



Логические основы ЭВМ

Дуванов Бадма
Студент 1 курса Экономика
КАЛМ ГУ

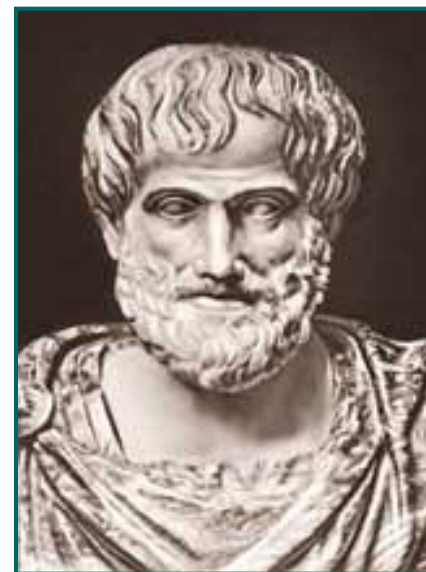


Основные понятия алгебры логики


Процессор выполняет арифметические и **логические** операции над двоичными кодами. Поэтому для получения представления об устройстве компьютера, необходимо познакомиться с основными логическими элементами, лежащими в основе его построения. Для понимания принципа работы таких элементов начнем это знакомство с основными начальными понятиями **алгебры логики**.

Логика (др.греч. *λοῦκος*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

История логики насчитывает около двух с половиной тысячелетий. Первые учения о формах и способах мышления возникли в Древнем Китае и Индии. Основателем формальной логики является **Аристотель** (384-322 гг. до н. э.) – древнегреческий философ, который впервые отделил логические формы мышления от его содержания.



Формальная логика отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.



Логическое высказывание — это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

Сейчас идет дождь.

ДА

Жирафы летят на север.

ДА

У квадрата – 10 сторон и все разные.

ДА

Красиво!

НЕТ

В городе N живут 2 миллиона человек.

НЕТ

Который час?

НЕТ

История – интересный предмет.

НЕТ



- *Солнце есть спутник Земли.*
- *$2+3>4$*
- *Сегодня отличная погода.*
- *Санкт-Петербург расположен на Неве.*
- *Музыка Баха слишком сложна.*
- *Первая космическая скорость равна 7.8 км/сек.*
- *Железо — металл.*
- *Если один угол в треугольнике прямой, то треугольник будет тупоугольным.*
- *Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей, то он прямоугольный.*

Алгебра логики – это математический аппарат, который позволяет выполнять действия над высказываниями.

Алгебру логики называют **булевой алгеброй**, по имени английского математика Джорджа Буля (1815-1864), разработавшего в XIX в. её основные положения.



Обозначение высказываний

Высказывания обозначают латинскими буквами: А, В, Х, Y.

A = Париж – столица Англии.

B = Число 11 является простым.

Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «и», «или», «не», «если ... то», «тогда и только тогда» и др.

- На улице хорошая погода, и дети пошли гулять.
- Петя расскажет стихотворение, или Серёжа пойдет к доске.

Логические выражения и логические операции

Действия, которые производятся над высказываниями, записываются в виде логических выражений.

Простое логическое выражение состоит из одного высказывания и не содержит логических операций, в противном случае оно является сложным.

Основные логические операции

Название	Обозначение	Математическое обозначение
Логическое умножение, конъюнкция	и	$\&, \cdot, \wedge$
Логическое сложение, дизъюнкция	или	$+, \vee$
Логическое отрицание, инверсия	не	\square, \neg
Импликация, следование	если, то	\rightarrow, \Rightarrow
Эквивалентность, равносильность	тогда и только тогда	$\equiv, \Leftrightarrow, \leftrightarrow, \sim$

Таблицы истинности

Все операции алгебры логики определяются **таблицами истинности значений**.

Таблица истинности определяет значение сложного высказывания при всех возможных значениях, входящих в него простых высказываний.

Количество строк в таблице истинности будет зависеть от количества высказываний в логическом выражении (если число высказываний в логическом выражении N , то в таблице будет 2^N строк).

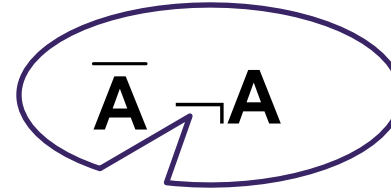


*От лат. inversio -
переворачиваю*

Инверсия - логическое отрицание

Логическое отрицание делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное – истинным.

A	не A
0	1
1	0



A = Земля вращается вокруг Солнца. (истина)

$\neg A$ = Земля не вращается вокруг Солнца. (ложь)



Конъюнкция - логическое умножение

Результат логического умножения является истинным тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

A	B	A и B
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1



$$C = A \& B$$

Учитель должен быть умным и справедливым.

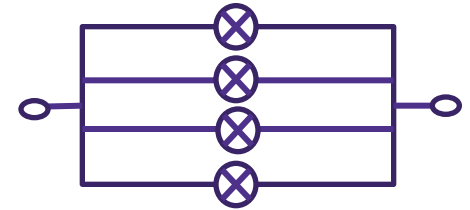
A = Учитель должен быть умным.

B = Учитель должен быть справедливым.

Дизъюнкция - логическое сложение

Результат логического сложения является истинным тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

A	B	A или B
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1



$$C = A + B$$

В библиотеке можно взять книгу или встретить знакомого.

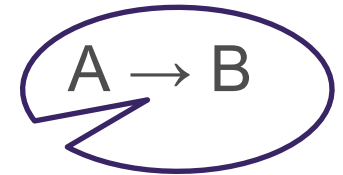
A= В библиотеке можно взять книгу.

B= В библиотеке можно встретить знакомого.

Импликация - логическое следование

Результат логического следования является ложным тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.

A	B	Если A, то B
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1



Если идёт дождь, то на улице сыро.

A= Идет дождь.

B= На улице сыро.

От лат. aequivalens – равноценное

Эквивалентность - логическое равенство

Результат логического равенства является истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо истинны, либо ложны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

А тогда и только тогда, когда В

День сменяет ночь тогда и только тогда, когда солнце скрывается за горизонтом.

A hand is shown using a computer mouse on a laptop. The background is a blue-tinted image with binary code (0s and 1s) overlaid, suggesting a digital or technological theme.

Домашнее задание

Выучить пять таблиц истинности с определениями логических операций.



Составление таблиц истинности по логической формуле

Постройте таблицу истинности для логического выражения

$$A \cdot \neg B$$

A	B	$\neg B$	$A \cdot \neg B$
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	0

Составление таблиц истинности по логической формуле

Постройте таблицу истинности для логического выражения
 $(A + \neg B) \cdot C$

A	B	C	$\neg B$	$A + \neg B$	$(A + \neg B) \cdot C$
0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ПО ТАБЛИЦЕ ИСТИННОСТИ



Условимся называть задачу построения таблицы истинности по формуле сложного высказывания – прямой задачей. Тогда **обратная задача** – построение логической формулы по таблице истинности. Полученную формулу будем записывать в виде логической функции.

Приведена таблица истинности для аргументов А, В, по которой надо составить логическое выражение $F(A,B)$.

A	B	$F(A,B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Алгоритм нахождения искомой формулы:

A	B	F(A,B)	Отмечаем	Записываем
0	0	1	✓	$\neg A \cdot \neg B$
0	1	0		
1	0	1	✓	$A \cdot \neg B$
1	1	0		

1. Выделить в таблице истинности строки, в которых выражение истинно (1);

2. Соединить операцией **И (умножение)** содержимое столбцов аргумента для выбранных строк. При этом если в таблице «0», пишем входной сигнал с отрицанием, а если в таблице «1», то без отрицания.

3. Соединить операцией **ИЛИ (сложение)** полученные выражения.

$$F(A,B) = \neg A \cdot \neg B + A \cdot \neg B$$

4. Упростить искомую формулу (по возможности).

Пример 2.

A	B	C	F(A,B,C)	Отмечаем	Записываем
0	0	0	1	✓	$\neg A \cdot \neg B \cdot \neg C$
0	0	1	0		
0	1	0	0		
0	1	1	0		
1	0	0	0		
1	0	1	0		
1	1	0	0		
1	1	1	1	✓	$A \cdot B \cdot C$

$$F(A, B, C) = \neg A \cdot \neg B \cdot \neg C + A \cdot B \cdot C$$

Пример 3.

A	B	F(A,B,C)	Отмечаем	Записываем
0	0	0		
0	1	1	✓	$\neg A \cdot B$
1	0	1	✓	$A \cdot \neg B$
1	1	1	✓	$A \cdot B$

$$F(A, B) = \neg A \cdot B + A \cdot \neg B + A \cdot B$$

Пример 4.

A	B	C	F(A,B,C)	Отмечаем
0	0	0	1	✓
0	0	1	0	
0	1	0	1	✓
0	1	1	0	
1	0	0	1	✓
1	0	1	0	
1	1	0	1	✓
1	1	1	0	

$$F(A, B, C) = \neg C$$

Пример 5.

A	B	F(A,B,C)	Отмечаем
0	0	0	
0	1	0	
1	0	1	✓
1	1	1	✓

$$F(A, B) = A$$



A	B	F(A,B)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

A	B	F(A,B)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0


A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



ЗАДАНИЯ ИЗ ГИА

Задания из ГИА

1. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X < 3) \& ((X < 2) \vee (X > 2))$?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
2. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X < 4) \& (X > 2) \& (X \neq 2)$?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
3. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X > 4) \& (X < 7) \& (X < 6)$?
1) 5 2) 6 3) 3 4) 4
4. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X > 1) \& (X > 2) \& (X \neq 3)$?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
5. Для какого из указанных значений числа X ложно выражение $(X > 2) \text{ ИЛИ НЕ } (X > 1)$?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
6. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X < 3) \& \neg(X < 2)$?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
7. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X > 2) \& ((X < 4) \vee (X > 4))$?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4



Пример 5.10. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $\neg(X < 2) \& (X < 3)$?

- | | |
|------|------|
| 1) 1 | 3) 3 |
| 2) 2 | 4) 4 |

Пример 5.11. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $\neg(X > 2) \vee (X > 6)$?

- | | |
|------|------|
| 1) 2 | 3) 4 |
| 2) 3 | 4) 5 |

Пример 5.12. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $\neg(X > 5) \& \neg(X < 2)$?

- | | |
|------|------|
| 1) 0 | 3) 3 |
| 2) 1 | 4) 6 |

Пример 5.13. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $\neg((X - 2 > 6) \vee (X - 4 > 8)) \& \neg(X \cdot 3 > 25)$?

- | | |
|------|-------|
| 1) 7 | 3) 11 |
| 2) 9 | 4) 12 |

Пример 5.14. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $\neg(X : 2 < 5) \& \neg(X + 17 > 30) \& (X \cdot 3 < 39)$?

- | | |
|------|-------|
| 1) 8 | 3) 12 |
| 2) 9 | 4) 13 |

Пример 5.5. Таблица истинности логической функции

$F = A \& B \vee \neg A \& \neg B$ имеет вид

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

4)

Пример 5.6. Таблица истинности логической функции

$F = \neg A \& B \vee \neg A \& \neg B$ имеет вид

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

1)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4)

Пример 5.7. Таблица истинности логической функции

$F = \neg A \& \neg B \vee A \& \neg B$ имеет вид

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

1)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

3)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

Пример 5.8. Таблица истинности логической функции $F = \neg A \& B \vee \neg A \& \neg B$ имеет вид

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

1)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

3)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

Пример 5.9. Таблица истинности логической функции $F = (A \& B) \& \neg A \& \neg B$ имеет вид

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

3)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>F</i>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

4)

Логические элементы и логические схемы компьютера.

Как при строительстве дома применяют различного рода типовые блоки: кирпичи, рамы, двери и т. п., так и при разработке компьютера используют типовые электронные схемы. Каждая схема состоит из определенного набора типовых электронных элементов.



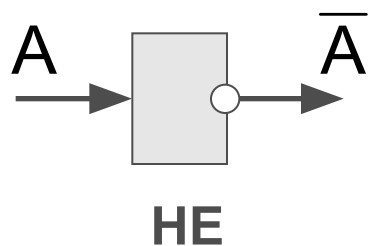


Электронным элементом называется соединение различных деталей – в первую очередь, диодов и транзисторов, а также резисторов, конденсаторов, - в виде электрической схемы, выполняющей некоторую простейшую функцию.

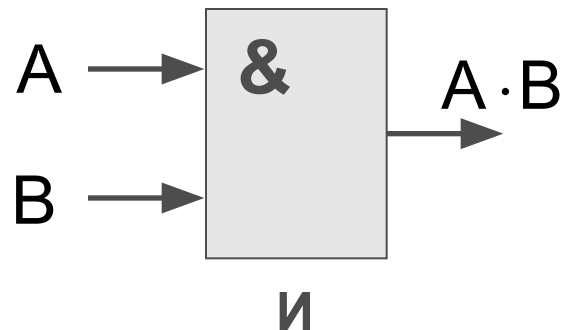
Электронный элемент, реализующий логическую функцию, называется **ЛОГИЧЕСКИМ ВЕНТИЛЕМ.**

Логические элементы компьютера

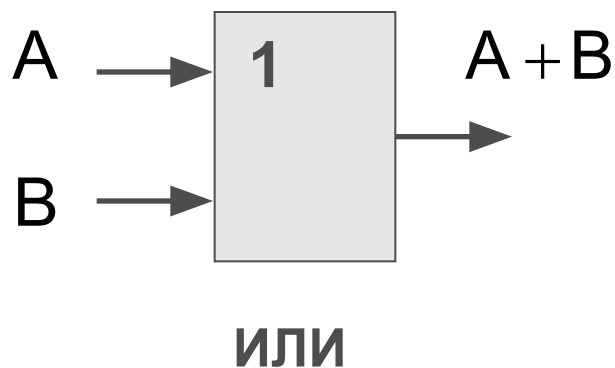
Инвертор



Конъюнктор



Дизъюнктор





Тысячи микроскопических электронных переключателей в кристалле интегральной схемы сгруппированы в системы, выполняющие логические операции, т. е. операции с предсказуемыми результатами и арифметические операции над двоичными числами. Соединенные в различные комбинации, логические вентили дают возможность компьютеру решать задачи, используя язык двоичных кодов.



Электронным элементом называется соединение различных деталей – в первую очередь, диодов и транзисторов, а также резисторов, конденсаторов, - в виде электрической схемы, выполняющей некоторую простейшую функцию.

Электронный элемент, реализующий логическую функцию, называется **ЛОГИЧЕСКИМ ВЕНТИЛЕМ.**



Построение логических схем

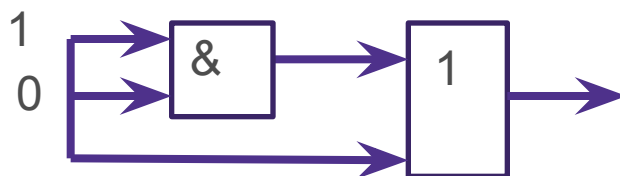
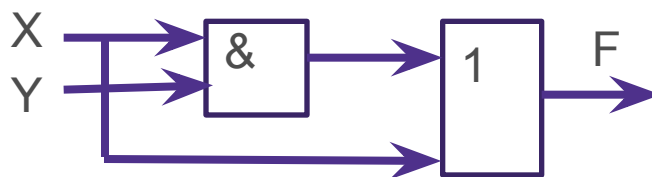
1. Определить число логических переменных.
2. Определить количество базовых логических операций и их порядок.
3. Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей вентиль.
4. Соединить вентили в порядке выполнения логических операций.

Пример 1

Пусть $X = \text{истина}$, $Y = \text{ложь}$. Составить логическую схему для следующего логического выражения:

$$F = X + Y * X$$

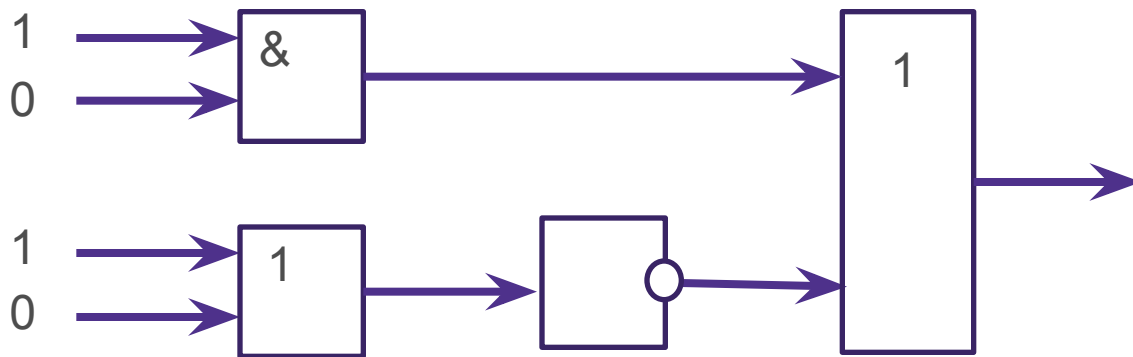
1. Две переменные: X и Y .
2. Две логические операции: $X + Y * X$.
3. Строим схему:



Ответ: $1 + 0 * 1 = 1$.

Пример 2

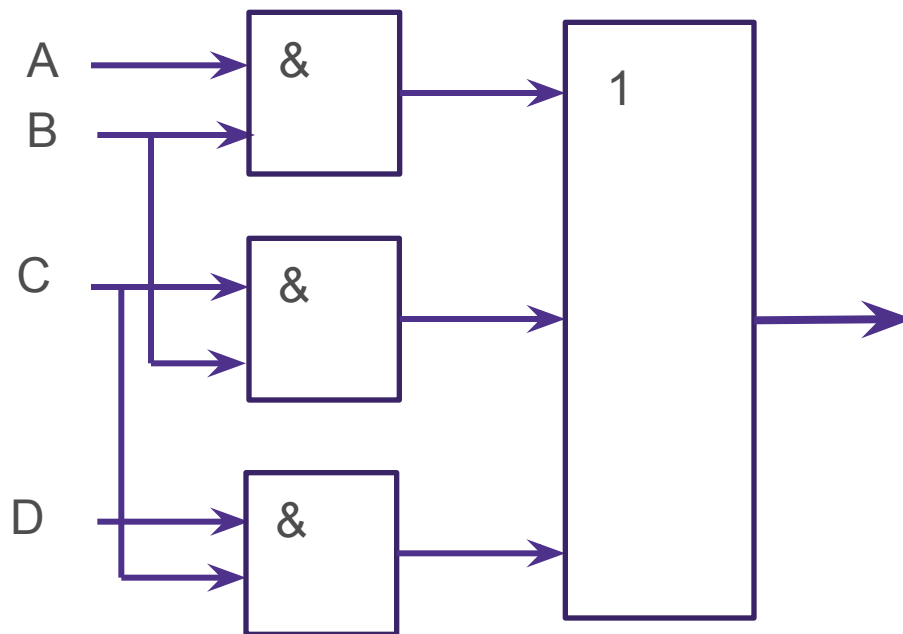
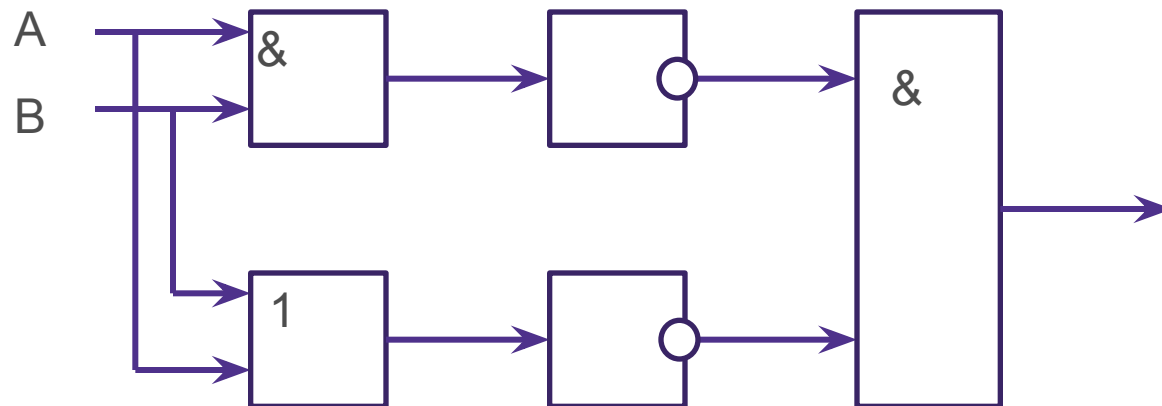
Постройте логическую схему, соответствующую логическому выражению $F = X * Y + \neg(Y + X)$.
Вычислить значения выражения для $X=1, Y=0$.



Постройте логические схемы:

1. $F = A*(B+C)$
2. $F = \neg B*(\neg A*B+A)$
3. $F = D+A*B*C*(\neg B+\neg C)$
4. $F = (C*\neg A)+\neg(A*B+B*C)$
5. $F = A+B*\neg C$, если $A=1, B=1, C=1$ 1
6. $F = \neg(A+B*C)$, если $A=0, B=1, C=1$ 1
7. $F = \neg A+B*C$, если $A=1, B=0, C=1$ 0
8. $F = (A+B)*(C+B)$, если $A=0, B=1, C=0$ 1
9. $F = \neg(A*B*C)$, если $A=0, B=0, C=1$ 1
10. $F = \neg(A*B*C)+(B*C+\neg A)$, если $A=1, B=1, C=0$ 1
11. $F = B*\neg A+\neg B*A$, ЕСЛИ $A=0, B=0$ 0

Постройте логическое выражение к логическим схемам:





Триггер – логическая схема, способная сохранять одно из 2 состояний до подачи нового сигнала на вход. Это, по сути, разряд памяти, способный хранить 1 бит информации.

Регистр – устройство, состоящее из последовательности триггеров. Регистр предназначен для хранения многоразрядного двоичного числового кода, которым можно представлять и адрес, и команду, и данные.