Первообразная и интеграл

Взаимно-обратные операции

умножение	*деление*
сложение	*вычитание*
возведение в степень	*извлечение корня*
дифференцирование	*интегрирование*
процесс нахождения производной	*процесс нахождения первообразной*

Определение первообразной

***Первообразной** для функции f(x) называется функция, производная которой равна данной*

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на промежутке *I*, *если для любого х из промежутка I выполняется равенство:* $F'(x) = f(x)$

- Пример:

  Первообразной для функции f(x)=x на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.

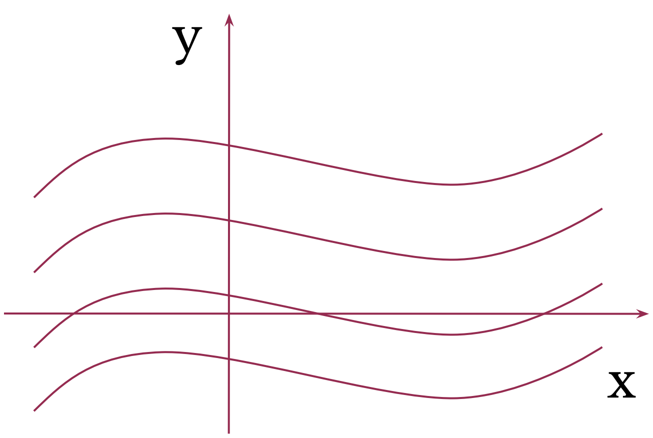
Таблица первообразных некоторых функций

$f(x)$	k	x^n	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$
$F(x)$	kx	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$2\sqrt{x}$	$-\cos x$	$\sin x$

Основное свойство первообразных

- Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Геометрическая интерпретация



- Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y.

Найти производную функции F(x):

$$F(x) = x^4 + 20 \qquad F(x) = x^4 - 0{,}25 \qquad F(x) = x^4 - 100$$

$$пусть\_F'(x) = f(x)$$

$$f(x) = 4x^3 \qquad f(x) = 4x^3 \qquad f(x) = 4x^3$$

Вывод: ***для данной функции существует множество первообразных, их можно записать в виде*** ***F(x)+C***

Основная задача интегрирования: записать <u>все</u> первообразные для данной функции. Решить её- значит представить первообразную в таком общем виде: ***F(x)+C***

Найти первообразную функций

$1)\ f(x) = x^4$

$2)\ f(x) = x^5 + x^7$

$3)\ f(x) = 3x^2 + x$

$4)\ f(x) = x + 5x^3 + 5$

$5)\ f(x) = 4 + \sin x$

$1)\ F(x) = \frac{x^5}{5}$

$2)\ F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8}$

$3)\ F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2}$

$4)\ F(x) = \frac{x^2}{2} + 5 * \frac{x^4}{4} + 5x$

$5)\ F(x) = 4x + \cos x$

Неопределенный интеграл

- Совокупность всех первообразных данной функции f(x) называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad ,$$

где С – произвольная постоянная.

- Пример: $$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

  Так как первообразной для функции f(x)=x на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.

Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, c = const$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$$

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал- подынтегральному выражению. Действительно:

$$1.\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2.d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Примеры

Пример1 . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5}\int \cos 5x d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5x + C .$$

Примеры

Пример 2. Вычислить $\int \left(x^2 + 3x^3 + x + 1\right)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int \left(x^2 + 3x^3 + x + 1 \right) dx = \int x^2 dx + 3\int x^3 dx + \int x dx + \int dx =.$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

ВЫВОДЫ

- Определенный интеграл - это некоторый фундамент для изучения математики, которая вносит незаменимый вклад в решение задач практического содержания.
- Тема «Интеграл» ярко демонстрирует связь математики с физикой, биологией, техникой и экономикой.
- Развитие современной науки немыслимо без использования интеграла.