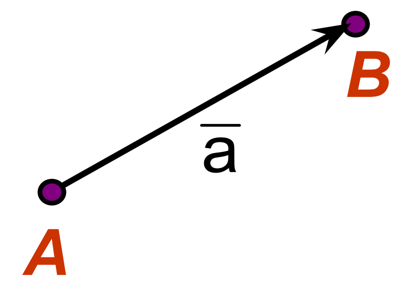
5. Векторная алгебра

5.1 Основные понятия

Вектором называется направленный отрезок.

Вектор с началом в точке *A* и концом в точке *B* обозначается символом $\overline{AB}$ или одной буквой $\overline{a}$



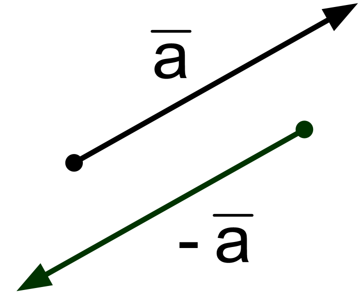
Длина отрезка *AB* называется длиной или модулем вектора и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{a}\right|$

Вектор, длина которого равна нулю, называется ***нулевым вектором*** и обозначается $\overline{0}$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором*** и обозначается через $\overline{e}$.

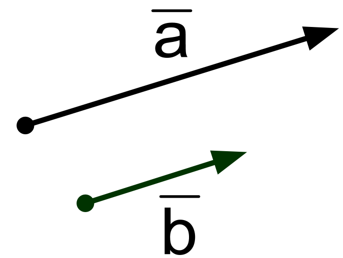
Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется ***ортом*** вектора и обозначается $\overline{a}^0$.

Два ненулевых вектора называются ***противоположными***, если они имеют одинаковую длину и противоположные направления.

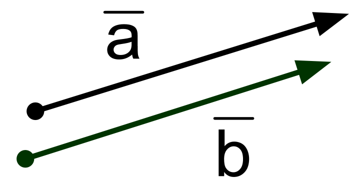


Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых;

$$\overline{a} \parallel \overline{b}$$

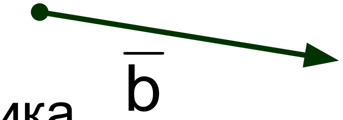


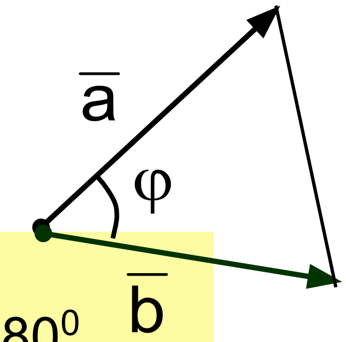
Два коллинеарных вектора называются ***равными*** $\overline{a} = \overline{b}$,если они сонаправлены и имеют равные длины.



Три (и более) вектора называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

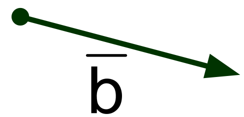
Углом между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется угол при вершине треугольника натянутого на вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

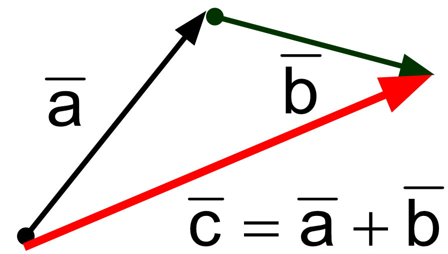




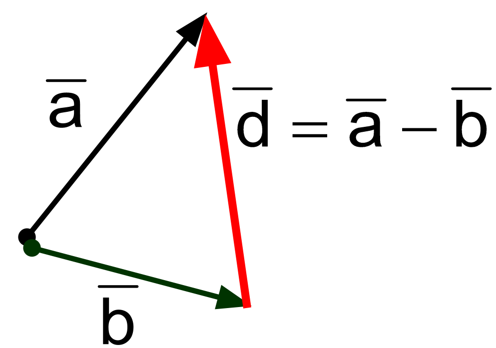
Векторы сонаправлены ⇔ угол между ними равен нулю;
противоположно направлены ⇔ угол между ними равен 180^0.

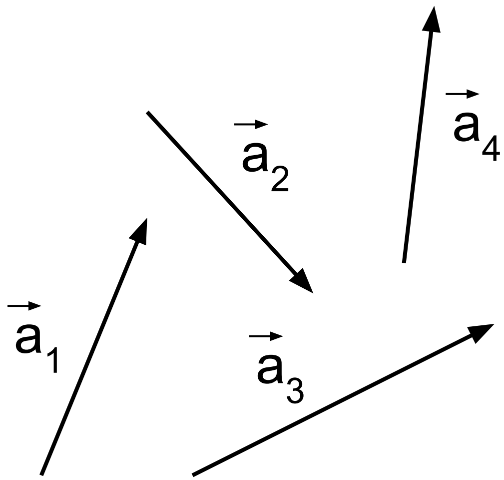
Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, соединяющий начало вектора $\overline{a}$ с концом вектора $\overline{b}$, отложенного от конца вектора $\overline{a}$ (правило треугольников)

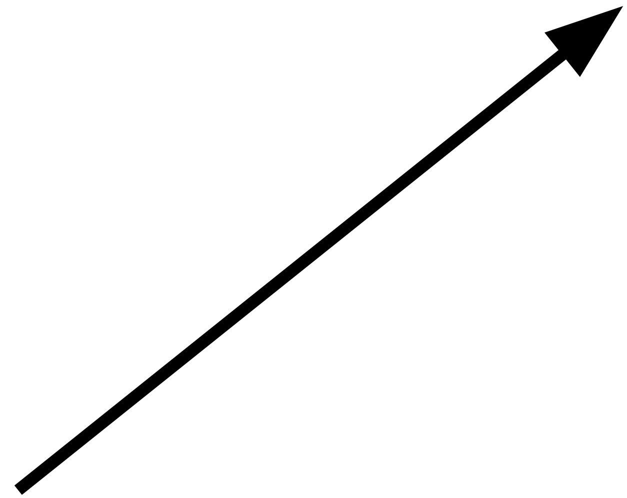




Разностью двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$, соединяющий конец вектора $\overline{b}$ с концом вектора $\overline{a}$, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приведены к общему началу.
(правило треугольника)

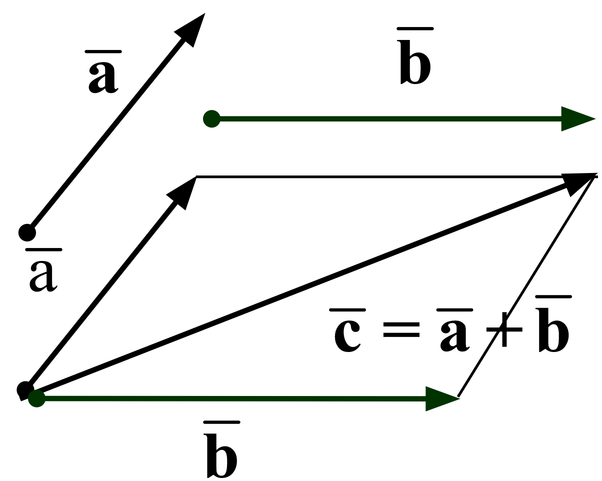




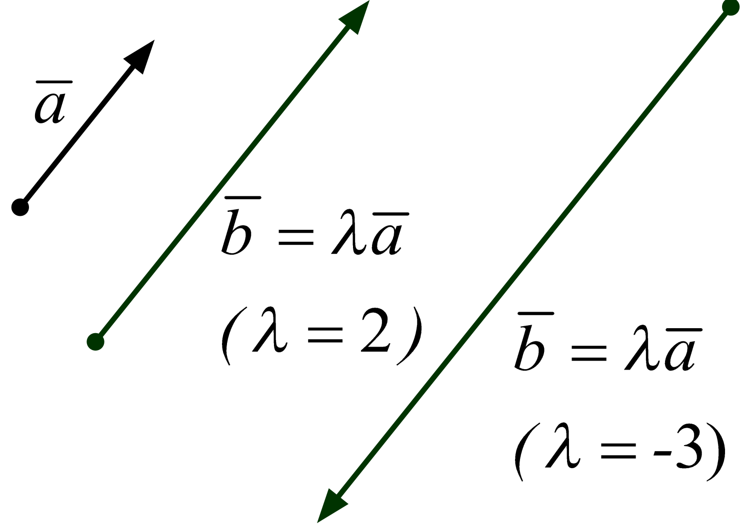


Сложение векторов по правилу параллелограмма:

1) совместить начала суммируемых векторов;
2) построить на них параллелограм;
3) построить вектор на диагонали параллелограмма



Произведением вектора $\overline{a} \neq 0$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, который имеет длину: $\left|\overline{b}\right| = \left|\lambda\right| \cdot \left|\overline{a}\right|$



и направление

вектора $\overline{a}$, если *λ > 0;*

вектора $\overline{a}$, если *λ < 0.*

$$\boxed{\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \overline{a}^0}$$

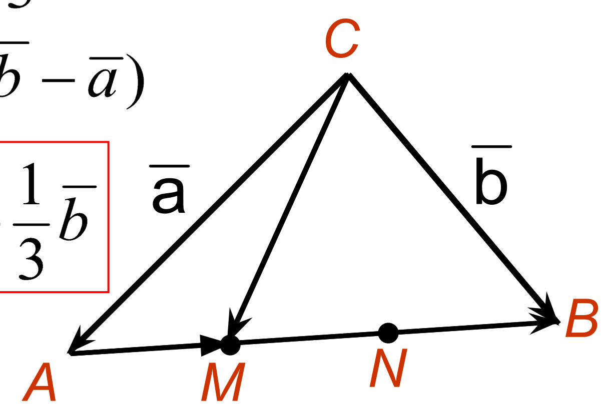
ПРИМЕР

В треугольнике ABC *сторону* AB *точками* M *и* N *разделили на три равные части:* AM = MN = NB*. Выразить вектор* $\overline{\mathrm{CM}}$ *через* $\overline{CA} = \overline{a}$ *и* $\overline{CB} = \overline{b}$

Из определения суммы: $\overline{\mathrm{CM}} = \overline{a} + \overline{\mathrm{AM}}$; $\overline{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}}$

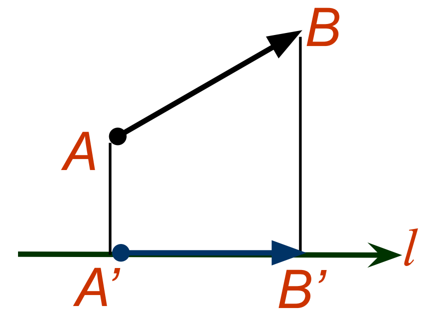
Из определения разности: $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{b} - \overline{a}$; $\overline{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}(\overline{b} - \overline{a})$

$$\overline{\mathrm{CM}} = \overline{a} + \frac{1}{3}(\overline{b} - \overline{a}) = \overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} - \frac{1}{3}\overline{a} \boxed{\Rightarrow \overline{CM} = \frac{2}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}}$$



5.2.Проекция вектора на ось

Векторной проекцией вектора на ось называется вектор, началом и концом которого являются соответственно проекции начала и конца исходного вектора на данную ось.



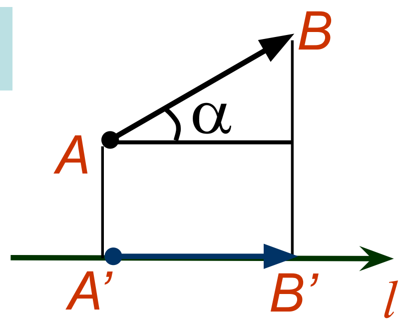
Скалярной проекцией вектора $\overline{\text{AB}}$ на ось l называется скаляр, абсолютная величина которого равна модулю векторной проекции того же вектора на ту же ось.

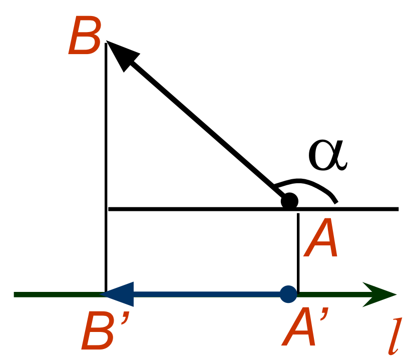
$$\left|np_l \overline{AB}\right| = \left|\overline{A'B'}\right|$$

Свойства скалярных проекций:

1) $np_l \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\alpha$

2) $\ddot{\imath}\,\eth_l \left(\lambda \cdot \overline{AB}\right) = \lambda \cdot \ddot{\imath}\,\eth_l \overline{AB}$





3) $np_l\left(\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF}\right) = np_l \overline{AB} + np_l \overline{CD} + np_l \overline{EF}$

Проекция вектора на **вектор** – это проекция вектора на ось направление которой задает **вектор**

5.3. Базис

Линейная комбинация векторов:

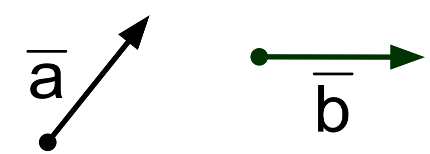
$$\boxed{\overline{a} = x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + x_n \cdot \overline{a}_n}$$

действительные числа – коэффициенты линейной комбинации, из которых хотя бы один не равен нулю

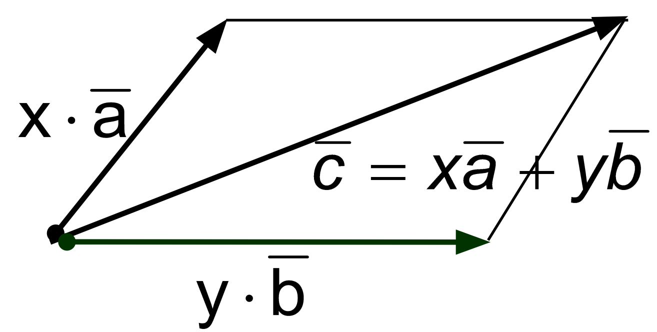
Векторы ***линейно зависимы*** *(между собой)*, если какой-либо из них является линейной комбинацией остальных.

Если вектор представлен в виде линейной комбинации некоторых векторов, то говорят, что он ***разложен*** по этим векторам.

$\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}$ разложен по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$,



вектора $\overline{c}; \overline{a}; \overline{b}$ — *линейно зависимые*.



Два вектора линейно зависимы ⇔ коллинеарны

$$\bar{a} = x \cdot \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \parallel \bar{b}$$

Совокупность двух *линейно независимых* векторов лежащих в одной плоскости называется ***базисом*** на этой плоскости

$$\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}$$

x; y – координаты вектора $\bar{c}$ в базисе $\{\bar{a}; \bar{b}\}$

Три вектора линейно зависимы ⇔ компланарны

$\bar{a}; \bar{b}; \bar{c}$ компланарны $\quad \Leftrightarrow \quad \bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}$

Совокупность любых трех *линейно независимых* векторов называется ***базисом*** в пространстве

$$\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$$

x; y; z – координаты вектора $\bar{d}$ в базисе $(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c})$

5.4. Декартова прямоугольная система координат

Базис называется ***ортонормированным***, если его вектора единичны и взаимно перпендикулярны:

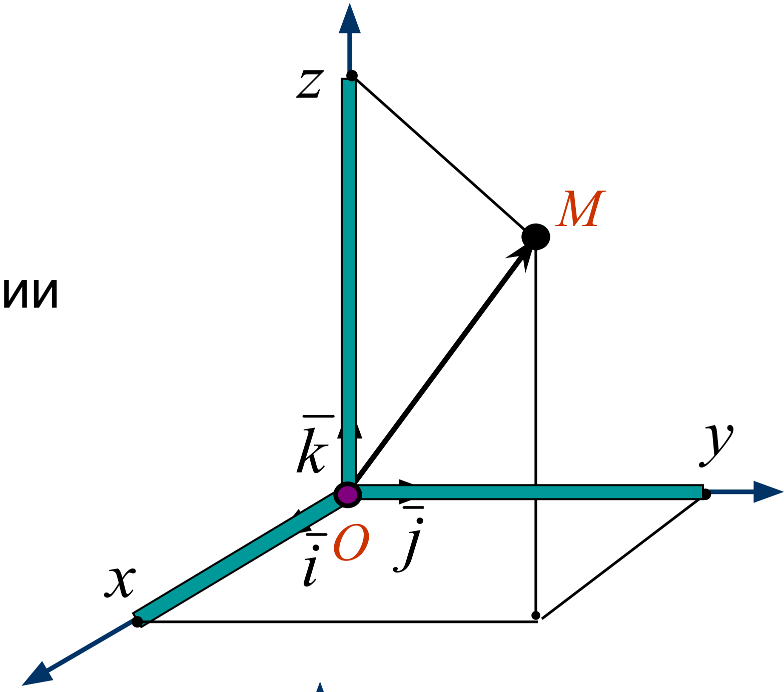
$\boxed{\bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k} - \text{орты}}$

Совокупность фиксированной точки *O* (начало координат) и ортонормированного базиса $\bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k}$ называется ***прямоугольной декартовой системой координат*** в пространстве.

Прямые Ox, Oy и Oz, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов $\bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k}$ называются ***осями координат***. Ox - ось абсцисс, Oy - ось ординат, Oz - ось аппликат

Плоскости, проходящие через оси координат— ***координатные плоскости***. Пространство делится на восемь **октантов**

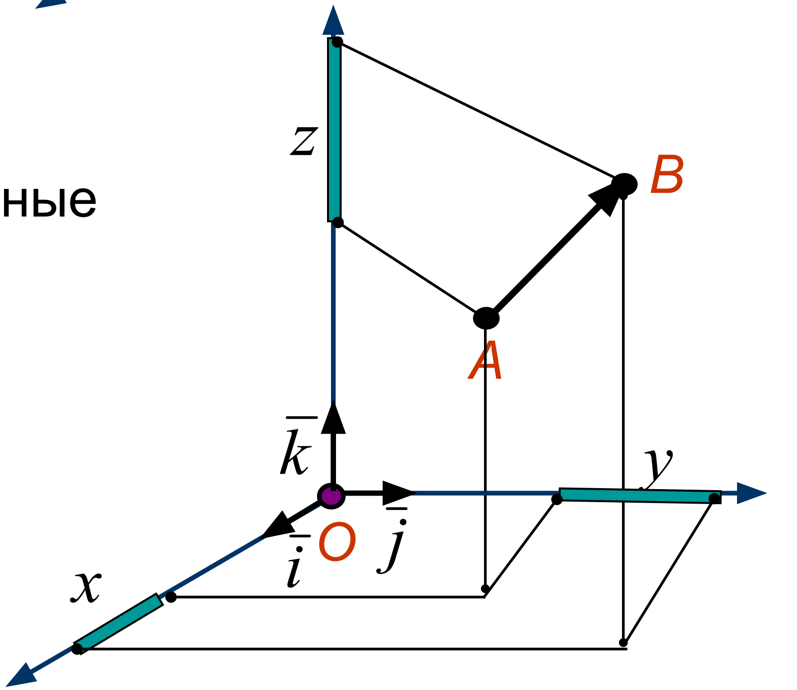
Координатами точки M называются проекции **радиус – вектора** $\overline{OM}$ на оси координат:



$$np_{\bar{i}}\,\overline{OM} = x,\ \ np_{\bar{j}}\,\overline{OM} = y,\ \ np_{\bar{k}}\,\overline{OM} = z$$

$$M(x;\,y;\,z)$$

Координатами вектора называются скалярные проекции вектора на оси координат:



$$np_{i}\,\overline{AB} = x,\ \ np_{j}\,\overline{AB} = y,\ \ np_{k}\,\overline{AB} = z$$

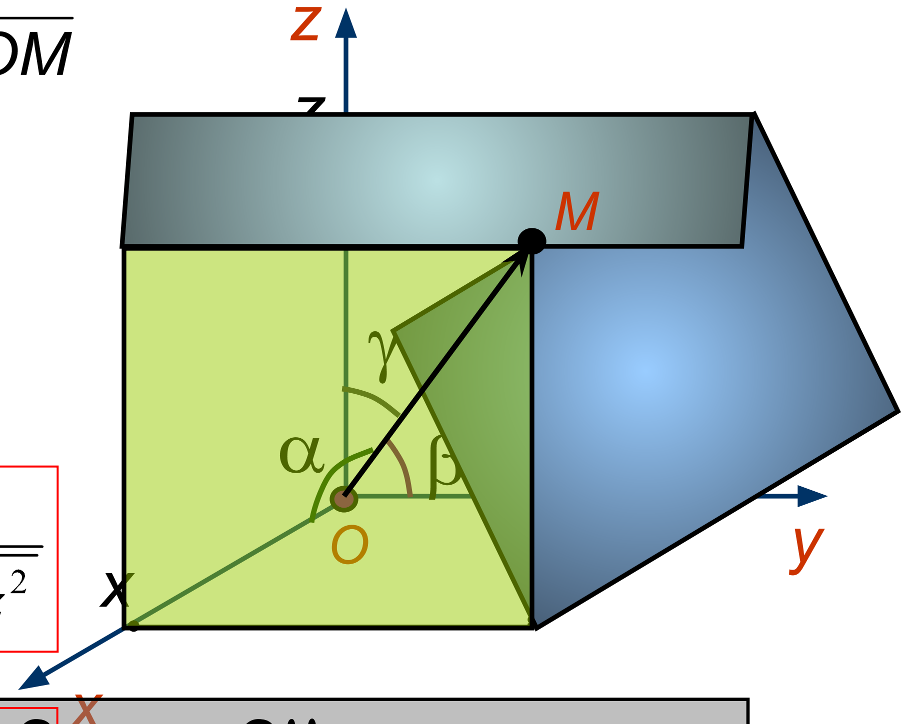
$$\overline{AB} = (x;\,y;\,z)$$

$$\overline{AB} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}$$

$\alpha; \beta; \gamma$ — углы, между вектором $\overline{OM}$ и осями координат.

$\cos\alpha; \quad \cos\beta; \quad \cos\gamma$ –

- направляющие косинусы вектора $\overline{OM}$



$$x = \left|\overline{OM}\right| \cdot \cos\alpha \qquad \boxed{\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

$$y = \left|\overline{OM}\right| \cdot \cos\beta \qquad \boxed{\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

$$z = \left|\overline{OM}\right| \cdot \cos\gamma \qquad \boxed{\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

Отрезок ОМ – диагональ параллелепипеда. Квадрат диагонали параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений

Построим прямоугольный параллелепипед со сторонами X, Y, Z и с вершиной в точке О.

$$\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

Операции над векторами в декартовой системе координат

$$\overline{a} = x_1 \cdot \overline{i} + y_1 \cdot \overline{j} + z_1 \cdot \overline{k} \qquad \overline{b} = x_2 \cdot \overline{i} + y_2 \cdot \overline{j} + z_2 \cdot \overline{k}$$

По свойствам скалярной проекции вектора на ось получим:

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm x_2) \cdot \overline{i} + (y_1 \pm y_2) \cdot \overline{j} + (z_1 \pm z_2) \cdot \overline{k}$$

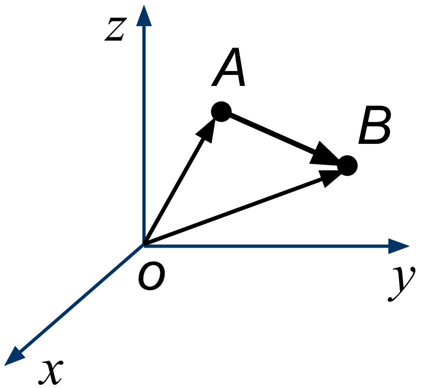
$$\lambda \overline{a} = (\lambda x_1) \cdot \overline{i} + (\lambda y_1) \cdot \overline{j} + (\lambda z_1) \cdot \overline{k}$$

По координатам точек A(x_a; y_a; z_a) и B (x_b; y_b; z_b) найти координаты вектора $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$\overline{OB} = \{x_b; y_b; z_b\} \qquad \overline{OA} = \{x_a; y_a; z_a\}$$

$$\boxed{\overline{AB} = \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}}$$



ПРИМЕР

Найти модуль и орт суммы векторов:

$$\overline{a} = 3\overline{i} - 5\overline{j} + 8\overline{k} \qquad \overline{b} = -\overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k}$$

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (3-1)\overline{i} + (-5+1)\overline{j} + (8-4)\overline{k} \quad = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}$$

$$|\overline{c}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overline{c} = |\overline{c}| \cdot \overline{c}^o \quad \Rightarrow \quad \overline{c}^o = \frac{\overline{c}}{|\overline{c}|}$$

$$\overline{c}^o = \frac{1}{6}\left(2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}\right) \quad = \frac{1}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}$$

ЕЩЁ ПРИМЕР

Определить , при каких значениях m и n векторы коллинеарны:

$$\overline{a} = \{-2;\, 3;\, n\} \qquad \overline{b} = \{m;\, -6;\, 2\}$$

Векторы коллинеарны, если существует такое число λ, что

$$\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$$

Это векторное равенство должно выполняться для координат векторов:

$$\begin{cases} -2 = \lambda \cdot m \\ 3 = \lambda \cdot (-6) \\ n = \lambda \cdot 2 \end{cases} \Longrightarrow \quad \lambda = -0.5; \quad m = 4; \quad n = -1$$