

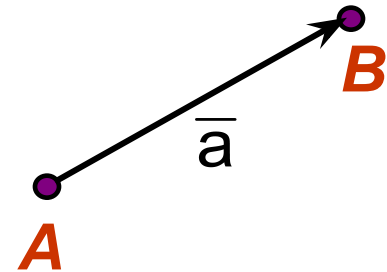
# 5. Векторная алгебра

## 5.1 Основные понятия

**Вектором** называется направленный отрезок.

Вектор с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$  обозначается символом  $\overline{AB}$  или одной буквой  $\overline{a}$

Длина отрезка  $AB$  называется длиной, или модулем вектора и обозначается  $|\overline{AB}|$ ,  $|\overline{a}|$

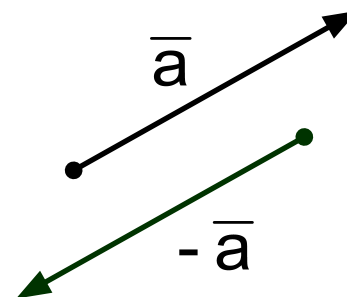


Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым вектором** и обозначается  $\overline{0}$ .

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором** и обозначается через  $\overline{e}$ .

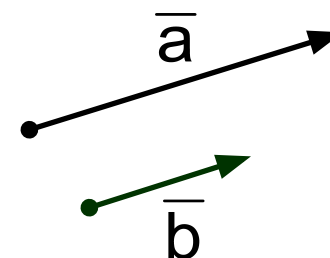
Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора  $\overline{a}$ , называется **ортом** вектора и обозначается  $\overline{a}^0$ .

Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если они имеют одинаковую длину и противоположные направления.

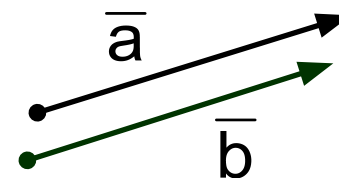


Векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых;

$$\bar{a} \parallel \bar{b}$$

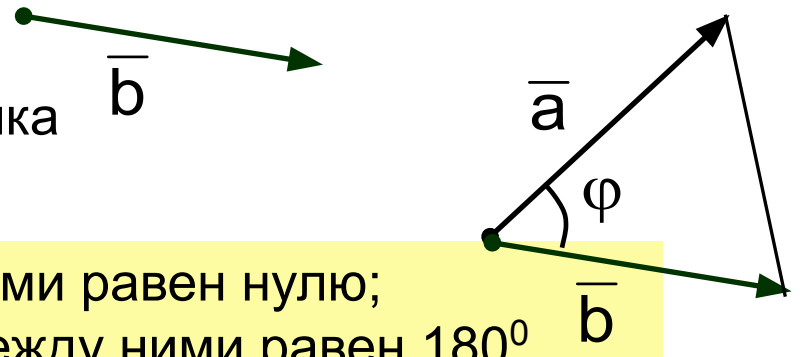


Два коллинеарных вектора называются **равными**  $\bar{a} = \bar{b}$ , если они сонаправлены и имеют равные длины.



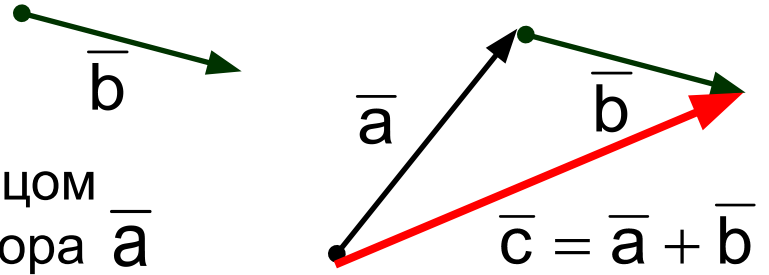
Три (и более) вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

**Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**   
называется угол при вершине треугольника  
натянутого на вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

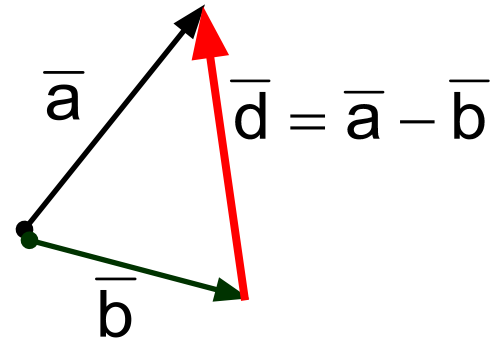


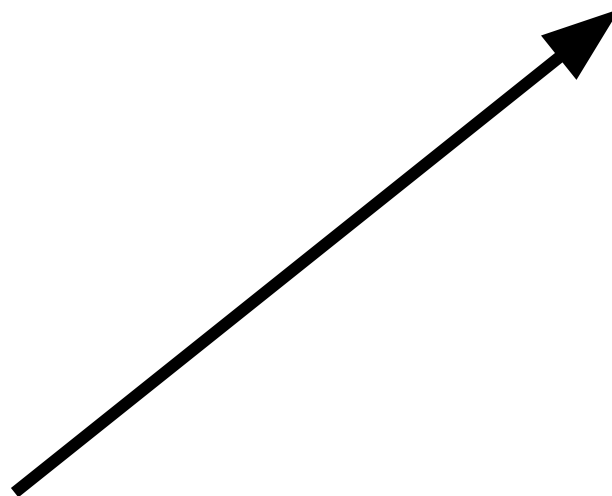
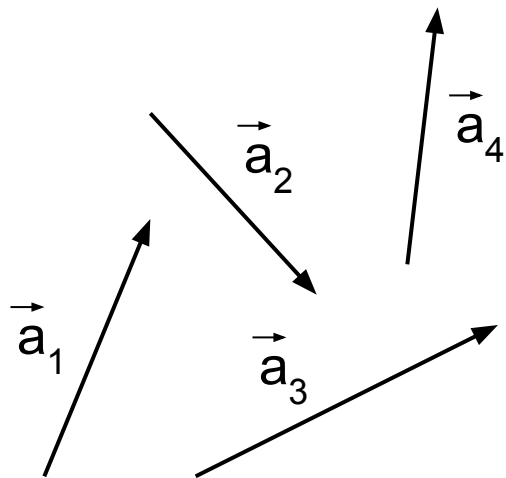
Векторы сонаправлены  $\Leftrightarrow$  угол между ними равен нулю;  
противоположно направлены  $\Leftrightarrow$  угол между ними равен  $180^\circ$ .

**Суммой двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**   
называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  
соединяющий начало вектора  $\vec{a}$  с концом  
вектора  $\vec{b}$ , отложенного от конца вектора  $\vec{a}$   
(правило треугольников)



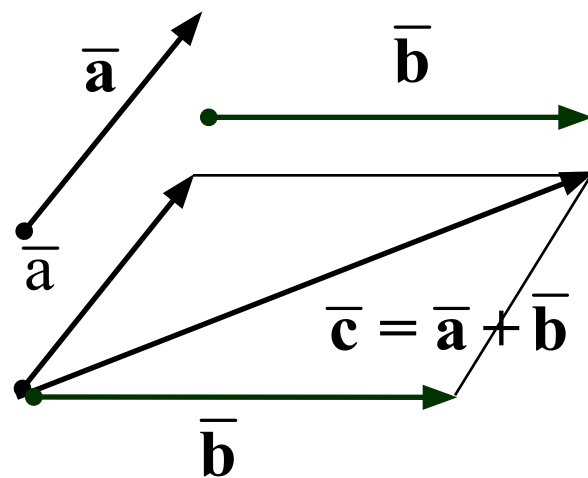
**Разностью двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**   
называется вектор  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  
соединяющий конец вектора  $\vec{b}$  с концом  
вектора  $\vec{a}$ , если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   
приведены к общему началу.  
(правило треугольника)





**Сложение векторов** по правилу параллелограмма:

- 1) совместить начала суммируемых векторов;
- 2) построить на них параллелограмм;
- 3) построить вектор на диагонали параллелограмма

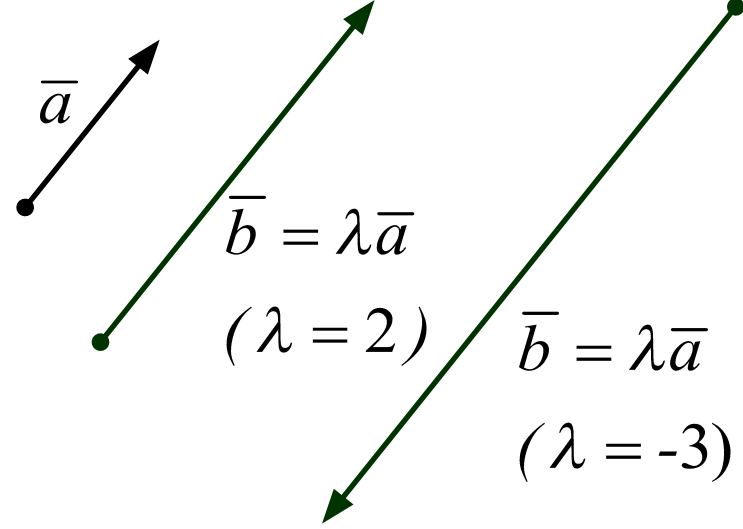


**Произведением** вектора  $\vec{a} \neq 0$  на число  $\lambda \neq 0$  называется вектор  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$  который имеет длину:  $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

и направление

вектора, если  $\lambda > 0$ ;

вектора, если  $\lambda < 0$ .



$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$$

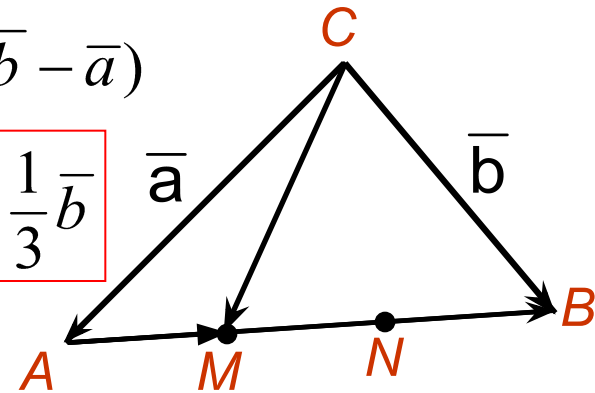
### ПРИМЕР

В треугольнике  $ABC$  сторону  $AB$  точками  $M$  и  $N$  разделили на три равные части:  $AM = MN = NB$ . Выразить вектор  $\vec{CM}$  через  $\vec{CA} = \vec{a}$  и  $\vec{CB} = \vec{b}$

Из определения суммы:  $\vec{CM} = \vec{a} + \vec{AM}$ ;  $\vec{AM} = \frac{1}{3} \vec{AB}$

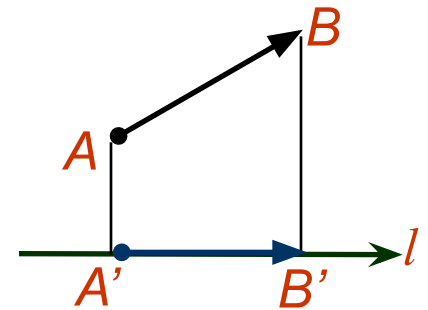
Из определения разности:  $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ;  $\vec{AM} = \frac{1}{3} (\vec{b} - \vec{a})$

$$\vec{CM} = \vec{a} + \frac{1}{3} (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{a} \Rightarrow \vec{CM} = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}$$



## 5.2. Проекция вектора на ось

**Векторной проекцией** вектора на ось называется вектор, началом и концом которого являются соответственно проекции начала и конца исходного вектора на данную ось.



**Скалярной проекцией** вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  называется скаляр, абсолютная величина которого равна модулю векторной проекции того же вектора на ту же ось.

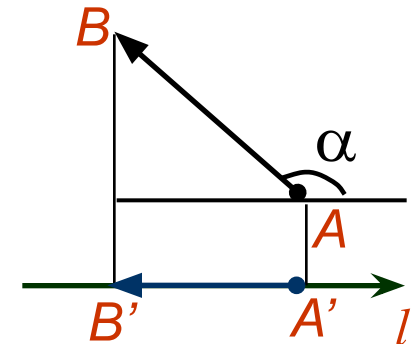
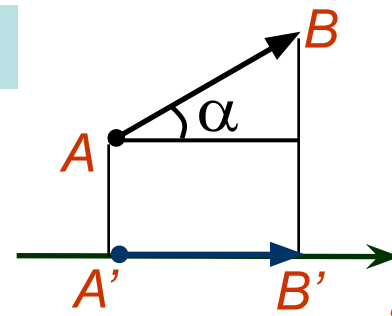
$$|np_l \overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$$

### Свойства скалярных проекций:

$$1) \quad np_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos \alpha$$

$$2) \quad i \delta_l (\lambda \cdot \overline{AB}) = \lambda \cdot i \delta_l \overline{AB}$$

$$3) \quad np_l (\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF}) = np_l \overline{AB} + np_l \overline{CD} + np_l \overline{EF}$$



Проекция вектора на **вектор** – это проекция вектора на ось направление которой задает **вектор**

## 5.3. Базис

**Линейная комбинация** векторов:

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{a}_n$$

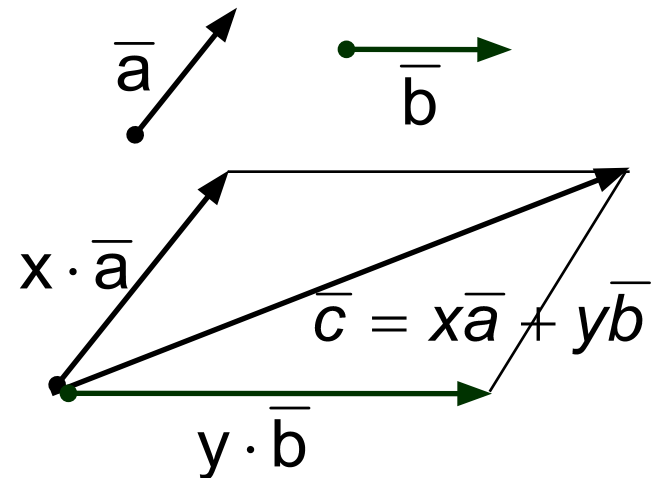
действительные числа – коэффициенты линейной комбинации, из которых хотя бы один не равен нулю

Векторы **линейно зависимы** (между собой), если какой-либо из них является линейной комбинацией остальных.

Если вектор представлен в виде линейной комбинации некоторых векторов, то говорят, что он **разложен** по этим векторам.

$$\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b} \text{ разложен по векторам } \bar{a} \text{ и } \bar{b},$$

вектора  $\bar{c}; \bar{a}; \bar{b}$  — **линейно зависимые**.



Два вектора линейно зависимы  $\Leftrightarrow$  коллинеарны

$$\bar{a} = x \cdot \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$$

Совокупность двух *линейно независимых* векторов лежащих в одной плоскости называется **базисом** на этой плоскости

$$\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}$$

$x; y$  – координаты вектора  $\bar{c}$  в базисе  $\{\bar{a}; \bar{b}\}$

Три вектора линейно зависимы  $\Leftrightarrow$  компланарны

$$\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} \text{ компланарны} \Leftrightarrow \bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}$$

Совокупность любых трех *линейно независимых* векторов называется **базисом** в пространстве

$$\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$$

$x; y; z$  – координаты вектора  $\bar{d}$  в базисе  $(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c})$



## 5.4. Декартова прямоугольная система координат

Базис называется **ортонормированным**, если его векторы единичны и взаимно перпендикулярны:

$\bar{i}; \bar{j}; \bar{k}$  – орты

Совокупность фиксированной точки  $O$  (начало координат) и ортонормированного базиса  $\bar{i}; \bar{j}; \bar{k}$  называется **прямоугольной декартовой системой координат** в пространстве.

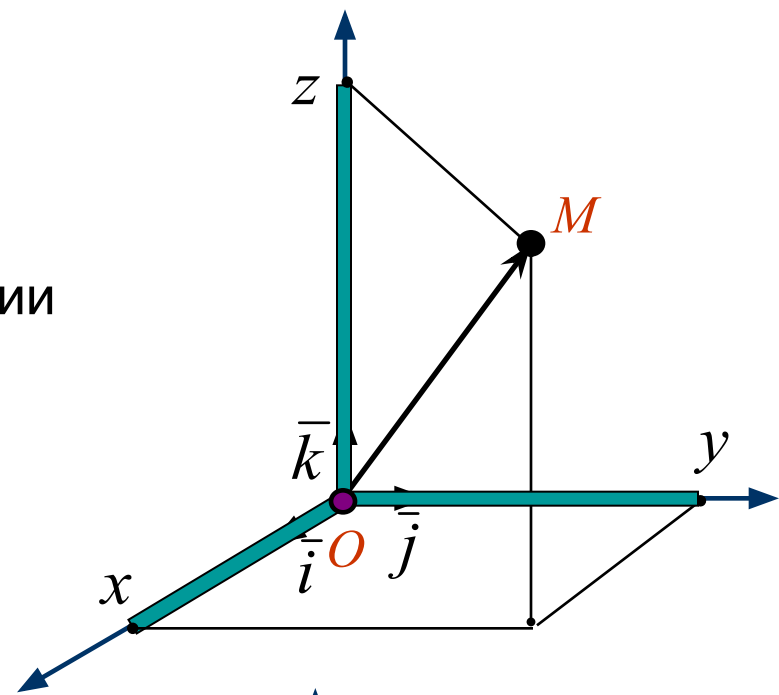
Прямые  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , проходящие через начало координат в направлении базисных векторов  $\bar{i}; \bar{j}; \bar{k}$  называются **осями координат**.  $Ox$  - ось абсцисс,  $Oy$  - ось ординат,  $Oz$  - ось аппликат

Плоскости, проходящие через оси координат— **координатные плоскости**. Пространство делится на восемь **октантов**

Координатами точки  $M$  называются проекции **радиус – вектора**  $\overline{OM}$  на оси координат:

$$np_{\vec{i}} \overline{OM} = x, \quad np_{\vec{j}} \overline{OM} = y, \quad np_{\vec{k}} \overline{OM} = z$$

$$M(x; y; z)$$

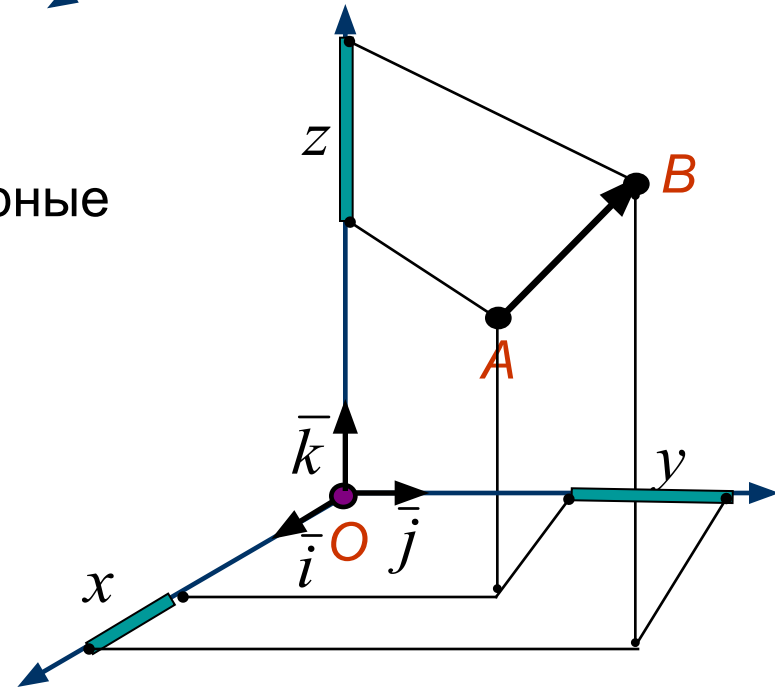


Координатами вектора называются скалярные проекции вектора на оси координат:

$$np_{\vec{i}} \overline{AB} = x, \quad np_{\vec{j}} \overline{AB} = y, \quad np_{\vec{k}} \overline{AB} = z$$

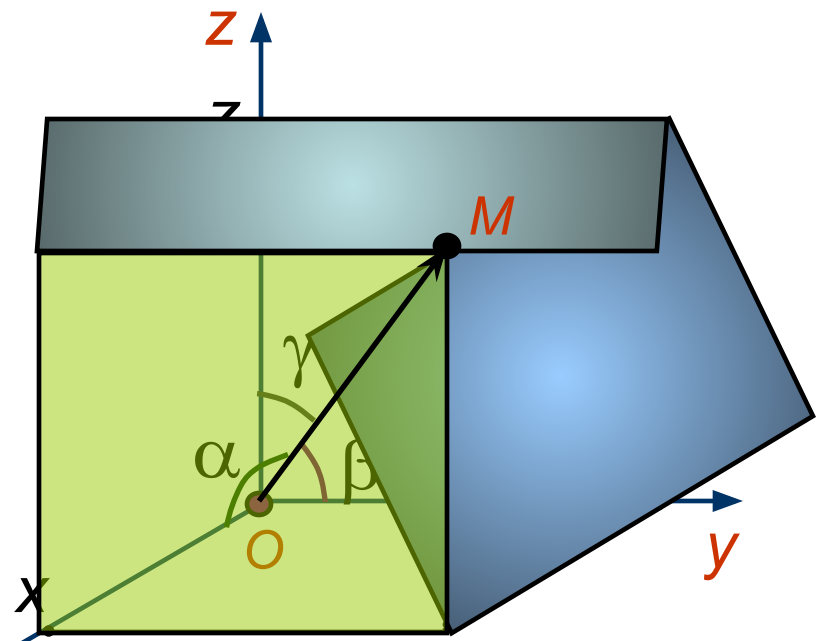
$$\overline{AB} = (x; y; z)$$

$$\overline{AB} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$



$\alpha; \beta; \gamma$  — углы, между вектором  $\overline{OM}$  и осями координат.

$\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma$  —  
**- направляющие косинусы**  
 вектора  $\overline{OM}$



$$x = |\overline{OM}| \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$y = |\overline{OM}| \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$z = |\overline{OM}| \cdot \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Отрезок  $OM$  — диагональ параллелепипеда. Построим прямоугольный квадрат диагонали параллелепипеда со сторонами  $x, y, z$  и с вершиной в точке  $O$ . Квадрат диагонали параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений

$$|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

# Операции над векторами в декартовой системе координат

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k} \qquad \bar{b} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$$

По свойствам скалярной проекции вектора на ось получим:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2) \cdot \bar{i} + (y_1 \pm y_2) \cdot \bar{j} + (z_1 \pm z_2) \cdot \bar{k}$$

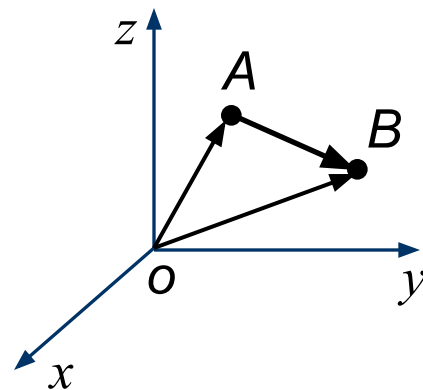
$$\lambda \bar{a} = (\lambda x_1) \cdot \bar{i} + (\lambda y_1) \cdot \bar{j} + (\lambda z_1) \cdot \bar{k}$$

По координатам точек  $A(x_a; y_a; z_a)$  и  $B(x_b; y_b; z_b)$  найти координаты вектора  $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$\overline{OB} = \{x_b; y_b; z_b\} \qquad \overline{OA} = \{x_a; y_a; z_a\}$$

$$\overline{AB} = \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}$$



## ПРИМЕР

Найти модуль и орт суммы векторов:

$$\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j} + 8\bar{k} \quad \bar{b} = -\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (3-1)\bar{i} + (-5+1)\bar{j} + (8-4)\bar{k} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$|\bar{c}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\bar{c} = |\bar{c}| \cdot \bar{c}^o \quad \Rightarrow \quad \bar{c}^o = \frac{\bar{c}}{|\bar{c}|}$$

$$\bar{c}^o = \frac{1}{6}(2\bar{i} - 4\bar{j} + 4\bar{k}) = \frac{1}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$$

## ЕЩЁ ПРИМЕР

Определить, при каких значениях  $m$  и  $n$  векторы коллинеарны:

$$\bar{a} = \{-2; 3; n\} \quad \bar{b} = \{m; -6; 2\}$$

Векторы коллинеарны, если существует такое число  $\lambda$ , что

$$\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$$

Это векторное равенство должно выполняться для координат векторов:

$$\begin{cases} -2 = \lambda \cdot m \\ 3 = \lambda \cdot (-6) \\ n = \lambda \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -0.5; \quad m = 4; \quad n = -1$$