Задания студентам

Урок №1 с 1 по 25 слайд(тест №1)

с 30.03.2020 – по 03.04.2020

Урок №2 с 25 по 44 слайд (тест №2)

С 06.04.2020 – по 10.04.2020

По презентации сделать конспект, тесты выполнить в системе тестов.

Вероятность события.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события А при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Если все исходы какого-либо испытания равновозможны, то вероятность события в этом испытании равна отношению числа благоприятных для него исходов к числу всех равновозможных исходов.

•

- $P(A) = \frac{m}{n}$, **где** $m \leq n$.
- Вероятность невозможного события равно **0**.
- Вероятность достоверного события равна **1**.

- Какова вероятность того, что при броске игрального кубика выпадает 2 или 3?

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- В коробке находятся 20 шаров, из них 5 белых, остальные красные. Какова вероятность того, что наугад вытащенный шар будет белый?

$$P = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

- Одновременно бросают две монеты. С какой вероятностью на них выпадут два орла?

$$P = \frac{1}{4}$$

- Вася и Коля по очереди бросают игральный кубик. Какова вероятность, что Коля выкинет больше очков, чем Вася, если у Васи выпало 4?

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Научная конференция проводится 3 дня. Всего запланировано 50 докладов: в первый день – 30 докладов, а остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

$$P = \frac{10}{50} = 0,2$$

- **В партии из 400 деталей 12 бракованных. Какова вероятность того, что случайно выбранная деталь из партии будет исправной?**

400-12=388

$$P = \frac{388}{400} = 0,97$$

Какова вероятность того, что при изъятии одной карты из колоды в 36 листов игрок вынет:

- 1) *Дaму треф;*
- 2) *Короля пик;*
- 3) *Валета красной масти;*
- 4) *Шестёрку;*
- 5) *Или даму, или валета;*
- 6)*Или короля червовой масти, ил юбой масти;*
- 7) *Не короля треф;*
- 8) *Не семёрку.*

- В ящике лежат 3 белых и 4 зелёных одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность события:
- 1)А-оба вынутых шара белого цвета;
- 2) В-вынуты шары разного цвета.

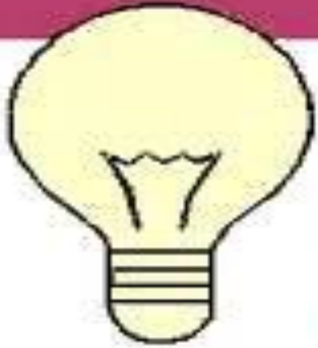
Общее число всевозможных исходов $C_7^{\,2}=\frac{7!}{2!\,5!}=21$

1)Число благоприятных исходов $C_3^{\,2}=\frac{3!}{2!1!}=3$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$$

2) Число благоприятных исходов $3\cdot 4=12$

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$



Среди 15 лампочек 4 испорчены. Наугад берут 2 лампочки. Какова вероятность того, что:

- *1) Обе выбранные лампочки испорчены;*

$\frac{2}{35}$

- *2) Одна лампочка исправная, а одна испорченная;*

$\frac{44}{105}$

$\frac{11}{21}$

- *3) Обе лампочки исправные?*

Брошены 3 игральные кости. Какова вероятно
того, что:

- 1) ***На каждой кости выпало число 3;*** $\frac{1}{216}$

- 2) ***Выпали одинаковые числа;*** $\frac{1}{36}$

- 3) ***Сумма чисел на всех костях равна 4;*** $\frac{1}{72}$

- 4) ***Произведение всех выпавших чисел ра 2?*** $\frac{1}{72}$

Сложение вероятностей

Повторение

Что называется суммой (объединением) событий А и В?

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Пример: в ящике находится красный, черный и белый шары.

А- извлечение черного шара

В- извлечение красного шара

С- извлечение белого шара

А+В – извлечен черный или красный шар

В+С – извлечен красный или белый шар

А+С – извлечен черный или белый шар

Повторение

Что называется произведением (пересечением) событий A и B?

Произведением событий A и B называют событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает и событие A и событие B.

Оно обозначается **A·B** или **AB.**

Пример1.

Дать описание произведения АВ событий А и В, если

а) А-цена товара больше 100 руб.;

В -цена товара не больше 110руб.;

$$100 < S \leq 110$$

б)А-завтра пятница, В-завтра 13–е число;

Завтра пятница 13-ое

Теорема сложения вероятностей

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

Пусть m — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию A, k — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию B, несовместимому по отношению к событию A. Пусть n — общее число равновозможных элементарных событий, образующих полную группу несовместимых событий.

$$\boldsymbol{P}(A)=\frac{m}{n},\quad \boldsymbol{P}(B)=\frac{k}{n}.$$

Пример

1. В лотерее выпущено 10 000 билетов и установлены: 10 выигрышей по 200 руб., 100 — по 100 руб., 500 — по 25 руб. и 1000 выигрышей — по 5 руб. Гражданин купил 1 билет. Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 25 рублей?

Обозначим события:
A — «выигрыш не менее 25 рублей»
A_1 — «выигрыш равен 25 рублям»,
A_2 — «выигрыш равен 100 рублям»,
A_3 — «выигрыш равен 200 рублям».

Поскольку куплен только один билет, то $A = A_1 + A_2 + A_3$, где события A_1, A_2 и A_3 попарно несовместимы, поэтому

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A_1 + A_2 + A_3) = \boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2) + \boldsymbol{P}(A_3),$$
$$\boldsymbol{P}(A_1) = 0{,}05, \ \boldsymbol{P}(A_2) = 0{,}01, \ \boldsymbol{P}(A_3) = 0{,}001,$$
$$\boldsymbol{P}(A) = 0{,}05 + 0{,}01 + 0{,}001 = 0{,}061.$$

Пример

2. Военный летчик получил задание уничтожить 3 рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,01, во второй — 0,008, в третий — 0,025.

Любое попадание в результате детонации вызывает взрыв и остальных складов. Какова вероятность того, что склады противника будут уничтожены?

Обозначим события:
A — «склады уничтожены»,
A_1 — «попадание в первый склад»,
A_2 — «попадание во второй склад»,
A_3 — «попадание в третий склад».

Для уничтожения складов достаточно попадания в один из упомянутых трех складов. Поэтому

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$
$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A_1 + A_2 + A_3) = \boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2) + \boldsymbol{P}(A_3) =$$
$$= 0{,}01 + 0{,}008 + 0{,}025 = 0{,}043.$$

3. Бросают две монеты. Чему равна вероятность появления хотя бы одного герба?

Обозначим события:
A — «появление герба при подбрасывании первой монеты»,
B — «появление герба при подбрасывании второй монеты».

Снова предстоит найти вероятность события $C = A + B$. Но в этом случае $\boldsymbol{P}(C) \neq \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B)$, ибо события A и B совместимы. Поэтому формула (5.1) не применима. Приходится избрать другой путь решения.

Пусть событие $\overline{C}$ — «выпадение герба не состоялось». Ясно, что $P(\overline{C}) = \frac{1}{4}$, ибо при бросании двух монет могут произойти только следующие события, составляющие полную группу несовместимых событий.

$$\text{гг}, \ \boxed{\text{цц}}, \ \text{цг}, \ \text{гц}.$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Событие $C + \overline{C}$ представляет собой достоверное событие, поэтому $C + \overline{C} = U$.

$$P(U) = P(C + \overline{C}) = P(C) + P(\overline{C}) = 1,$$

отсюда

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Теорема сложения вероятностей

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления(произведения):

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Пример

1. Подбрасываем две монеты. Какова вероятность выпадания хотя бы одного герба?

A — «появление герба при подбрасывании первой монеты», B — «появление герба при подбрасывании второй монеты».

Нам надо определить вероятность события $C = A + B$. Так как A и B — совместимые события, то

$$\boldsymbol{P}(C) = \boldsymbol{P}(A + B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB).$$

Ясно, что $\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(AB) = \frac{1}{4}$. Отсюда $\boldsymbol{P}(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Пример

2. Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Обозначим события:
A — «появление шестерки при бросании первой кости»,
B — «появление шестерки при бросании второй кости».

Нам надлежит определить вероятность события $C = A + B$.

$$\boldsymbol{P}(C) = \boldsymbol{P}(A + B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB).$$

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{6},\ \boldsymbol{P}(B) = \frac{1}{6},\ \boldsymbol{P}(AB) = \frac{1}{36}.$$

$$\boldsymbol{P}(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Вероятность произведения независимых событий

Событие B называется независимым от A, если его вероятность не зависит от того, произошло или не произошло событие A.

$$\boldsymbol{P}(B/A) = \boldsymbol{P}(B).$$

В случае независимости события B от события A

$$\boxed{\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B).}$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример:

1. Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления на первой кости нечетного числа очков и на второй пяти очков?

Обозначим события:

A — «появление нечетного числа очков при бросании первой кости»,

B — «появление пяти очков при бросании второй кости».

Нам нужно найти $\boldsymbol{P}(AB)$.

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B).$$

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{2} \qquad \boldsymbol{P}(B) = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{P}(AB) = \frac{1}{12}.$$

Подбрасывают 3 монеты. Найти вероятность выпадения гербов на всех трех монетах.

Обозначим события:
A_1 — «появление герба при бросании первой монеты»,
A_2 — «появление герба при бросании второй монеты»,
A_3 — «появление герба при бросании третьей монеты».

Поскольку события A_1, A_2, A_3 совместимы и независимы, то

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Задача 2

В коробке 250 лампочек, из них
100 по 100 Вт, 50 – по 60 Вт, 50 - по 25 Вт,
50 - по 15 Вт.
Вычислить вероятность того, что мощность любой взятой наугад лампочки
не превысит 60 Вт.

Задача 3

В коробке лежат 30 галстуков, причем 12 из них красные, остальные белые. Определить вероятность того, что из 4 наудачу вынутых галстуков все они окажутся одного цвета.

Решение

- Пусть А – событие, состоящее в том, что все 4 галстука будут красные,
- В – все 4 галстука будут белыми

4 галстука из 30 можно выбрать

4 галстука из 30 можно выбрать

$$C_{30}^{4} = \frac{30!}{4!26!} = \frac{27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 27405$$ способами

4 галстука из 12 красных можно выбрать

$$C_{12}^{4} = \frac{12!}{4!8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$ способами, аналогично

4 белых - $C_{18}^{4} = \frac{18!}{4!14!} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 3060$ способами.

Вероятность того, что все 4 галстука будут красные, равна

$$P = P(A) + P(B) = \frac{495}{27405} + \frac{3060}{27405} = \frac{79}{609} = 0,13$$

Ответ: 0,13

Решение задач

- 4. Производят три выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов произойдет только одно попадание.
- 5. У продавца имеется 10 оранжевых,8 синих, 5 зеленых и 15 желтых шаров. Найти вероятность того, что купленный шар окажется оранжевым, синим или зеленым.
- 6. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 100 денежных выигрышей. Найти вероятность выигрыша денежного или вещевого на один лотерейный билет.

Решение задач

- 7. Вероятность того, что новая кофемолка прослужит больше года, равна 0,91. Вероятность того, что она прослужит больше двух лет, равна 0,78.

Найти вероятность того, что кофемолка прослужит меньше двух лет, но больше года.

Теорема умножения вероятностей.

Два события называются ***независимыми***, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

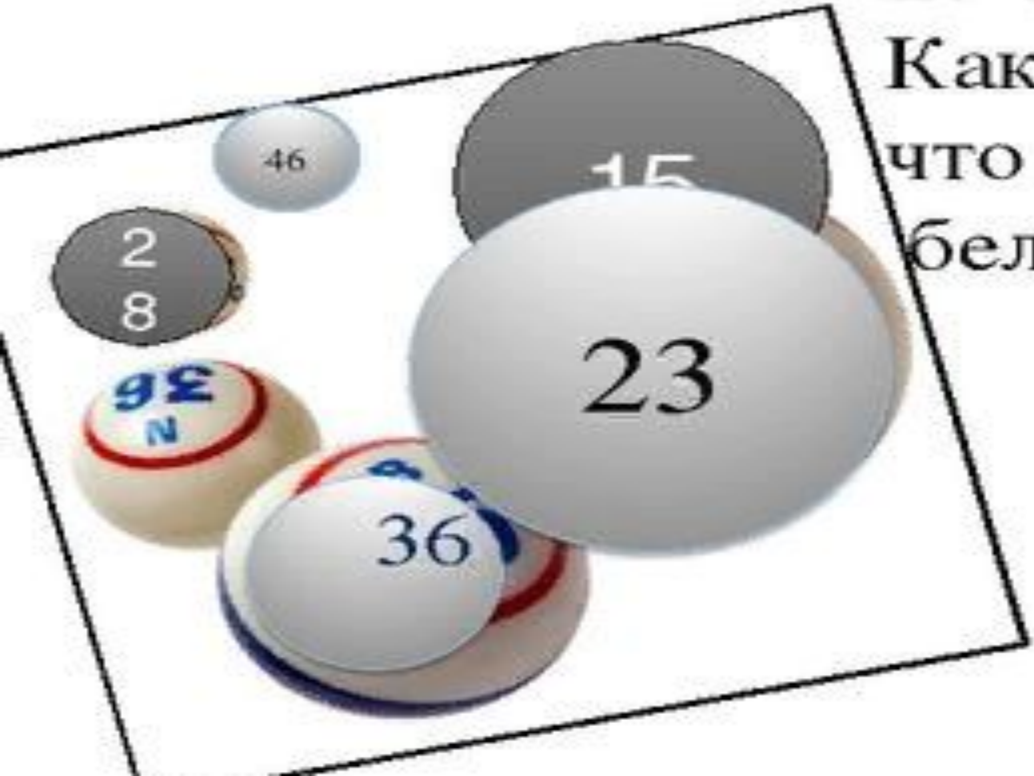
Условной вероятностью ***P(B/A)*** называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Для независимых событий **P(A)=P(A/B) или P(B)=P(B/A)**

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: **P(AB)=P(A) P(B/A)**

Задача 1

В первой урне находятся
6 черных и 4 белых шара,
во второй – 5 черных и 7 белых.
Из каждой урны извлекают
по одному шару.
Какова вероятность того,
что оба шара окажутся
белыми?



Решение

Пусть A_1 – из первой урны извлечен белый шар;

A_2 – из второй урны извлечен белый шар.

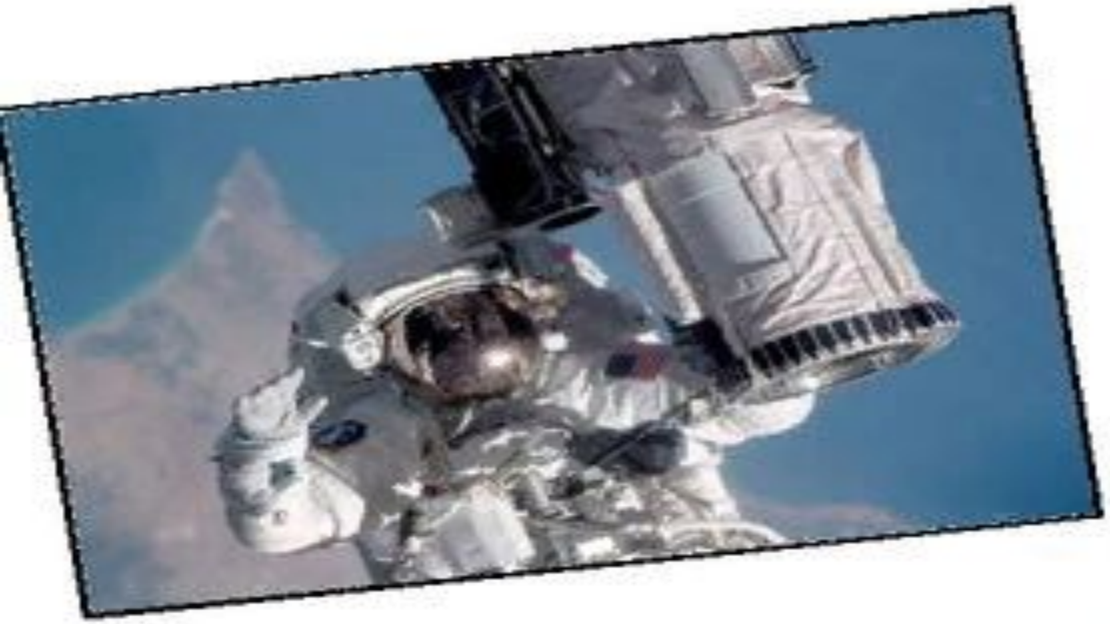
События A_1 и A_2 независимы.

$$P(A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5};P(A_2)=\frac{7}{12};$$

$$P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{30}$$

Ответ: $\frac{7}{30}$

Задача 2



Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо.
Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2;
Вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3.
Найти вероятность того, что:
а) оба элемента выйдут из строя;
б) оба элемента будут работать.

Решение

Пусть событие А – выход из строя первого элемента,
событие Е – выход из строя второго элемента.
Эти события независимы (по условию).

а) одновременно появление А и Е есть событие АЕ

$P(AE) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

б) если работает первый элемент, то имеет место событие $\bar{A}$ (противоположное событию А – выходу этого элемента из строя);

Если работает второй элемент – событие $\bar{E}$, противоположное событию Е

$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ и $P(\bar{E}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\bar{A}\bar{E}$.

$P(\bar{A}\bar{E}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{E}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$

***Ответ:* 0,56.**

Задача 3

В Санкт-Петербурге – 16 мест на практику,
в Киеве – 10, в Баку – 5.
Какова вероятность того, что три студента попадут в один город?

Решение

Событие E – определенные три студента попадут в один город.

Это событие может реализоваться:

или в виде события C1 – указанные 3 студента попадут в С.- Петербург;

или в виде события C2 – попадут в Киев;

или в виде события C3 – попадут в Баку.

Каждое из этих событий можно рассматривать как совмещение трех событий.

Например, событие C1 – в С.-Петербург попадут и первый из указанных студентов (событие A1), и второй студент (событие A2), и третий из указанных студентов (событие A3).

Вероятности этих событий

$$P(A1) = \frac{15}{30},\ P(A2) = P(E/A1) = \frac{14}{29},\ P(A3) = P(E/A1) = \frac{13}{28}$$

Аналогично можно рассматривать и события C2 и C3.

По правилам сложения и умножения вероятностей

$$P(E) = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{30 \cdot 29 \cdot 28} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{30 \cdot 29 \cdot 28} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{88}{609}$$

Ответ: $\mathbf{\frac{88}{609}}$.

Задача 4

В ящике 6 белых и 8 красных шаров. Из ящика вынули 2 шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение

Пусть событие А – появление белого шара при первом вынимании; событие В – появление белого шара при втором вынимании. События зависимы, поэтому

$$P(AB)=P(A)\,P(B/A)$$

$$P(A)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

$$P(B/A)=\frac{6-1}{14-1}=\frac{5}{13}$$

$$P(AB)=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{13}=\frac{15}{91}$$

$$Ответ: \frac{15}{91}$$

Решение задач

- 4.В следующих испытаниях найдите вероятности «успеха» и «неудачи»:

а) Бросают пару различных монет. «Неудача» – выпадение двух орлов.

б) Бросают игральный кубик. «Успех» – выпадение числа, кратного трем.

в) Бросают пару различных кубиков. «Неудача» – выпадение двух четных чисел.

г) Из 36 игральных карт берут 5. «Успех» – среди них нет дамы пик.

- 5. В экзаменационные билеты включено по 2 теоретических вопроса и по 1 задаче. Всего составлено 28 билетов. Вычислить вероятность того, что, вынув наудачу билет, студент ответит на все вопросы, если он подготовил 50 теоретических вопросов и 22 задачи.

Домашнее задание

- 1. В урне 2 белых и 10 черных шаров; во второй – 8 белых и 4 черных шара. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность, что

  а) оба шара белые;

  б) один белый и один черный;

  в) оба черные.

- Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,75; для второго – 0,8; для третьего – 0,9. Какова вероятность того, что

  а) все три попадут в цель;

  б) в цель попадет хотя бы один стрелок.