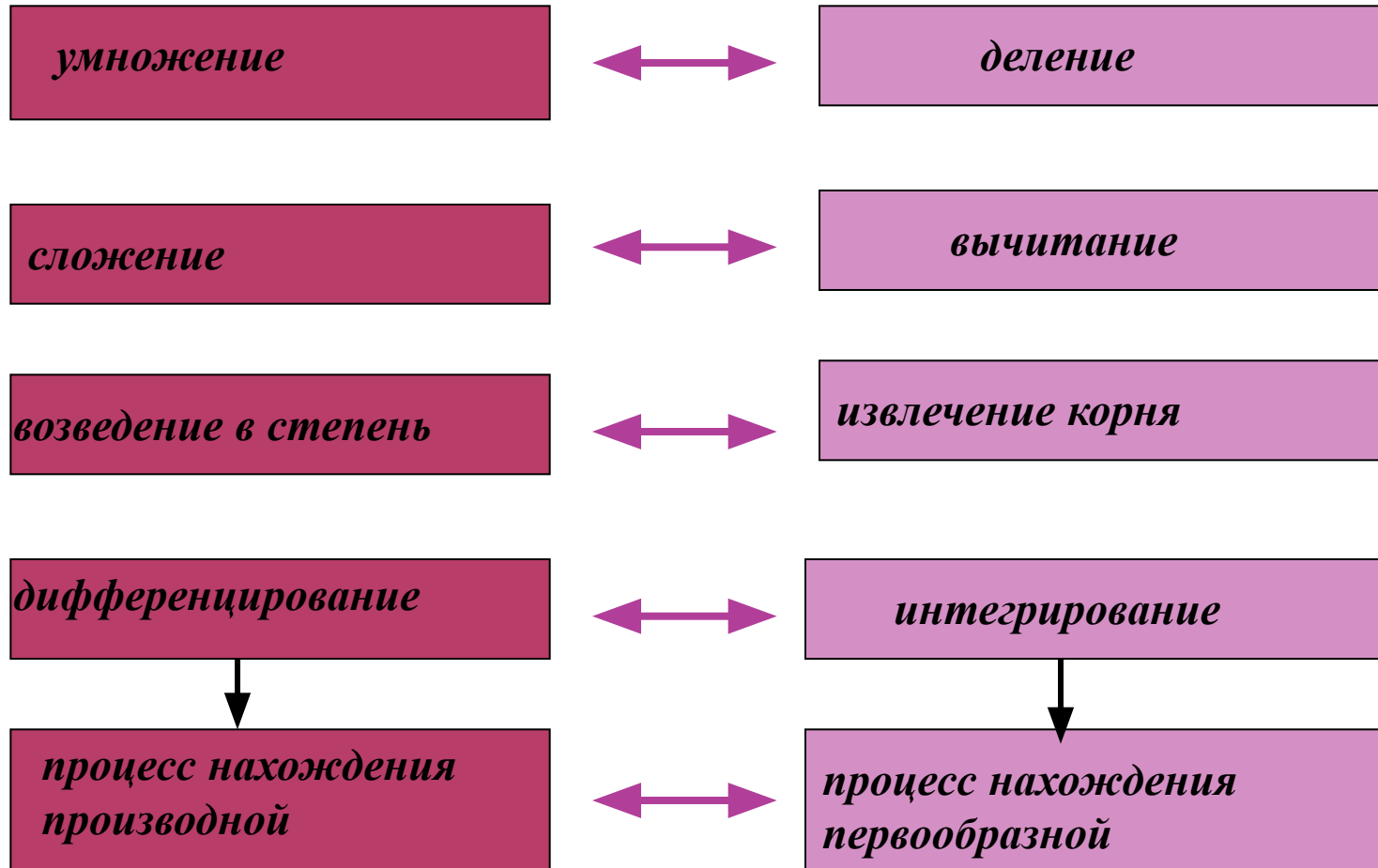


Первообразная и интеграл

Взаимно-обратные операции



Определение первообразной

Первообразной для функции $f(x)$ называется функция, производная которой равна данной

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке I , если для любого x из промежутка I выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

- **Пример:**

Первообразной для функции $f(x)=x$ на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.

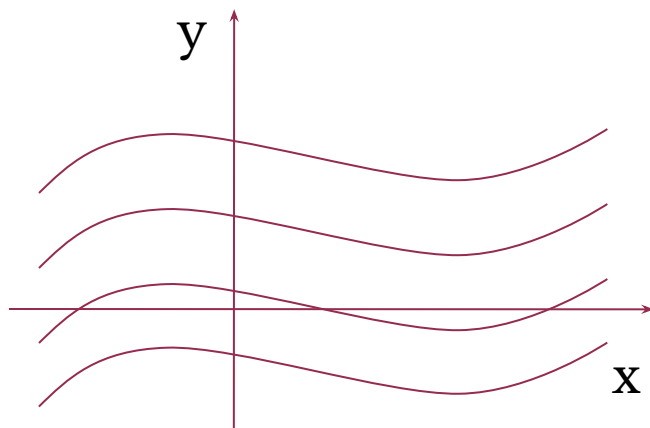
Таблица первообразных некоторых функций

$f(x)$	k	x^n	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$
$F(x)$	kx	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$2\sqrt{x}$	$-\cos x$	$\sin x$

Основное свойство первообразных

- Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Геометрическая интерпретация



- Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y .

Найти производную функции $F(x)$:

$$F(x) = x^4 + 20$$

$$F(x) = x^4 - 0,25$$

$$F(x) = x^4 - 100$$

пусть $F'(x) = f(x)$

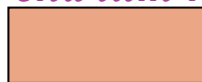
$$f(x) = 4x^3$$

$$f(x) = 4x^3$$

$$f(x) = 4x^3$$

Вывод: для данной функции существует множество первообразных, их можно записать в виде $F(x)+C$

Основная задача интегрирования: записать все первообразные для данной функции. Решить её - значит представить первообразную в таком общем виде: $F(x)+C$



Найти первообразную функций

1) $f(x) = x^4$

1) $F(x) = \frac{x^5}{5}$

2) $f(x) = x^5 + x^7$

2) $F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8}$

3) $f(x) = 3x^2 + x$

3) $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2}$

4) $f(x) = x + 5x^3 + 5$

4) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5 * \frac{x^4}{4} + 5x$

5) $f(x) = 4 + \sin x$

5) $F(x) = 4x + \cos x$

Неопределенный интеграл

- Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad ,$$

где C – произвольная постоянная.

- Пример: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

Так как первообразной для функции $f(x)=x$ на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.

Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c = \text{const}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a \neq 0$$

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал — подынтегральному выражению. Действительно:

$$1. (\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2. d \int f(x) dx = (\int f(x) dx)' dx = f(x) dx.$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C .$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$

5. $\int e^x dx = e^x + C .$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C .$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C .$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C .$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C .$

Таблица неопределенных интегралов

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C .$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C .$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C .$$

$$17. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C .$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ..$$

$$18. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C .$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$19. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C .$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C .$$

$$20. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C .$$

Примеры

Пример 1 . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем
 $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \int \cos 5x dx &= \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \\ &= \frac{1}{5} \sin 5x + C . \end{aligned}$$

Примеры

Пример 2. Вычислить $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx &= \int x^2 dx + 3 \int x^3 dx + \int x dx + \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

ВЫВОДЫ

- Определенный интеграл - это некоторый фундамент для изучения математики, которая вносит незаменимый вклад в решение задач практического содержания.
- Тема «Интеграл» ярко демонстрирует связь математики с физикой, биологией, техникой и экономикой.
- Развитие современной науки немыслимо без использования интеграла.