

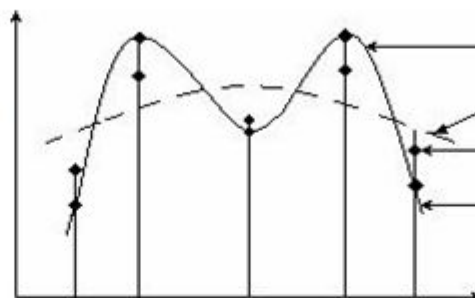
ЧАСТЬ 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Глава 1. Аппроксимация функций

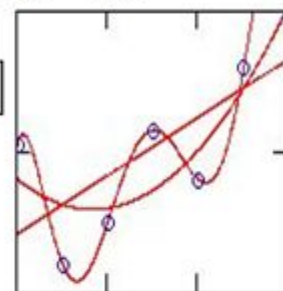
$$g(x) \approx f(x): x \in Q, Q = \begin{cases} (a, b) \\ x_i, i = \overline{1, N} \end{cases}$$

$$g(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}): \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in Q, Q = \begin{cases} \subset R^r \\ \mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ir}), i = \overline{1, N} \end{cases}$$

- задача приближения
- задача восстановления
- сглаживание экспериментальных данных
- численное дифференцирование
- численное интегрирование



- интерполяция
- аппроксимация
- сглаживание
- экстраполяция



в узлах заданы значения

1.1. Интерполирование функций одной переменной

1.1.1. Постановка задачи

$$f(x), x \in (a, b):$$

$$\begin{aligned} x_{0,1}, \dots, x_{0,l_0} - f(x_{0,i}), i = \overline{1, l_0} \\ x_{1,1}, \dots, x_{1,l_1} - f'(x_{1,i}), i = \overline{1, l_1} \\ \dots \\ x_{m,1}, \dots, x_{m,l_m} - f^{(m)}(x_{m,i}), i = \overline{1, l_m} \end{aligned}$$

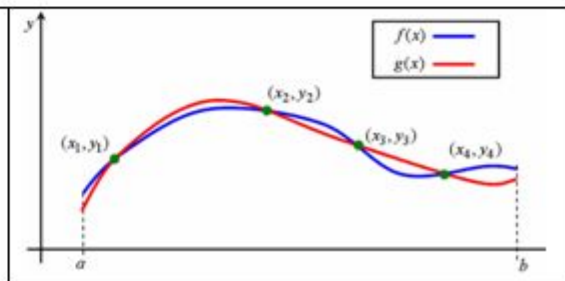
$$f(x) \in F = \{\varphi(x) \text{ со свойством } \mathcal{A}\} \Leftrightarrow \{g_n(x) \equiv g_n(x, a_1, \dots, a_n)\} - \text{семейство функций}$$

$$g_n^{(j)}(x_{j,i}; a_1, \dots, a_n) = f^{(j)}(x_{j,i}), i = \overline{1, l_j}, j = \overline{0, m}$$

интерполяционные уравнения

Вопросы:

- $g_n(x, a_1, \dots, a_n)$ обладают свойством \mathcal{A}
- $g_n(x, a_1, \dots, a_n)$ известны для $\forall n = \overline{0, \infty}$ и определены на (a, b) для $\forall a_i, i = \overline{1, n}$
- $g_n(x, a_1, \dots, a_n) = g_{n+1}(x, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}^0)$
- $\forall \varepsilon \Rightarrow \exists n = n(\varepsilon): |g_n(x, a_1^*, \dots, a_m^*) - f(x)| < \varepsilon, x \in (a, b)$
- $r_n(x, f) = |g_n(x, a_1^*, \dots, a_m^*) - f(x)| - ???$



1.1.2. Метод неопределенных коэффициентов

только по значениям функции

$$x_0, \dots, x_n, f(x_0), \dots, f(x_n)$$

$$\Rightarrow g(x_i; a_0, \dots, a_n) = f(x_i), i = \overline{0, n}$$

система нелинейных уравнений

$$\{\varphi_k(x)\}, k = \overline{0, \infty}$$

система базисных (линейно независимых) функций

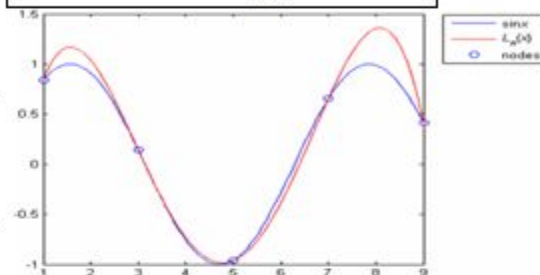
$$g(x; a_0, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Phi \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}$$

система линейных уравнений



$\{\varphi_k(x)\}$ – последовательность Чебышева:

$\Phi = \{\varphi_k(x_i)\}$ – невырожденная матрица

а) Алгебраическое интерполирование

$$\varphi_k(x) = x^k$$

$$\sum_{k=0}^n a_k x_i^k = f(x_i), i = \overline{0, n}$$

$\Phi = \{x_i^k\}$, $|\Phi|$ – определитель Вандермонда

б) Тригонометрическое интерполирование

$f(x)$ – периодическая (период $2l$)

$$g(x) = T_n(x) = a_k + \sum_{k=1}^n (a_k \cos \frac{2\pi kx}{l} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{l}), f(x_i), i = \overline{0, 2n}$$

$f(x)$ – четная периодическая

$$g(x) = a_k + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx, f(x_i), i = \overline{0, n}$$

$f(x)$ – нечетная периодическая

$$g(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin kx, f(x_i), i = \overline{1, n}$$

б) Экспоненциальное интерполирование

$f(x)$ – быстрорастущая

$$g(x) = E_n(x) = a_0 + \sum_{k=0}^n (a_k \operatorname{ch} kx + b_k \operatorname{sh} kx)$$

$$g(x) = E_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a'_k e^{kx} + b'_k e^{-kx})$$

$$f(x_i), i = \overline{0, 2n}$$

1.1.3. Интерполяционная формула Лагранжа

явное интерполирование: $g_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \Phi_k(x), f_i = f(x_i), \Phi_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \Rightarrow g_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}$

а) Алгебраическое интерполирование

$$\Phi_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \quad \omega(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad \omega'(x_k) = \prod_{j \neq k} (x_k - x_j)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k)$$

– равноотстоящая
сетка узлов

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, n}$$

$$x = x_0 + th$$

$$P_n(x_0 + th) = \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \binom{n}{k}}{t-k} f(x_k) \quad t^{[n]} = t(t-1)\dots(t-n+1)$$

– схема
Эйткена

$$P_{i,k}(x) = \frac{\tilde{P}_{i,k}(x)}{x_k - x_i}$$

$$\tilde{P}_{01}(x) = \begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_1 & x_1 - x \end{vmatrix} \quad \tilde{P}_{012}(x) = \begin{vmatrix} P_{01}(x) & x_0 - x \\ P_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix} \quad \tilde{P}_{0123}(x) = \begin{vmatrix} P_{012}(x) & x_0 - x \\ P_{123}(x) & x_3 - x \end{vmatrix} \quad \dots \quad P_{0,n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_{0,n-1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_0}$$

$$\tilde{P}_{23}(x) = \begin{vmatrix} f_2 & x_2 - x \\ f_3 & x_3 - x \end{vmatrix} \quad \tilde{P}_{123}(x) = \begin{vmatrix} P_{12}(x) & x_1 - x \\ P_{23}(x) & x_3 - x \end{vmatrix} \quad \dots$$

$$\tilde{P}_{n-1,n}(x) = \begin{vmatrix} f_{n-1} & x_{n-1} - x \\ f_n & x_n - x \end{vmatrix} \quad \dots$$

б) Тригонометрическое
интерполирование

$$\Phi_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{\sin((x - x_j)/2)}{\sin((x_k - x_j)/2)} = \frac{B(x)}{2 \sin((x_k - x_j)/2) B'(x_k)} \quad B(x) = \prod_{j=0}^n \sin\left(\frac{x - x_j}{2}\right), \quad B'(x_k) = \frac{1}{2} \prod_{j \neq k} \sin\left(\frac{x_k - x_j}{2}\right)$$

в) Экспоненциальное
интерполирование

$$\Phi_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{\operatorname{sh}((x - x_j)/2)}{\operatorname{sh}((x_k - x_j)/2)} = \frac{F(x)}{2 \operatorname{sh}((x_k - x_j)/2) F'(x_k)} \quad F(x) = \prod_{j=0}^n \operatorname{sh}\left(\frac{x - x_j}{2}\right), \quad F'(x_k) = \frac{1}{2} \prod_{j \neq k} \operatorname{sh}\left(\frac{x_k - x_j}{2}\right)$$

1.1.4. Разделенные разности (разностные отношения)

$$x_i, f(x_i) \quad i = \overline{0, n}$$

	1-го порядка	2-го порядка		n-го порядка
$f(x_0)$	$f(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$	$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0}$...	$f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) = \frac{f(x_n, \dots, x_1) - f(x_{n-1}, \dots, x_0)}{x_n - x_0}$

Свойства

- $f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \Rightarrow \dots;$
- $f(x) = \alpha\varphi(x) \Rightarrow \dots$
- $f(x) \in \mathcal{P}_n \Rightarrow f(x_k, \dots, x_0) \in \mathcal{P}_{n-k} \quad (f(x_n, \dots, x_0) = \text{const})$
- $f(x_n, \dots, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$
- $f(x_k, \dots, x_0) = f(x_0, \dots, x_k)$
- $f(x_k) = f(x_0) + (x_k - x_0)f(x_0, x_1) + (x_k - x_0)(x_k - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})f(x_0, \dots, x_k)$
- $f(x) \in C^n[a, b] \Rightarrow f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b] \quad (\text{т. Ролля})$

$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$		
$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	\vdots	\ddots	
$f(x_2)$	\vdots	\vdots	\ddots	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
$f(x_{n-2})$	$f(x_{n-2}, x_{n-1})$	$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$		
$f(x_{n-1})$	$f(x_{n-1}, x_n)$			
$f(x_n)$				$f(x_0, \dots, x_n)$

1.1.5. Конечные разности

$$x_i = x_0 + ih, \quad f_i = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}$$

	1-го порядка	2-го порядка		n-го порядка
f_0	$\Delta f_0 = f_1 - f_0$	$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$...	$\Delta^n f_0 = \Delta^{n-1} f_1 - \Delta^{n-1} f_0$

Свойства

- $f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \Rightarrow \dots;$
- $f(x) = \alpha\varphi(x) \Rightarrow \dots$
- $f(x) \in \mathcal{P}_n \Rightarrow \Delta^k f_0 \in \mathcal{P}_{n-k} \quad Ef(x) = f(x+h)$
- $\Delta^k f_0 = (E-1)^k f_0 = f_k - \binom{k}{1}f_{k-1} + \binom{k}{2}f_{k-2} - \dots + (-1)^k f_0$
- $f_k = f_0 + \binom{k}{1}\Delta f_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 f_0 + \dots + \Delta^k f_0 = (1+\Delta)^k f_0$
- $f(x_0, x_1) = \frac{\Delta f_0}{h}, \quad f(x_0, x_1, x_2) = \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}, \dots, \quad f(x_0, \dots, x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$
- $f(x) \in C^n[a, b] \Rightarrow \Delta^n f_0 = h^n f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$

f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$		
f_1	Δf_1	\vdots	\ddots	
f_2	\vdots	\vdots	\ddots	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
f_{n-2}	Δf_{n-2}	$\Delta^2 f_{n-2}$		
f_{n-1}	Δf_{n-1}			
f_n				$\Delta^n f_0$

- $\tilde{f}_i = f_i + \varepsilon_i, \quad |\varepsilon_i| \leq \varepsilon \Rightarrow$
 $|\Delta^k \tilde{f}_0 - \Delta^k f_0| = |\Delta^k \varepsilon_0| = |(E-1)^k \varepsilon_0| \leq 2^k \varepsilon$
 достижима при $\varepsilon_i = (-1)^i \varepsilon$

1.1.6. Интерполяционная формула Ньютона. Остаточный член в форме Лагранжа

явное интерполирование:

$$x_i, f(x_i), i = \overline{0, n} \Rightarrow f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), \dots, f(x_0, \dots, x_n)$$

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f(x_0, \dots, x_n) \stackrel{6}{\Rightarrow} P_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}$$

$$f(x) \in C^{n+1}[a, b], x_i \in [a, b], i = \overline{0, n} \Rightarrow \forall x \in [a, b], \exists \xi = \xi(x) \in [a, b]: R_n(x, f) = f(x) - P_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

По свойству 6 для узлов $x_0, \dots, x_n, x \Downarrow$

$$\Uparrow \text{ и из свойства 7 } f(x_0, \dots, x_n, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f(x_0, \dots, x_n) + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)f(x_0, \dots, x_n, x)$$

1.1.7. Минимизация остаточного члена

$$R_n(x, f) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \Rightarrow |f^{(n+1)}(\xi)| < M_4 \Rightarrow |R_n(x, f)| = \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} M_4 \Rightarrow \min |R_n(x, f)| \Leftrightarrow \min |\omega(x)|$$

a) на всем интервале $[a, b]$ при возможности выбора узлов интерполирования

$$\min_{x_0, \dots, x_n} |\omega(x)|$$

$$[a, b] = [-1, 1]$$

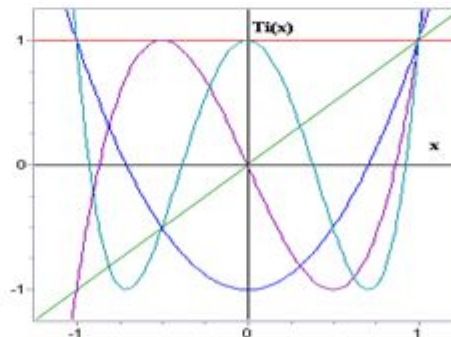
$$\omega(t) = T_n(t) = \cos[(n+1)\arccos t]$$

– полином Чебышева I рода:

$$T_0(t) = 1, T_1(t) = t,$$

$$T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t)$$

$$[a, b] \neq [-1, 1]$$



$$t_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, i = \overline{0, n} - \text{корни}$$

$$x_i = \frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2}, i = \overline{0, n} - \text{узлы}$$

a) на всем в окрестности точки x_ при заданных узлах интерполирования*

$$\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_N$$

$$x_0: |x_* - x_0| = \min_{0 \leq k \leq N} |x_* - \tilde{x}_k| \Rightarrow x_1: |x_* - x_1| = \min_{\tilde{x}_k \neq x_0} |x_* - \tilde{x}_k| \Rightarrow x_2: |x_* - x_2| = \min_{\tilde{x}_k \neq x_0, x_1} |x_* - \tilde{x}_k| \Rightarrow$$

1.1.8. Интерполяционные формулы для равноотстоящих узлов $x_i = x_0 + ih, f(x_i), i = \overline{0, N}$

а) формула Ньютона в начале таблицы ($x_0 < x_* < x_1$)

$$R_n(x_0 + th; f) = \frac{t^{[n+1]} h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$P_n(x_0 + th) = f_0 + \frac{t}{1!} \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

б) формула Ньютона в конце таблицы ($x_{-1} < x_* < x_0$)

$$R_n(x_0 + th; f) = \frac{(t+n+1)^{[n+1]} h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$P_n(x_0 + th) = f_0 + \frac{t}{1!} \Delta f_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_{-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 f_{-3} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} \Delta^n f_{-n}$$

в) формула Стирлинга в середине таблицы ($|x_* - x_0| < \frac{h}{4}, n = 2k$) $R_n(x_0 + th; f) = \frac{t(t^2-1)\dots(t^2-(\frac{n}{2})^2)h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$

$$P_n(x_0 + th) = f_0 + \frac{t}{1!} \Delta f_{-\frac{1}{2}} + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 f_{-1} + \frac{t(t^2-1)}{3!} \Delta^3 f_{-\frac{3}{2}} + \dots + \frac{t(t^2-1)\dots(t^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!} \Delta^{2k-1} f_{-k+\frac{1}{2}} + \frac{t^2(t^2-1)\dots(t^2-(k-1)^2)}{(2k)!} \Delta^{2k} f_{-k}$$

г) формула Бесселя в середине таблицы ($|x_* - x_0 + \frac{h}{2}| < \frac{h}{4}, n = 2k+1$) $R_n(x_0 + th; f) = \frac{t(t^2-1)\dots(t^2-(\frac{n+1}{2})^2)h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$

$$P_n(x_0 + th) = f_{\frac{1}{2}} + \frac{t-\frac{1}{2}}{1!} \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_{-\frac{1}{2}} + \frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{3!} \Delta^3 f_{-1} + \frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!} \Delta^4 f_{-\frac{3}{2}} + \dots + \frac{(t-\frac{1}{2})t(t^2-1)\dots(t^2-(k-1)^2)(t-k)}{(2k+1)!} \Delta^{2k+1} f_{-k}$$

+

а)			
f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	
f_2	Δf_2		
f_3			

б)			
f_{-3}	Δf_{-3}	$\Delta^2 f_{-3}$	$\Delta^3 f_{-3}$
f_{-2}	Δf_{-2}	$\Delta^2 f_{-2}$	
f_{-1}	Δf_{-1}		
f_0			

в)				
f_{-2}	Δf_{-2}	$\Delta^2 f_{-2}$	$\Delta^3 f_{-2}$	$\Delta^4 f_{-2}$
f_{-1}	Δf_{-1}	$\Delta^2 f_{-1}$	$\Delta^3 f_{-1}$	
f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$		
f_1	Δf_1			
f_2				

г)			
f_{-1}	Δf_{-1}	$\Delta^2 f_{-1}$	$\Delta^3 f_{-1}$
f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	
f_1	Δf_1		
f_2			

□

1.1.9. Интерполирование с кратными узлами

Интерполяционная формула Эрмита
явное интерполирование

$H_n(x)$:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = \overline{0, k_i - 1}, \quad i = \overline{0, m}$$

$$n = \sum_{i=0}^m k_i - 1$$

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{k_i-1} \sum_{l=0}^{k_i-1-j} \frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{k_i-j-l}} \frac{1}{l! j!} \left[\frac{(x-x_i)^{k_i}}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(l)} f^{(j)}(x_i)$$

$$\Omega(x) = \prod_{i=0}^m (x-x_i)^{k_i}$$

$$R_n(x; f) = \frac{\Omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

по теореме Ролля для $F(z) = f(z) - P_n(z) - \frac{\Omega(z)}{\Omega(x)} [f(x) - P_n(x)] \uparrow (x \neq x_i)$

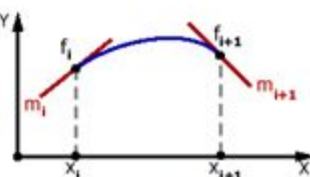
а) *простые узлы* ($k_i = 1, i = \overline{0, n}$)

$$H_n(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} f(x_i) \text{ - в форме Лагранжа}$$

б) *один кратный узел* ($m = 0, k_0 = n + 1$) $H_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(j)}(x_i)}{j!} (x-x_i)^j$ - частная сумма ряда Тейлора

в) *интерполирование соприкосновением первого порядка*

($k_i = 2, i = \overline{0, m}, n = 2m - 1$)



полином Эрмита

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^m \left[\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} \right]^2 \left\{ f_i \left[1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(x-x_i) \right] + f'_i(x-x_i) \right\}$$

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^m (x-x_j)$$

$$\omega'(x_i) = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$$

$$\frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)} = \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}$$

• $m = 2$

$$H_3(x) = f_0 + (x-x_0) \left\{ f'_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \left[f'_0 + \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} + \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \left(f'_0 - 2 \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} + f'_1 \right) \right] \right\}$$

• $x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(m+1)}, i = \overline{0, m}$ -

корни полинома Чебышева

$$H_n(x) = \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{i=0}^m \left[\frac{T_{m+1}(x)}{x-x_i} \right]^2 \left\{ f_i(1-x_i x) - f'_i(1-x_i^2)(x-x_i) \right\}$$

• $x_i = \frac{2\pi i}{n+1}, i = \overline{0, n}$ -

тригонометрическое
интерполирование

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \left[\frac{\sin(n+1) \frac{x-x_i}{2}}{(n+1) \sin \frac{x-x_i}{2}} \right]^2 + \sum_{i=0}^n f'_i \frac{2 \sin(n+1) \frac{x-x_i}{2}}{(n+1)^2 \sin \frac{x-x_i}{2}} \sin n \frac{x-x_i}{2} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} \sum_{i=0}^n f'_i$$

Интерполирование последовательными производными:

$$P_n^{(i)}(x_i) = f^{(i)}(x_i), \quad i = \overline{0, n}$$

1.1.10. Нелинейное и квазилинейное интерполирование

$$\boxed{y = f(x)} \quad \boxed{\chi = \varphi(x), \eta = \psi(y)} \Rightarrow \boxed{\eta = \zeta(\chi)} \quad \boxed{x = \varphi^{-1}(\chi), y = \psi^{-1}(\eta)}$$

$$\boxed{x_i, y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}} \Rightarrow \boxed{g(x) \approx f(x)} \Rightarrow \boxed{\chi_i, \eta_i = \zeta(\chi_i), i = \overline{0, n}} \Rightarrow \boxed{g(\chi) \approx \zeta(\chi)} \Rightarrow \boxed{g(x) = \dots}$$

$$\boxed{\text{Пример } f(x) \approx e^x} \Rightarrow \boxed{\eta = \ln(y)} \Rightarrow \boxed{x_i, \eta_i = \ln(y_i), i = \overline{0, 1}} \Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \ln y_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \ln y_0} \Rightarrow \boxed{g(x) = e^{s(x)} = e^{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \ln y_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \ln y_0}}$$

1.1.11. Дробно-рациональное интерполирование

а) *Метод неопределенных коэффициентов* (по системе базисных функций $\{\varphi_k(x)\}, k = \overline{0, \infty}$)

$$\boxed{g(x) = R_{m,n}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)}{\sum_{l=0}^m b_l \varphi_l(x)}} \quad \boxed{R_{m,n}(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n+m} \quad (b_m = 1)} \quad \boxed{\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x_i) - f(x_i) \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l(x_i) = 0, i = \overline{0, n+m}}$$

б) *Явное интерполирование* в виде цепной дроби через обратные разделенные разности

	1-го порядка	2-го порядка	...	n-го порядка
$f(x_0)$	$f^-(x_1, x_0) = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$	$f^-(x_2, x_1, x_0) = \frac{x_2 - x_0}{f^-(x_2, x_1) - f^-(x_1, x_0)}$...	$f^-(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) = \frac{x_n - x_0}{f^-(x_n, \dots, x_1) - f^-(x_{n-1}, \dots, x_0)}$

⊕

$$R(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{f^-(x_0, x_1) + \frac{x - x_1}{f^-(x_0, x_1, x_2) + \dots + \frac{x - x_{n-1}}{f^-(x_0, x_1, \dots, x_n)}}}$$

$$\deg P(x) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \quad \deg Q(x) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

$\frac{f(x_0)}{f(x_1)}$	$\frac{f^-(x_0, x_1)}{f^-(x_1, x_2)}$	$\frac{f^-(x_0, x_1, x_2)}{\vdots}$	\vdots	$\frac{f^-(x_0, \dots, x_n)}{\vdots}$
$f(x_2)$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$f(x_{n-2})$	$f^-(x_{n-2}, x_{n-1})$	$f^-(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$	\vdots	\vdots
$f(x_{n-1})$	$f^-(x_{n-1}, x_n)$	\vdots	\vdots	\vdots
$f(x_n)$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

1.1.12. Обратное интерполирование $x_i, y_i = f(x_i) \quad i = \overline{0, n}; \quad y_* = f(x) - ?$

а) Существование в окрестности точки (x_*, y_*) обратной зависимости $x = \varphi(y)$

- только по значениям функции $y_i, x_i = \varphi(y_i) \quad i = \overline{0, n}; \quad x_* = \varphi(y_*) - ?$

$x_* = \sum_{k=0}^n \prod_{j \neq k} \frac{y_* - y_j}{y_k - y_j} x_k$	$x_* = x_0 + (y_* - y_0)f(y_0, y_1) + \dots + (y_* - y_0)(y_* - y_1) \dots (y_* - y_{n-1})f(y_0, \dots, y_n)$
---	---

- при интерполировании с кратными узлами $x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}, \dots$

б) Решение нелинейного уравнения $y_* = g(x), \quad g(x) \approx f(x)$

- общая формула Ньютона $y_* = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, \dots, x_n)$

- формулы по равноотстоящим узлам: $x_* = x_0 + t_* \cdot h$ для сходимости $t_{k+1} = \psi(t_k)$ достаточно:

$$t = \frac{1}{\Delta f_0} \left[(y_* - f_0) - \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 - \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 f_0 - \dots - \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n f_0 \right] \quad |\Delta^2 f_0| \leq |\Delta f_0|, \quad |\Delta^n f_0| - \text{мало}$$

$$t = \frac{1}{\Delta f_0} \left[(y_* - f_0) - \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_{-2} - \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 f_{-3} - \dots - \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n f_{-n} \right] \quad |\Delta^2 f_{-2}| \leq |\Delta f_0|, \quad |\Delta^n f_{-n}| - \text{мало}$$

$$t = \frac{1}{\Delta f_{-\frac{1}{2}}} \left[(y_* - f_0) - \frac{t^2}{2!} \Delta^2 f_{-1} - \frac{t(t^2-1)}{3!} \Delta^3 f_{-\frac{3}{2}} - \frac{t^2(t^2-1)}{4!} \Delta^4 f_{-2} - \frac{t(t^2-1)(t^2-4)}{5!} \Delta^5 f_{-\frac{5}{2}} - \dots \right] \quad \dots$$

$$t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Delta f_0} \left[(y_* - f_{\frac{1}{2}}) - \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_{-\frac{1}{2}} - \frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{3!} \Delta^3 f_{-1} - \frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!} \Delta^4 f_{-\frac{3}{2}} - \dots \right]$$

1.1.13. Сходимость интерполяционных формул

Теорема Вейерштрасса

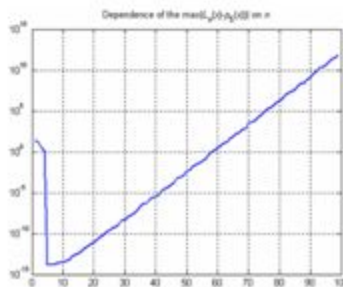
$$\forall f(x) \in C[a, b] \quad \exists \{x_i^n, i = \overline{1, n}\}:$$

$$P_n(x) \xrightarrow{\text{равномерно}} f(x)$$

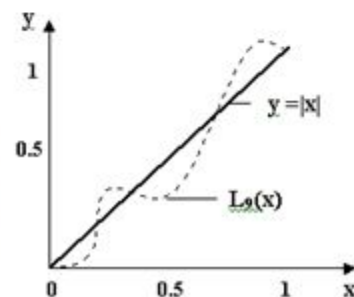
Однако

$$f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 14x^3 - 22x^2 - x + 5$$

$$x \in [-1, 1.5] \quad \max |f(x) - P_n(x)|, \quad n = \overline{2, 100}$$



Пример
Бронштейна
 $f(x) = |x| \approx P_n(x)$
расходится
везде, кроме
 $\pm 1, 0$



1.2. Интерполирование функций многих переменных $z = f(\mathbf{x})$

$$g(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}): \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in Q, Q = \begin{cases} \subset R^s \\ \mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{is}), i = \overline{1, N} \end{cases}$$

1.2.1. Постановка задачи; метод неопределенных коэффициентов

по значениям функции $\mathbf{x}_i, f(\mathbf{x}_i), i = \overline{0, n}$ $g(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(\mathbf{x}) \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i), i = \overline{0, n} \Leftrightarrow \Phi \mathbf{a} = \mathbf{f}$

система линейных уравнений

a) Алгебраическое интерполирование (s=2) $P_n(x, y) = \sum_{k+l=0}^n a_{kl} x^k y^l$ $\sum_{k+l=0}^n a_{kl} x_i^k y_i^l = f(x_i, y_i), i = \overline{0, \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ $\Phi = \{x_i^k y_i^l\}$

1.2.2. Интерполяционная формула Лагранжа

явное интерполирование: $g_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n f_k \Phi_k(\mathbf{x}), f_i = f(\mathbf{x}_i), \Phi_k(\mathbf{x}_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \Rightarrow g_n(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i), i = \overline{0, n}$

a) Алгебраическое интерполирование (s=2) $P_{nm}(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_{kl} x^k y^l$ $\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i), \tilde{\omega}(y) = \prod_{j=0}^m (y - y_j)$

• регулярная
прямоугольная
сетка узлов (x_i, y_j)
 $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$

$$P_{nm}(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \prod_{i=k}^n \prod_{j=l}^m \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \frac{y - y_j}{y_l - y_j} f(x_k, y_l)$$

$$R_{nm}(x, y, f) = \frac{\omega(x)\tilde{\omega}(y)}{(n+1)!(m+1)!} f^{(n+1, m+1)}(\xi, \zeta)$$

• равномерная
сетка узлов $x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, n},$
 $y_j = y_0 + jd, j = \overline{0, m}$

$$P_n(x_0 + ph, y_0 + qd) = \frac{p^{[n]} q^{[m]}}{n! m!} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{n+m-i-j} \binom{n}{i} \binom{m}{j}}{(p-i)(q-j)} f(x_i, y_j)$$

• треугольная
сетка узлов (x_i, y_j)
 $i + j = \overline{0, n}$

$$P_{nm}(x, y) = \sum_{k+l=0}^n \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{l-1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \frac{y - y_j}{y_l - y_j} f(x_k, y_l)$$

• равномерная
сетка узлов (ρ_i, φ_j)
 $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$

$$z_{ij} = f(\rho_i, \varphi_j) \Rightarrow P_{nm}(\rho, \varphi) = \dots$$

1.2.3. Интерполяционная формула Ньютона (s=2, для равномерной сетки узлов)

частные конечные разности $x_i = x_0 + ih, y_j = y_0 + jd, f_{ij} = f(x_i, y_j), i = \overline{0, n}, j = \overline{0, n}$

$\Delta_x f_{ij} \equiv \Delta^{1+0} f_{ij} = f_{i+1,j} - f_{ij}$ $\Delta_y f_{ij} \equiv \Delta^{0+1} f_{ij} = f_{i,j+1} - f_{ij}$	$\Delta^{2+0} f_{ij} = \Delta^{1+0} f_{i+1,j} - \Delta^{1+0} f_{ij}$ $\Delta^{0+2} f_{ij} = \Delta^{0+1} f_{i,j+1} - \Delta^{0+1} f_{ij}$ $\Delta^{1+1} f_{ij} = \Delta^{0+1} f_{i+1,j} - \Delta^{0+1} f_{ij} = \Delta^{1+0} f_{i,j+1} - \Delta^{1+0} f_{ij}$...	$\Delta^{k+i} f_{ij} = \begin{cases} \Delta^{1+0} (\Delta^{(k-1)+i} f_{ij}) = \dots = \Delta^{k+0} (\Delta^{0+i} f_{ij}) \\ \Delta^{0+1} (\Delta^{k+(l-1)} f_{ij}) = \dots = \Delta^{0+l} (\Delta^{k+0} f_{ij}) \end{cases}$
---	---	-----	--

$$f(x, y) \approx P(x, y) = c_{00} + c_{10}(x - x_0) + c_{01}(y - y_0) + c_{20}(x - x_0)(x - x_1) + c_{11}(x - x_0)(y - y_0) + c_{02}(y - y_0)(y - y_1) + \dots$$

$$P(x_i, y_j) = f_{ij}, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n}$$

$$\Delta^{k+i} P_{ij} = \Delta^{k+i} f_{ij}, \quad \forall i, j, k, l$$

$$\Delta^{1+0} P(x, y) = P(x+h, y) - P(x, y) = c_{10}h + 2c_{20}h(x-x_0) + c_{11}h(y-y_0) + \dots \quad \Delta^{1+0} P_{00} = \Delta^{1+0} f_{00} \Rightarrow c_{10} = \frac{\Delta^{1+0} f_{00}}{h}$$

$$\Delta^{0+1} P(x, y) = P(x, y+d) - P(x, y) = c_{01}d + c_{11}d(y-y_0) + 2c_{02}d(y-y_0) + \dots \quad \Delta^{0+1} P_{00} = \Delta^{0+1} f_{00} \Rightarrow c_{01} = \frac{\Delta^{0+1} f_{00}}{d}$$

$$\Delta^{2+0} P(x, y) = \Delta^{1+0} P(x+h, y) - \Delta^{1+0} P(x, y) = 2c_{20}h^2 + \dots \quad \Delta^{2+0} P_{00} = \Delta^{2+0} f_{00} \Rightarrow c_{20} = \frac{\Delta^{2+0} f_{00}}{2h^2}$$

$$\Delta^{0+2} P(x, y) = \Delta^{0+1} P(x, y+d) - \Delta^{0+1} P(x, y) = 2c_{02}d^2 + \dots \quad \Delta^{0+2} P_{00} = \Delta^{0+2} f_{00} \Rightarrow c_{02} = \frac{\Delta^{0+2} f_{00}}{2d^2}$$

$$\Delta^{1+1} P(x, y) = \Delta^{1+0} P(x, y+d) - \Delta^{1+0} P(x, y) = c_{11}hd + \dots \quad \Delta^{1+1} P_{00} = \Delta^{1+1} f_{00} \Rightarrow c_{11} = \frac{\Delta^{1+1} f_{00}}{hd}$$

$$\dots$$

$$\Delta^{k+i} P_{00} = \Delta^{k+i} f_{00} \Rightarrow c_{ki} = \frac{\Delta^{k+i} f_{00}}{k!l!h^k d^l}$$

⊕ треугольная сетка узлов

$$P_n(x_0 + ph, y_0 + qd) = f_{00} + \frac{1}{1!} [p\Delta^{1+0} f_{00} + q\Delta^{0+1} f_{00}] + \frac{1}{2!} [p(p-1)\Delta^{2+0} f_{00} + 2pq\Delta^{1+1} f_{00} + q(q-1)\Delta^{0+2} f_{00}] + \frac{1}{3!} [p(p-1)(p-2)\Delta^{3+0} f_{00} + 3p(p-1)q\Delta^{2+1} f_{00} + 3pq(q-1)\Delta^{1+2} f_{00} + q(q-1)(q-2)\Delta^{0+3} f_{00}] + \dots$$

1.2.4. Метод последовательного интерполирования (s=2, для равномерной сетки узлов)

$$f(x, y): \quad x_i = x_0 + ih, \quad y_j = y_0 + jd, \quad f_{ij} = f(x_i, y_j), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n}$$

а) построение интерполяционной функции

– интерполирование по одной из переменных (например, по x) ($\forall j = \overline{0, n}$)

$$f_j(x): \quad x_i = x_0 + ih, \quad f_j(x_i) = \underline{f(x_i, y_j)}, \quad i = \overline{0, n} \quad \Rightarrow \quad f_j(x) \approx \underline{g_j(x)}$$

– интерполирование по другой переменной (по y)

$$g_x(y): \quad y_j = y_0 + jd, \quad g_x(y_j) = \underline{g_j(x)}, \quad j = \overline{0, n} \quad \Rightarrow \quad g_x(y) \approx \underline{h(x, y)}$$

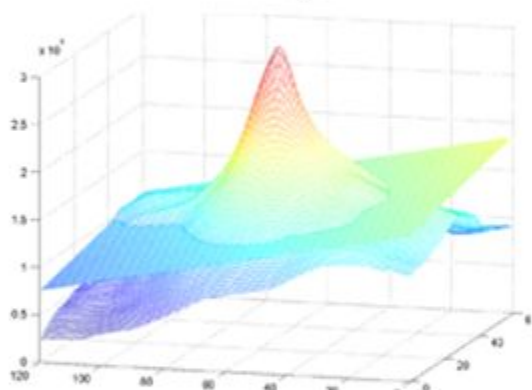
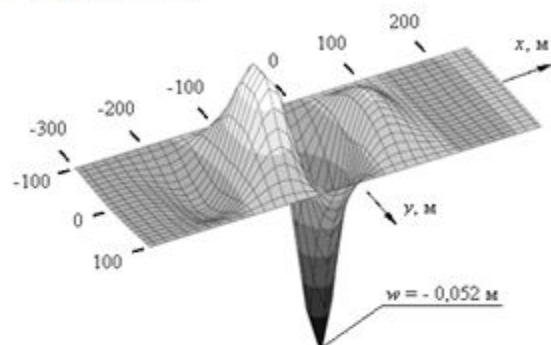
б) вычисление значения функции $f(x_*, y_*)$

– интерполирование по одной из переменных (например, по x) ($\forall j = \overline{0, n}$)

$$f_j(x): \quad x_i = x_0 + ih, \quad f_j(x_i) = \underline{f(x_i, y_j)}, \quad i = \overline{0, n} \quad \Rightarrow \quad f_j(x_*) \approx \underline{g_j(x_*)}$$

– интерполирование по другой переменной (по y)

$$g_*(y): \quad y_j = y_0 + jd, \quad g_*(y_j) = \underline{g_j(x_*)}, \quad j = \overline{0, n} \quad \Rightarrow \quad g_*(y_*) \approx \underline{h(y_*)}$$

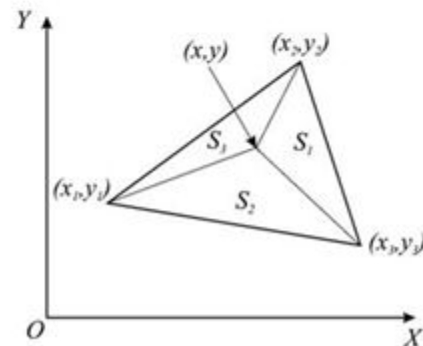


1.2.5. Кусочно-линейная интерполяция в треугольной области (s=2)

$(x_i, y_i), z_i = f(x_i, y_i), i = 1, 2, 3; S_1, S_2, S_3, S = S_1 + S_2 + S_3 \neq 0$ – площади треугольников
 $(x, y) \in$ треугольнику $z = f(x, y) - ?$

барицентрические координаты точки (x, y)

$$\alpha = \frac{S_1}{S}, \quad \beta = \frac{S_2}{S}, \quad \gamma = \frac{S_3}{S} : \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = x \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3}$$



1.3. Наилучшие приближения

1. Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации*. – М.: Наука, 1965.
2. Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*. – М.: Наука, 1969.
3. Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного*. – М.: Физматгиз, 1960.
4. Гончаров В. Л. *Теория интерполирования и приближения функций*. – М.: Гос. изд. технико-теорет. лит., 1954.
5. Натансон И. П. *Конструктивная теория функций*. – М.- Л.: Гос. изд. технико-теорет. лит. 1949.
6. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде*. – М.: Мир, 1986.

1.3.1. Постановка задачи наилучшего приближения функции

$$f(x) \in \mathcal{L}(Q), \quad \mathcal{L}(Q) = \begin{cases} \mathcal{L}_p(Q) & \|\varphi\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_Q \rho(x) |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} & \|\varphi\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\sum_{i=1}^N \rho_i |\varphi(x_i)|^p \right)^{1/p} \\ C(Q) & \|\varphi\|_C = \max_Q |\varphi(x)| & \|\varphi\|_C = \max_i |\varphi(x_i)| \end{cases}, \quad Q = \{x_i, i = \overline{0, N}\}$$

$$\mathcal{P} \equiv \left\{ \sum_k a_k \varphi_k(x) \right\} \subset \mathcal{L}(Q) - \text{чебышевское подпространство} \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$$

$P_n^*(x, f) = \sum_{k=0}^n a_k^* \varphi_k(x)$ – полином наилучшего приближения: $E(f) = \|f - P_n^*\|_{\mathcal{L}} = \inf_{a_k} \|f - P_n\|_{\mathcal{L}}$ – наилучшее приближение

Вопросы: 1. $\exists P_n^*(x)$ 2. $P_n^*(x)!$ 3. $|E(f)| \leq ?$ 4. алгоритм \dots ? 5. $P_n^*(x, f)$ – равномерная непрерывность от f

1. из теоремы Больцано-Вейерштрассе: $\left\{ \sum_k a_k \varphi_k(x) \right\}$ – линейно независимые $\Rightarrow \forall f(x) \in \mathcal{L}(Q) \exists P_n^*(x, f)$

2. $\forall f(x) \in \mathcal{L}_p(Q) \Rightarrow P_n^*(x, f)!$ $\forall f(x) \in C(Q), \left\{ \sum_k a_k \varphi_k(x) \right\}$ – выполнено условие Хаара $\Rightarrow P_n^*(x, f)!$

$\forall P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$ имеет на Q n корней

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}, Q = [a, b], Q = \{x_i, i = \overline{0, N}\}; \{1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx\}, Q = [-\pi, \pi], Q = \{-\pi \leq x_i < \pi, i = \overline{0, N}\}$
 $\{1, x, x^2, \dots, \varphi(x)\}, \varphi^{(n)}(x) > 0, \varphi(x), Q = [a, b], Q = \{x_i, i = \overline{0, N}\}; \{1, \cos x, \dots, \cos nx\}, Q = [0, \pi], Q = \{0 \leq x_i \leq \pi, i = \overline{0, N}\}$

5. $\mathcal{L}(Q)$ – чебышевское подпространство $\Rightarrow \|P_n^*(x, f) - P_n^*(x, \tilde{f})\| \xrightarrow{\|f - \tilde{f}\| \rightarrow 0} 0$ + условие Хаара для $C(Q)$

Увеличение числа независимых переменных усложняет аппарат приближения

1.3.2. Наилучшее среднеквадратическое приближение

$\mathcal{H}(Q) \equiv \mathcal{L}(Q)$ – гильбертово пространство

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = (\varphi, \varphi)^{1/2} \Leftrightarrow (\varphi, \psi) = \begin{cases} \int_a^b \rho(x)\varphi(x)\psi(x)dx & Q = [a, b] \\ \sum_{i=1}^N \rho_i \varphi(x_i)\psi(x_i) & Q = \{x_i, i = \overline{0, N}\} \end{cases}$$

$P_n^*(x, f)$ – наилучшее среднеквадратичное приближение

$$P_n^*(x, f) = \sum_{k=0}^n a_k^* \varphi_k(x) - \nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{H}!$$

$$(P_n^* - f, \varphi_k) = 0, \quad k = \overline{0, n}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k^* (\varphi_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{0, n}$$

$$\leftarrow \min_{\mathbf{a}} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$\Phi \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad \Phi = \{(\varphi_k, \varphi_i)\}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b \rho(x) f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = \overline{0, n}$$

$$i = \overline{0, n}$$

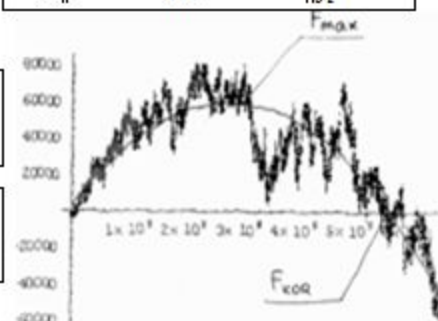
$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^N \rho_i \varphi_k(x_i) \varphi_i(x_i) = \sum_{i=1}^N \rho_i f(x_i) \varphi_i(x_i)$$

$$a_i = \int_a^b \rho(x) f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = \overline{0, n}$$

if $\{\varphi_k(x)\}$

$$a_i = \sum_{i=1}^N \rho_i f(x_i) \varphi_i(x_i), \quad i = \overline{0, n}$$

ортонормированная система



1.3.3. Ортогональные многочлены

$$a_n P_{n+1}(x) = (b_n x - c_n) P_n(x) - d_n P_{n-1}(x)$$

Полином	Обозначения, $n = 0, 1$	Q	$\rho(x)$	a_n	b_n	c_n	d_n	Нормирующий множитель μ_n
Лежандра	$L_n(x): 1, x$	$[-1, 1]$	1	$n+1$	$2n+1$	0	n	$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$
Чебышева I	$T_n(x): 1, x$	$[-1, 1]$	$\sqrt{1-x^2}^{-1}$	1	2	0	1	$\mu_n = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (\mu_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}})$
Чебышева II	$U_n(x): 1, 2x$	$[-1, 1]$	$\sqrt{1-x^2}$	1	2	0	1	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
Ч.- Лагерра	$L_n^\alpha(x): 1, (\alpha+1) - x$	$[0, \infty[$	$x^\alpha e^{-x}$	1	2	0	$2n$	$1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$
Ч. - Эрмита	$H_n(x): 1, 2x$	$]-\infty, \infty[$	e^{-x^2}	1	1	$2n + \alpha + 1$	$n(n + \alpha)$	$(-1)^n \sqrt{n!/\Gamma(\alpha + n + 1)}$
Чебышева	$P_n^N(x): 1, 1 - \frac{2x}{N}$	$x_k = k, k = \overline{0, N}$	1	$\frac{n+1}{2(2n+1)}$	1	$\frac{N-1}{2}$	$\frac{n(N^2 - n^2)}{2(2n+1)}$	$\sqrt{\frac{(2n+1)N(N-1)\dots(N-n+1)}{(N+n+1)(N+n)\dots(N+1)}}$
частная сумма ряда Фурье		$[-l, l]$	1	$\frac{1}{l}, \quad \frac{1}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \frac{1}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}$				
		$x_k = k, k = \overline{0, N}$		$\frac{1}{N}, \quad \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{n\pi x}{l}$				



1.3.4. Метод наименьших квадратов

по значениям
функции

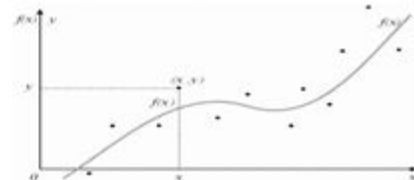
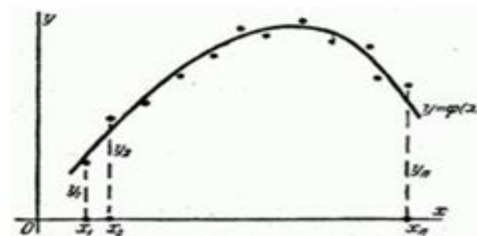
$$x_j, f(x_j), j = \overline{0, N} \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x_j) = f(x_j), j = \overline{0, N} \quad \Phi \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

$N > n$ ($N \gg n$), можно учесть веса ρ_j

– решение системы $\hat{\Phi} \mathbf{a} = \hat{\mathbf{f}}$ с матрицей Гرامа: $\hat{\Phi} = \Phi^T \Phi$, $\hat{\mathbf{f}} = \Phi^T \mathbf{f}$

$$\min_{a_k} \sum_{j=0}^N \left(f(x_j) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x_j) \right)^2 \Rightarrow \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^N \varphi_k(x_j) \varphi_i(x_j) \right) a_k = \sum_{j=0}^N f(x_j) \varphi_i(x_j), i = \overline{0, n}$$

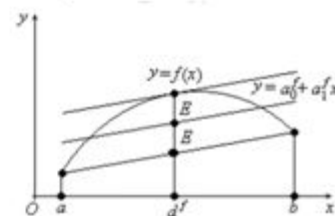
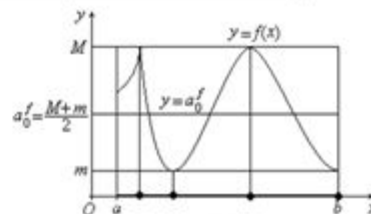
– обобщенное решение несовместной системы $\Phi \mathbf{a} = \mathbf{f}$



1.3.5. Наилучшее равномерное приближение $\mathcal{L}(Q) = C(Q): \inf_{a_k} \max_Q |f - P_n|$

а) метод итерированного веса $\|\varphi\|_C = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\varphi\|_{L_p}$: внешний цикл: $p_k = 2^k, k = 1, 2, \dots$

внутренний цикл:	$\rho_0^{(k)}(x) = [f(x) - P_n^{*(k-1)}]^{p_k - 2}$	на шаге l находится $P_n^{*(k, l+1)}$:	$i = \overline{0, n}$
	$\rho_i^{(k)}(x) = [f(x) - P_n^{*(k, l)}]^{p_k - 2}$	$\sum_{j=0}^n a_j^{(k, l)} \int_a^b \rho_i^{(k)}(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b \rho_i^{(k)}(x) f(x) \varphi_i(x) dx$	



б) простейшие случаи: $Q = [a, b], \varphi_k(x) = x^k, n=0$ и $n=1$ ($f''(x) > 0 \vee f''(x) < 0$)

$$P_0^*(x) = a_0^*: a_0^* = \frac{1}{2} \left[\max_{[a, b]} f(x) + \min_{[a, b]} f(x) \right] \quad P_1^*(x) = a_0^* + a_1^* x: a_1^* = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, a_0^* = \frac{1}{2} \left[\max_{[a, b]} (f(x) - a_1^* x) + \min_{[a, b]} (f(x) - a_1^* x) \right]$$

в) аппроксимация алгебраического полинома (интерполирование по узлам п. Чебышева I) $f(x) = P_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i \Rightarrow P_n^*(x) = P_{n+1}(x) - a_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} T_{n+1} \left(\frac{2x + (a+b)}{b-a} \right)$
МИНИМУМ ОСТАТКА

г) телескопический метод

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i - \text{разложение в ряд Тейлора} \Rightarrow P_N(x) \xrightarrow{\text{е)}} P_{N-1}^*(x) \xrightarrow{\text{е)}} P_{N-2}^*(x) \xrightarrow{\text{е)}} \dots (\|P_{n+1}^* - P_n^*\| < \varepsilon)$$

1.3.6. Паде-аппроксимация

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

разложение в ряд Тейлора

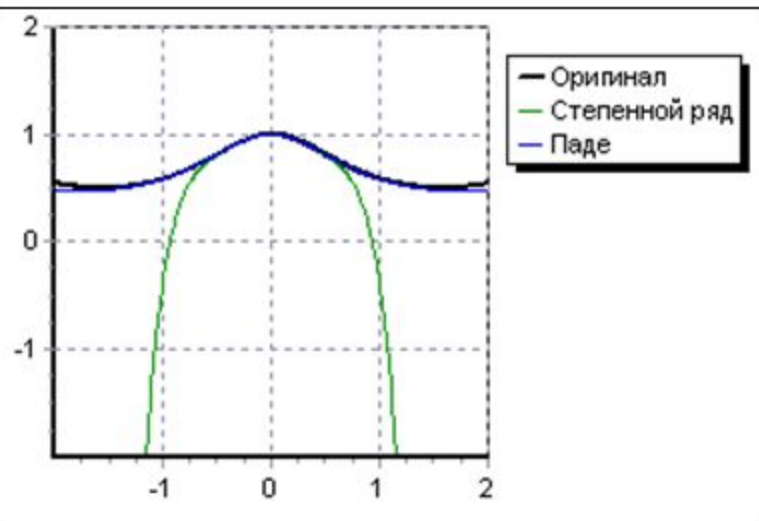
$$[m/n]_f = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

$$\begin{matrix} d_i = c_i, \\ i = 0, m+n \end{matrix} \Rightarrow \sum_{k=0}^m a_k x^k = \sum_{i=0}^{m+n-1} c_i x^i \sum_{j=0}^m b_j x^j$$

$$\begin{matrix} [0,0] & [1,0] & [2,0] & \dots \\ [0,1] & \mapsto & & \\ [0,2] & & & \\ \vdots & & & \end{matrix} \begin{matrix} (c_k = 0, & k < 0) \\ (c_l = 0, & l > n) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_0 = c_0 b_0 \\ a_1 = c_1 b_0 + c_0 b_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} = c_{m-1} b_0 + c_{m-2} b_1 + \dots + c_0 b_{m-1} \\ a_m = c_m b_0 + c_{m-1} b_1 + \dots + c_0 b_m \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \begin{bmatrix} c_{m-n+1} & c_{m-n+2} & \dots & c_{m-1} & c_m \\ c_{m-n+2} & & \ddots & \ddots & c_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{m-1} & & \ddots & & c_{m+n-2} \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+n-2} & c_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ \vdots \\ c_{m+n-1} \\ c_{m+n} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Свойства

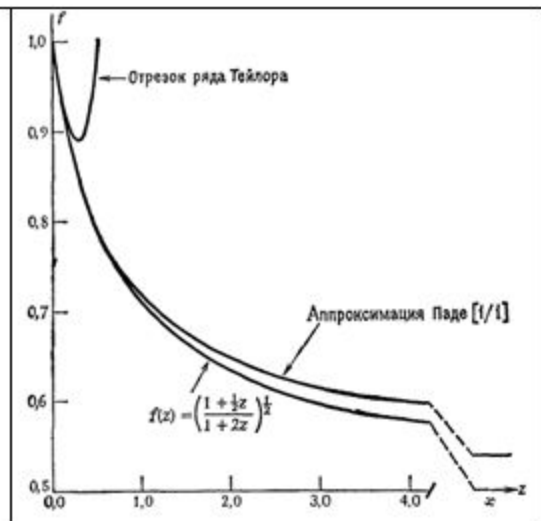
- $[m/n]_f$ – Э и !
- $f(x)$ может иметь полюсы
- $[n+k/n]_f$ – Э достаточные условия сходимости
- Недостаток: $[m/n]_f$ может иметь особенности, отличные от особенностей $f(x) \Rightarrow$ использование $[n/n]_f$
- Эффективность для функций, имеющих полюса на комплексной плоскости в окрестностях точки разложения.



← Пример 1
 $f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$
 $P_6(x)$ – степенной ряд
 $[4/2]_f$ – Паде-аппроксимант

→ Пример 2
 $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 + 2x}}$

Пример 3
 $f(x) = \ln(1+x)$
 расходящийся ряд



1.4. Сплайн-аппроксимация

сплайн состоит из фрагментов функций любого класса

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. *Теория сплайнов и ее приложения*. – М.: Мир, 1972.
2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике*. – М.: Наука, 1976.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн функций*. – М.: Наука, 1980.
4. Де Бор К. *Практическое руководство по сплайнам*. – М.: Радио и связь, 1985.
5. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А. *Сплайны в инженерной геометрии*. – М.: Машиностроение, 1985.
6. Вершинин В.В., Завьялов Ю.С., Павлов Н.Н. *Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания*. – Новосибирск: Наука, 1988.
7. Роджерс Д., Адамс Дж. *Математические основы машинной графики*. – (М.: Машиностроение, 1980) М.: Мир, 2001.

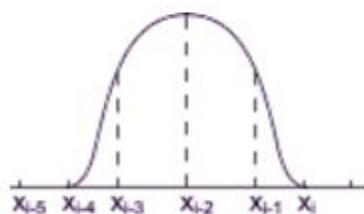


гибкое лекало

1.4.1. Полиномиальные сплайны: определение, формы представления

$S_m(x) \equiv S_m(x, \Delta_n)$ – полиномиальный сплайн степени $\leq m$ $S_m(x) \in \mathcal{P}_m$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ – полином степени $\leq m$
 дефекта k на сетке узлов $\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ $S_m(x) \in C^{m-k}[a, b] \Leftrightarrow S_m^{(l)}(x_i - 0) = S_m^{(l)}(x_i + 0)$, $l = \overline{0, m-k}$, $i = \overline{1, n-1}$

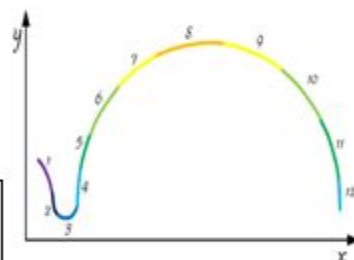
а) Представление сплайна на $[x_{i-1}, x_i]$: $s_i = S_m(x_i)$, $m_i = S'_m(x_i)$, $M_i = S''_m(x_i)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$



$$\varphi_1(\bar{x}) = (1 - \bar{x})^2(1 + 2\bar{x}), \varphi_2(\bar{x}) = \bar{x}^2(3 - 2\bar{x}), \varphi_3(\bar{x}) = \bar{x}(1 - \bar{x})^2, \varphi_4(\bar{x}) = -\bar{x}^2(1 - \bar{x})$$

$$\psi_1(\bar{x}) = 1 - \bar{x}, \psi_2(\bar{x}) = \bar{x}, \psi_3(\bar{x}) = -\bar{x}(1 - \bar{x})(2 - \bar{x}), \psi_4(\bar{x}) = -\bar{x}(1 - \bar{x})(1 + \bar{x})$$

$$S_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} s_i + \frac{x - x_i}{h_i} s_{i+1} \equiv s_i(1 - \bar{x}) + s_{i+1}\bar{x} \equiv s_i\psi_1(\bar{x}) + s_{i+1}\psi_2(\bar{x})$$



$$S_3(x) = s_i\varphi_1(\bar{x}) + s_{i+1}\varphi_2(\bar{x}) + h_i[m_i\varphi_3(\bar{x}) + m_{i+1}\varphi_4(\bar{x})]$$

$$S_3(x) = s_i\psi_1(\bar{x}) + s_{i+1}\psi_2(\bar{x}) + h_i^2/6[M_i\psi_3(\bar{x}) + M_{i+1}\psi_4(\bar{x})]$$

$$S_2(x) = s_i + m_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - t_{i+1})_+^2$$

$$z_+^k = \begin{cases} z^k, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

$$S_2(x) = s_0 + m_0(x - x_0) + 1/2 \sum_{i=0}^n M_i(x_i - t_i)_+^2$$

$\tilde{\Delta}_{n+1}: a = t_0 = x_0 < t_1 < x_1 < t_2 < \dots < t_n < x_n = t_{n+1} = b$, t_i , $i = \overline{0, n+1}$ – узлы сплайна $S_2(x)$ $c_i = \dots$, $d_i = \dots$, $h_i = x_{i+1} - t_{i+1}$

б) Представление B-сплайна

$$N_{i,j}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+j-1} - x_i} N_{i,j-1}(x) + \frac{x_{i+j} - x}{x_{i+j} - x_{i+1}} N_{i+1,j-1}(x)$$

$$S_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i N_{i,m+1}(x)$$

$$N_{i,l}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{if } x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (0/0 = 0)$$

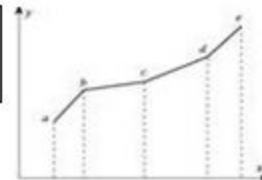
$$\begin{Bmatrix} s_i \\ m_i \\ M_i \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} b_{i-1} \\ b_i \\ b_{i+1} \end{Bmatrix}$$

1.4.2. Интерполяционный линейный сплайн

$$f(x_i) = f_i, i = \overline{0, n} \Rightarrow \underline{s_i = f_i, i = \overline{0, n}}$$

$$S_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} f_i + \frac{x - x_i}{h_i} f_{i+1}, x \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{0, n-1}$$

$$f(x) \in C^r[a, b] \Rightarrow \|R_1\| = \max_{[a, b]} |f(x) - S_1(x)| \leq K_1 h^r \|f^{(r)}\|, K_1 = 1/2, K_2 = 1/8, h = \max_i h_i$$



1.4.3. Интерполяционный квадратический сплайн $S_2^{(l)}(t_i - 0) = S_2^{(l)}(t_i + 0), i = \overline{1, n-1}$ – интерполяционные уравнения

$$\bar{\lambda}_i m_{i-1} + (2 + \bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) m_i + \bar{\mu}_i m_{i+1} = \bar{\lambda}_i \frac{\Delta f_{i-1}}{h_{i-1} - h_{i-1}} + \bar{\mu}_i \frac{\Delta f_i}{h_i}$$

$$\tilde{\lambda}_i M_{i-1} + (1 - \tilde{\lambda}_i - \tilde{\mu}_i) M_i + \tilde{\mu}_i M_{i+1} = 2f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

$$l=2 \quad \bar{\lambda}_i = \frac{h_i(h_{i-1} - h_{i-1})}{h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)}, \bar{\mu}_i = \frac{h_{i-1}h_i}{(h_{i-1} - h_i)(h_{i-1} + h_i)}$$

$$l=1 \quad \tilde{\lambda}_i = \frac{(h_{i-1} - h_{i-1})^2}{h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)}, \tilde{\mu}_i = \frac{h_i^2}{(h_{i-1} + h_i)h_i}$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 3m_i + \mu_i m_{i+1} = 4[\lambda_i f(x_{i-1}, x_i) + \mu_i f(x_i, x_{i+1})]$$

$$h_i = \frac{h_i}{2}, \lambda_i = \frac{h_i}{(h_{i-1} + h_i)}, \mu_i = 1 - \lambda_i$$

$$\mu_i M_{i-1} + 3M_i + \lambda_i M_{i+1} = 8f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

$$h_i = h$$

$$m_{i-1} + 6m_i + m_{i+1} = 8 \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$$M_{i-1} + 6M_i + M_{i+1} = 8 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$b_{i-1} + 6b_i + b_{i+1} = 8f_i, i = \overline{0, n} (l=0)$$

граничные условия

а) периодические	б) заданы первые производные	в) заданы вторые производные	г) пропущенные узлы
$f_j = f_{j+n}, h_j = h_{j+n},$ $h_j = h_{j+n}, j = -1, 0, 1$	$S_2'(x_i) = f'(x_i) = f'_i, j = 0, n$ $2h_i = h_i = h$	$S_2''(x_i) = f''(x_i) = f''_i, j = 0, n$ $2h_i = h_i = h$	$S_2''(t_j - 0) = S_2''(t_j + 0)$ $j = 1, n$
$i = 0, n$ $m_j = m_{j+n}$	$m_0 = f'_0,$ $m_n = f'_n$	$3m_0 + m_1 = 2f(x_0, x_1) - (h/2)f''_0$ $m_{n-1} + 3m_n = 2f(x_{n-1}, x_n) + (h/2)f''_n$	$m_0 + m_1 = 2f(x_0, x_1)$ $m_{n-1} + m_n = 2f(x_{n-1}, x_n)$
$i = 0, n$ $M_j = M_{j+n}$	$M_0 = (2/h)[f'_0 - f(x_0, x_1)]$ $\sum_{i=0}^n M_i(t_{i+1} - t_i) = f'_n - f'_0, m_0 = f'_0$	$M_0 = f''_0, M_n = f''_n$ $m_0 = (h_0/2)f''_0 + f(x_0, x_1)$	$M_0 = M_1, M_n = M_{n-1}$ $m_0 = (h_0/2)M_0 + f(x_0, x_1)$
$b_{-1} = b_0 + b_{n-1} - b_n$ $b_{n+1} = -b_0 + b_1 - b_n$	$b_{-1} = b_1 + (h/2)f'_0$ $b_{n+1} = b_{n-1} + (h/2)f'_n$	$b_{-1} = 2b_0 - b_1 + h^2 f''_0$ $b_{n+1} = 2b_n - b_{n-1} + h^2 f''_n$	$b_{-1} = 3b_0 - 3b_1 + b_2$ $b_{n+1} = 3b_n - 3b_{n-1} + b_{n-2}$

решение трехдиагональных систем (простых, циклических, с окаймлением)

$$f(x) \in C^r[a, b] \Rightarrow \|R_2^{(p)}\| = \|S_2^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)\| \leq K_2^p h^{r-p} \|f^{(r)}\|, K_2^0 = 7/8, K_2^1 = 7/2$$

1.4.4. Интерполяционный кубический сплайн

$S_3^{(i)}(x_i - 0) = S_3^{(i)}(x_i + 0), i = \overline{1, n-1}$ – интерполяционные уравнения

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3[\lambda_i f(x_{i-1}, x_i) + \mu_i f(x_i, x_{i+1})]$$

$$\lambda_i = \frac{h_i}{(h_{i-1} + h_i)}, \mu_i = 1 - \lambda_i$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = 6f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

$$h_i = h$$

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = 6 \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = 6 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$b_{i-1} + 4b_i + b_{i+1} = 6f_i, i = \overline{0, n}$$

граничные условия

а) периодические $f_j = f_{j+n}, h_j = h_{j+n}$	б) заданы первые производные $S_3'(x_i) = f'(x_i) = f'_i, j = 0, n$ $h_i = h$	в) заданы вторые производные $S_3''(x_i) = f''(x_i) = f''_i, j = 0, n$ $h_i = h$	г) пропущенные узлы $S_3''(t_j - 0) = S_3''(t_j + 0), j = 1, n$ $h_i = h$
$i = 0, n$ $m_j = m_{j+n}$	$m_0 = f'_0,$ $m_n = f'_n$	$2m_0 + m_1 = 3f(x_0, x_1) - (h/2)f''_0$ $m_{n-1} + 2m_n = 3f(x_{n-1}, x_n) + (h/2)f''_n$	$m_0 - m_2 = 2[f(x_0, x_1) - f(x_0, x_1)]$ $m_{n-2} - m_n = 2[f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})]$
$i = 0, n$ $M_j = M_{j+n}$	$2M_0 + M_1 = (6/h)[f'_0 - f(x_0, x_1)]$ $M_{n-1} + 2M_n = (6/h)[f'_n - f(x_{n-1}, x_n)]$	$M_0 = f''_0$ $M_n = f''_n$	$M_0 - 2M_1 + M_2 = 0$ $M_{n-2} - 2M_{n-1} + M_n = 0$
$b_{-1} = b_{n-1}$ $b_{n+1} = b_1$	$b_{-1} = b_1 + (h/2)f'_0$ $b_{n+1} = b_{n-1} + (h/2)f'_n$	$b_{-1} = 2b_0 - b_1 + h^2 f''_0$ $b_{n+1} = 2b_n - b_{n-1} + h^2 f''_n$	$b_{-1} = 3b_0 - 3b_1 + b_2$ $b_{n+1} = 3b_n - 3b_{n-1} + b_{n-2}$

решение трехдиагональных систем (простых, циклических, с окаймлием)

⊕

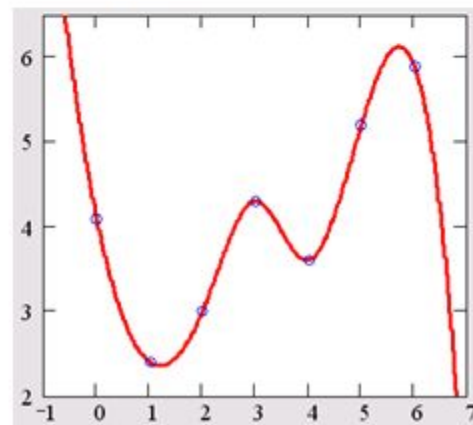
– точность аппроксимации: $f(x) \in C^r[a, b] \quad \|R_3^{(p)}\| = \|S_3^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)\| \leq K_r^p h^{r-p} \|f^{(r)}\|$
 $K_3^0 = 13/48, K_3^1 = 0.8623, K_4^0 = 5/384, K_4^1 = 1/24$

– сходимость:

$f(x) \in C^r[a, b]$
 $S_3^{(p)}(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f^{(p)}(x)$ со скоростью h^{r-p}

– минимальность кривизны: $G(x) = \{g(x) \mid g''(x) \in C[a, b], g(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}\}$

$$\min_{G(x)} \int_a^a |g''(x)|^2 dx = \int_a^a |S_3''(x)|^2 dx$$



□

1.4.5. Локальная (явная) аппроксимация кубическими В-сплайнами $\hat{S}_3(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{b}_i N_{i,4}(x)$, $h_{-2} = h_{-1} = h_0$, $h_{n+1} = h_n = h_{n-1}$

а) по значениям $f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, n}$

$$\hat{b}_i = f_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad \hat{b}_{-1} = \hat{b}_{n+1} = 0 \quad \left\| \hat{S}_3(x) - f(x) \right\| \leq \max_i |\hat{b}_i - b_i| = O(h)$$

б) по значениям $f(x_i) = f_i$, $f'(x_i) = f'_i$, $i = \overline{0, n}$, $f(x) \in C^2[a, b]$

$$\hat{b}_{-1} = f_0 - h_0 f'_0, \quad \hat{b}_0 = f_0, \quad \hat{b}_i = f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} f'_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \hat{b}_n = f_n, \quad \hat{b}_{n+1} = f_n - h_{n-1} f'_n \quad \left\| \hat{S}_3(x) - f(x) \right\| \leq \frac{51}{80} h^2 \|f''\|$$

$$\hat{b}_{-1} = f_0 - h_0 \tilde{f}'_0, \quad \hat{b}_0 = f_0, \quad \hat{b}_i = f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} [\lambda_i f(x_{i-1}, x_i) + \mu_i f(x_i, x_{i+1})], \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \hat{b}_n = f_n, \quad \hat{b}_{n+1} = f_n - h_{n-1} \tilde{f}'_n$$

в) по значениям $f(x_i) = f_i$, $f'(x_i) = f'_i$, $f''(x_i) = f''_i$, $i = \overline{0, n}$, $f(x) \in C^4[a, b]$

$$\hat{b}_{-1} = f_0 - h_0 f'_0 + \frac{h_0^2}{3} f''_0, \quad \hat{b}_i = f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} f'_i - \frac{h_{i-1} h_i}{3} f''_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad \hat{b}_{n+1} = f_n - h_{n-1} f'_n + \frac{h_{n-1}^2}{3} f''_n \quad \left\| \hat{S}_3(x) - f(x) \right\| \leq 0.0408 h^4 \|f^{(4)}\|$$

$$\hat{b}_{-1} = f_0 - h_0 \tilde{f}'_0 + \frac{h_0^2}{3} \tilde{f}''_0, \quad \hat{b}_i = f_i + \frac{1}{3} [h_i \lambda_i f(x_{i-1}, x_i) + h_{i-1} \mu_i f(x_i, x_{i+1})], \quad i = \overline{0, n}, \quad \hat{b}_{n+1} = f_n - h_{n-1} \tilde{f}'_n + \frac{h_{n-1}^2}{3} \tilde{f}''_n$$

1.4.6. Сглаживание и наилучшее приближение сплайнами

а) сглаживание: $\min_{g(x) \in W_2^m} \left\{ \sum_{i=0}^n \rho_i [f_i - g(x_i)]^2 + \rho \int_a^b |g''(x)|^2 dx \right\}$ $W_2^m[a, b] = \{f(x) \mid f(x) \in C^m[a, b], f(x) \in L_2[a, b]\}$

$$- S_1(x) \quad \frac{\rho}{\rho_i h_i} s_{i-1} + \left(1 + \frac{\rho}{\rho_i h_i} + \frac{\rho}{\rho_i h_i} \right) s_i + \frac{\rho}{\rho_i h_{i-1}} s_{i+1} = f_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad s_{-1} = s_0, \quad s_{n+1} = s_n$$

$$- S_3(x) \quad \sum_{j=i-2}^{i+2} \alpha_{ij} M_j = \beta_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad M_{-1} = M_0 = M_{n+1} = M_n = 0, \quad \alpha_{ij} = \dots, \quad \beta_i = \dots \Rightarrow s_i = \dots$$

а) наилучшее среднеквадратичное приближение: $\sum_{j=i-m}^{i+m} \alpha_{ij} b_j = \beta_i, \quad i = \overline{-l, n+l}$

$$- S_1(x) \quad \alpha_{i,i-1} = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \alpha_{i,i} = 2, \quad \alpha_{i,i+1} = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \quad \beta_i = \int_a^b N_{i,2}(x) f(x) dx, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \alpha_{0,-1} = 0, \quad \alpha_{n,n+1} = 0$$

1.4.7. Двумерные полиномиальные сплайны и интерполирование ими

$S_{mn}(x, y) \equiv S_{mn}(x, y, \Delta_M^1, \Delta_N^2)$ – полиномиальный сплайн степени $\leq m$ и $\leq n$ дефекта k на сетке $(\Omega = [a, b] \times [c, d], \omega_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j])$ узлов

$$S_{mn}(x, y) \in \mathcal{P}_{mn}, (x, y) \in \omega_{ij} \quad i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}$$

$$S_{mn}(x, y) \in C^{m-k, n-l}[\Omega]$$

$$\Delta_M^1: a = x_0 < x_1 < \dots < x_M = b, \quad \Delta_N^2: c = y_0 < y_1 < \dots < y_N = d$$

а) Представление через одномерные сплайны: $S_{mn}(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N S_m^i(x) S_n^j(y) s_{ij}, S_m^i(x_k) = \delta_{ik}, S_n^j(y_l) = \delta_{jl}$

б) Представление сплайна на ω_{ij} : $s_{ij} = S_{mn}(x_i, y_j), m_{ij}^{(k,l)} = S_{mn}^{(k,l)}(x_i, y_j), k, l = 0, 1, M_{ij}^{(k,l)} = S_{mn}^{(k,l)}(x_i, y_j), k, l = 0, 2$

$$S_{11}(x, y) = [1 - \bar{x} \quad \bar{x}] \begin{bmatrix} s_{ij} & s_{i,j+1} \\ s_{i+1,j} & s_{i+1,j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \bar{y} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \quad S_{11}(x, y) = s_{ij} + m_{ij}^{(1,0)}(x - x_i) + m_{ij}^{(0,1)}(y - y_j) + m_{ij}^{(1,1)}(x - x_i)(y - y_j)$$

$$S_{33}(x, y) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \varphi_2(\bar{x}) \\ h_i \varphi_3(\bar{x}) \\ h_i \varphi_4(\bar{x}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_{ij} & s_{i,j+1} & m_{ij}^{(1,0)} & m_{i,j+1}^{(1,0)} \\ s_{i+1,j} & s_{i+1,j+1} & m_{i+1,j}^{(1,0)} & m_{i+1,j+1}^{(1,0)} \\ m_{ij}^{(0,1)} & m_{i,j+1}^{(0,1)} & m_{ij}^{(1,1)} & m_{i,j+1}^{(1,1)} \\ m_{i+1,j}^{(0,1)} & m_{i+1,j+1}^{(0,1)} & m_{i+1,j}^{(1,1)} & m_{i+1,j+1}^{(1,1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(\bar{y}) \\ \varphi_2(\bar{y}) \\ d_j \varphi_3(\bar{y}) \\ d_j \varphi_4(\bar{y}) \end{bmatrix} \quad S_{33}(x, y) = \begin{bmatrix} \psi_1(\bar{x}) \\ \psi_2(\bar{x}) \\ \frac{h^2}{6} \psi_3(\bar{x}) \\ \frac{h^2}{6} \psi_4(\bar{x}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_{ij} & s_{i,j+1} & M_{ij}^{(2,0)} & M_{i,j+1}^{(2,0)} \\ s_{i+1,j} & s_{i+1,j+1} & M_{i+1,j}^{(2,0)} & M_{i+1,j+1}^{(2,0)} \\ M_{ij}^{(0,2)} & M_{i,j+1}^{(0,2)} & M_{ij}^{(2,2)} & M_{i,j+1}^{(2,2)} \\ M_{i+1,j}^{(0,2)} & M_{i+1,j+1}^{(0,2)} & M_{i+1,j}^{(2,2)} & M_{i+1,j+1}^{(2,2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(\bar{y}) \\ \psi_2(\bar{y}) \\ \frac{d^2}{6} \psi_3(\bar{y}) \\ \frac{d^2}{6} \psi_4(\bar{y}) \end{bmatrix}$$

в) Представление двумерного В-сплайна $S_{mn}(x, y) = \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{N+1} b_{ij} N_{i,m+1}^1(x) N_{j,n+1}^2(y)$

г) Интерполирование двумерными сплайнами $S_{mn}^{(k,l)}(x_i - 0, y_j) = S_{mn}^{(k,l)}(x_i + 0, y_j), S_{mn}^{(k,l)}(x_i, y_j - 0) = S_{mn}^{(k,l)}(x_i, y_j + 0)$

последовательное одномерное интерполирование:

$$\text{по } x: s_{i,j}, s_{i+1,j} \Rightarrow m_{i,j}^{(1,0)}, m_{i,j+1}^{(1,0)}; \quad \text{по } y: s_{i,j}, s_{i,j+1} \Rightarrow m_{i,j}^{(0,1)}, m_{i+1,j}^{(0,1)}; \quad \text{по } y: m_{i,j}^{(1,0)}, m_{i,j+1}^{(1,0)} \Rightarrow m_{i,j+1}^{(1,1)}, m_{i+1,j+1}^{(1,1)}$$

граничные условия:

$$S_{mn}^{(1,0)}(x_i, y_j) = f_{ij}^{(1,0)}, \quad i = 0, M, j = \overline{0, N}$$

$$S_{mn}^{(2,0)}(x_i, y_j) = f_{ij}^{(2,0)}, \quad i = 0, M, j = \overline{0, N}$$

$$S_{mn}^{(0,1)}(x_i, y_j) = f_{ij}^{(0,1)}, \quad i = \overline{0, M}, j = 0, N$$

$$S_{mn}^{(0,2)}(x_i, y_j) = f_{ij}^{(0,2)}, \quad i = \overline{0, M}, j = 0, N$$

$$S_{mn}^{(1,1)}(x_i, y_j) = f_{ij}^{(1,1)}, \quad i = 0, M, j = 0, N$$

$$S_{mn}^{(2,2)}(x_i, y_j) = f_{ij}^{(2,2)}, \quad i = 0, M, j = 0, N$$

+ интерполирование граничных условий

д) Локальная аппроксимация, сглаживание, ...

Глава 2. Численное дифференцирование

2.1. Дифференцирование интерполяционных формул

$$f(x) = g(x) + R(x), \|R(x)\| < \varepsilon \Rightarrow f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x) + R^{(k)}(x), \|R^{(k)}(x)\| \equiv \|r_k(x)\| - ?$$

2.1.1. Дифференцирование интерполяционной формулы Лагранжа $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)f(x_k)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$, $R_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$

$$P'_n(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_j)(x-x_i)\omega'(x_i)} f(x_i), R'_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta) \frac{\omega'(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta), \quad P''_n(x) = \dots, R''_n(x) = \dots$$

a) в узлах $P'_n(x_k) = \sum_{i \neq k} \frac{\omega'(x_k)f(x_i)}{(x_k-x_i)\omega'(x_i)} + \frac{1}{2} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} f(x_k), \quad P''_n(x_k) = \sum_{i \neq k} \frac{\omega''(x_k)f(x_i)}{(x_k-x_i)\omega'(x_i)} - 2 \sum_{i \neq k} \frac{\omega'(x_k)f(x_i)}{(x_k-x_i)^2 \omega'(x_i)} + \frac{1}{3} \frac{\omega'''(x_k)}{\omega'(x_k)} f(x_k)$

б) $x_i = x_0 + ih$ $P'_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \binom{n}{k}}{hkt} f(x_k) \frac{d}{dt} \left[\frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{t-k} \right], r_{n,1}(x_k) = \frac{(-1)^{n-k} \binom{n}{k}}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\xi)$

в) в узлах $\quad \quad \quad \underline{n=1} \quad \quad \quad \underline{n=2} \quad \quad \quad \underline{n=3}$

$f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} f''_0$ $f'_1 = \frac{f_1 - f_0}{h} + \frac{h}{2} f''_0$ $f'_0 = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + \frac{h}{2} f''_0$	$f'_0 = \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \frac{h^2}{3} f''_0$ $f'_1 = \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2) - \frac{h^2}{6} f''_0$ $f'_2 = \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2) + \frac{h^2}{3} f''_0$ $f''_0 = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} - hf'''_0$ $f''_1 = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} - \frac{h^2}{12} f''''_0$ $f''_2 = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} + hf'''_0$	$f'_0 = \frac{1}{6h}(-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3) - \frac{h^3}{4} f''''_0$ $f'_1 = \frac{1}{6h}(-2f_0 - 3f_1 + 6f_2 - f_3) - \frac{h^3}{12} f''''_0$ $f'_2 = \frac{1}{6h}(f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3) + \frac{h^3}{12} f''''_0$ $f''_0 = \frac{1}{6h^2}(12f_0 - 30f_1 + 24f_2 - 6f_3) + \frac{11h^3}{12} f''''_0$ $f''_1 = \frac{1}{6h^2}(6f_0 - 12f_1 + 6f_2) - \frac{h^3}{12} f''''_0$ $f''_2 = \frac{1}{6h^2}(6f_1 - 12f_2 + 6f_3) - \frac{h^3}{12} f''''_0$
---	---	---

2.1.2. Дифференцирование интерполяционной формулы Ньютона $P_n(x) = f(x_0) + \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})f(x_0, \dots, x_n)$

$$(x-x_i) \equiv \alpha_i, \quad i = \overline{0, n-1} \Rightarrow P'_n(x) = f(x_0, x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-2} + \dots + \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1})f(x_0, \dots, x_n)$$

$$P''_n(x) = 2[f(x_0, x_1, x_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots + (\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-3} + \dots + \alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{n-1})f(x_0, \dots, x_n)]$$

$$x_i = x_0 + ih: \quad P_n(x_0 + th) = f_0 + \frac{t}{1!}\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \Rightarrow$$

$$P'_n(x_0 + th) = \frac{1}{h}(\Delta f_0 + \frac{2t-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!}\Delta^4 f_0 + \dots);$$

$$P''_n(x_0 + th) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_0 + \frac{6t-6}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{12t^2-36t+22}{4!}\Delta^4 f_0 + \frac{20t^3-120t^2+210t-100}{5!}\Delta^5 f_0 + \dots)$$

По Ньютоу в начале таблицы

По Ньютоу в конце таблицы

$$f'_0 = \frac{1}{h}(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\Delta^n f_0)$$

$$f'_0 = \frac{1}{h}(\Delta f_{-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 f_{-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 f_{-3} + \dots + \frac{1}{n}\Delta^n f_{-n})$$

$$f''_0 = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 f_0 + \dots)$$

$$f''_0 = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_{-2} + \Delta^3 f_{-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 f_{-4} + \frac{5}{6}\Delta^5 f_{-5} + \dots)$$

$$f'''_0 = \frac{1}{h^3}(\Delta^3 f_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 f_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 f_0 - \dots)$$

$$f'''_0 = \frac{1}{h^3}(\Delta^3 f_{-3} + \frac{3}{2}\Delta^4 f_{-4} + \frac{7}{4}\Delta^5 f_{-5} + \dots)$$

$$f^{IV}_0 = \frac{1}{h^4}(\Delta^4 f_0 - 2\Delta^5 f_0 + \dots) \quad f^V_0 = \frac{1}{h^5}(\Delta^5 f_0 - \frac{5}{2}\Delta^6 f_0 + \dots)$$

$$f^{IV}_0 = \frac{1}{h^4}(\Delta^4 f_{-4} + 2\Delta^5 f_{-5} + \dots) \quad f^V_0 = \frac{1}{h^5}(\Delta^5 f_{-5} + \frac{5}{2}\Delta^6 f_{-6} + \dots)$$

⊕ По Стирлингу в середине таблицы:

По Бесселю в середине таблицы:

$$f'_0 = \frac{1}{h}(\Delta f_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\Delta^3 f_{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{30}\Delta^5 f_{-\frac{5}{2}} - \dots)$$

$$f'_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}(\Delta f_0 - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{-1} + \frac{3}{640}\Delta^5 f_{-2} - \dots)$$

$$f''_0 = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 f_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^6 f_{-4} - \dots)$$

$$f''_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{24}\Delta^4 f_{-\frac{3}{2}} + \dots)$$

$$f'''_0 = \frac{1}{h^3}(\Delta^3 f_{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}\Delta^5 f_{-\frac{5}{2}} + \dots)$$

$$f'''_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h^3}(\Delta^3 f_{-1} - \frac{1}{8}\Delta^5 f_{-2} + \dots)$$

2.1.3. Оценка остаточного члена

$$\boxed{f(x) \in C^{n+1}[a, b], x_i \in [a, b], i = \overline{0, n}} \Rightarrow \boxed{\forall x \in [c, d] \setminus [a, b] \exists \xi = \xi(x) \in [a, b]:} \quad \boxed{r_{n,k}(x) = \frac{\omega^{(k)}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}$$

теорема Ролля для $F(z) = f(z) - P_n(z) - K\omega(z)$:
 корни $x_i, i = \overline{0, n}$ и $z = x \in [c, d] \setminus [a, b]$ $K = \frac{f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)}{\omega^{(k)}(x)}, K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

2.2. Метод неопределенных коэффициентов

$$f^{(k)}(x_i) = \sum_{i=0}^n c_i f_i + r_{n,k,j}[f], k \text{ и } l - \text{фиксированы}$$

из условия

$$r_{n,k,j}[x^j] = 0 \Rightarrow [x^j]^{(k)} \Big|_{x=x_i} = \sum_{i=0}^n c_i x_i^j \Rightarrow j = \overline{0, n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^n c_i x_i^j = 0 & j = \overline{0, k-1} \\ \sum_{i=0}^n c_i x_i^j = j(j-1)\dots(j-k+1)x_i^{j-k} & j = \overline{k, n} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n=2: & f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \\ x_0, & \\ x_0 \pm h & f''_0 = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \end{aligned}$$

Определитель Вандермонда

2.3. Методы Рунге-Ромберга

2.3.1. Правило Рунге

по известной главной части остатка $z(x) = \zeta(x, h) + h^p \psi(x) + O(h^{p+1})$

$$h \begin{cases} z(x) - h^p \psi(x) = \zeta(x, h) + O(h^{p+1}) \\ z(x) - (rh)^p \psi(x) = \zeta(x, rh) + O(h^{p+1}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{z(x) = \frac{r^p \zeta(x, h) - \zeta(x, rh)}{r^p - 1} + O(h^{p+1})}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{1}{2} f''(x)h + O(h^2), r = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x + \frac{h}{2}) - f(x+h)}{2 \cdot \frac{h}{2}} + O(h^2)$$

2.3.2. Формула Ромберга

по нескольким слагаемым главной части остатка

$$z(x) = \zeta(x, h) + \sum_{j=0}^{k-1} h^{p+j} \psi_j(x) + O(h^{p+k})$$

$$\boxed{z(x) - \sum_{j=0}^{k-1} h_i^{p+j} \psi_j(x) = \zeta(x, h_i) + O(h^{p+k}), i = \overline{0, k}} \quad h = \max_i h_i \Rightarrow \boxed{z(x) = \frac{\Delta_\zeta}{\Delta} + O(h^{p+k})}$$

Определитель типа Вандермонда

2.4. Регуляризация задачи численного дифференцирования

2.4.1. Некорректность задачи численного дифференцирования (иллюстрация на частном примере)

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + r_i \quad r_i = -\frac{h}{2} f''_i - \text{погрешность метода} \Rightarrow |r_i| \leq \frac{M_2 h}{2}, \quad M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

$$\tilde{f}_i = f_i + \delta_i, \quad |\delta_i| \leq \delta - \text{погрешность входных данных}$$

$$\frac{\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + R_i \quad R_i = \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h} - \text{неустраняемая погрешность} \Rightarrow |R_i| \leq \frac{2\delta}{h}$$

$$|r_i| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad |R_i| \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$$

2.4.2. Регуляризация по шагу

а) Частный пример $f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + r_i, \quad r_i = -\frac{h}{2} f''_i, \quad \tilde{f}_i = f_i + \delta_i, \quad |\delta_i| \leq \delta$

$$|R_i| \leq |r_i| \Rightarrow \frac{2\delta}{h} \leq \frac{M_2 h}{2} \Rightarrow \delta \leq \frac{M_2 h^2}{4} = O(h^2) \Rightarrow h \geq h_0 \quad h_0 = 2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}$$

б) Общий случай $f^{(k)}(x) = \frac{1}{h^k} \sum_i C_i(x) f_i + r_k(x), \quad r_k(x) \approx C(x) h^p, \quad |C_i(x)| \leq |C_i|, \quad |C(x)| \leq |C|, \quad \tilde{f}_i = f_i + \delta_i, \quad |\delta_i| \leq \delta$

$$\begin{aligned} & |r_k| \leq |C| h^p \quad R_k = \frac{1}{h^k} \sum_i C_i(x) \delta_i \Rightarrow |R_k| \leq \frac{\delta}{h^k} \sum_i |C_i| \Rightarrow |r_k| + |R_k| \leq |C| h^p + \frac{\delta}{h^k} \sum_i |C_i| \\ & \min_h (|r_k| + |R_k|) \Rightarrow h_0 = \sqrt[p+k]{\frac{k\delta \sum_i |C_i|}{p|C|}} = O\left(\delta^{1/(p+k)}\right) \end{aligned}$$

2.4.3. Дифференцирование сглаженной кривой

Аппроксимация методом наименьших квадратов $\Rightarrow \frac{2\delta}{h}$ – параметр регуляризации

2.5. Дифференцирование сплайнов

См. оценки аппроксимации производных сплайнами

2.6. Вычисление частных производных

$$f(x, y) = g(x, y) + R(x, y), R(x, y) \Rightarrow f^{(k,l)}(x, y) = g^{(k,l)}(x, y) + R^{(k,l)}(x, y), \|R^{(k,l)}(x)\| \equiv \|r_{k,l}(x)\| - ?$$

2.6.1. Дифференцирование интерполяционной формулы Ньютона $\frac{\theta_7 h}{2} f^{(0,3)}(x_i + \theta_5 h, y_j + \theta_6 h)$

$$P_n(x_0 + ph, y_0 + qd) = f_{00} + \frac{1}{1!} [p\Delta^{1+0} f_{00} + q\Delta^{0+1} f_{00}] + \frac{1}{2!} [p(p-1)\Delta^{2+0} f_{00} + 2pq\Delta^{1+1} f_{00} + q(q-1)\Delta^{0+2} f_{00}] + \\ + \frac{1}{3!} [p(p-1)(p-2)\Delta^{3+0} f_{00} + 3p(p-1)q\Delta^{2+1} f_{00} + 3pq(q-1)\Delta^{1+2} f_{00} + q(q-1)(q-2)\Delta^{0+3} f_{00}] + \dots$$

$P_n^{(1,0)}(\dots, \dots) = \frac{1}{h} \left[\Delta^{1+0} f_{00} + (p - \frac{1}{2}) \Delta^{2+0} f_{00} + q \Delta^{1+1} f_{00} + \dots \right]$ $P_n^{(0,1)}(\dots, \dots) = \frac{1}{d} \left[\Delta^{0+1} f_{00} + p \Delta^{1+1} f_{00} + (q - \frac{1}{2}) \Delta^{0+2} f_{00} + \dots \right]$	$P_n^{(2,0)}(\dots, \dots) = \frac{1}{h^2} [\Delta^{2+0} f_{00} + (p-1)\Delta^{3+0} f_{00} + q\Delta^{2+1} f_{00} + \dots]$ $P_n^{(1,1)}(\dots, \dots) = \frac{1}{hd} \left[\Delta^{1+1} f_{00} + (p - \frac{1}{2}) \Delta^{2+1} f_{00} + (q - \frac{1}{2}) \Delta^{1+2} f_{00} + \dots \right]$ $P_n^{(0,2)}(\dots, \dots) = \frac{1}{d^2} [\Delta^{0+2} f_{00} + p\Delta^{1+2} f_{00} + (q-1)\Delta^{0+3} f_{00} + \dots]$
---	---

2.6.2. Последовательное дифференцирование

на примере вычисления $f^{(1,1)}(x, y)$

$f_{i+1,j}^{(0,1)} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j}}{h} - \frac{h}{2} f^{(0,2)}(x_{i+1}, y_j + \theta_2 h)$ $f_{i,j}^{(0,1)} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{h} - \frac{h}{2} f^{(0,2)}(x_i, y_j + \theta_3 h)$	$f_{ij}^{(1,1)} = \frac{f_{i+1,j}^{(0,1)} - f_{i,j}^{(0,1)}}{h} - \frac{h}{2} f^{(2,1)}(x_i + \theta_1 h, y_j) = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} - f_{i,j+1} + f_{i,j}}{h^2} - \\ - \frac{h}{2} f^{(2,1)}(x_i + \theta_1 h, y_j) - \frac{h}{2} f^{(1,2)}(x_i + \theta_1 h, y_j + \theta_4 h)$
---	---

$$f^{(0,2)}(x_{i+1}, y_j + \theta_2 h) - f^{(0,2)}(x_i, y_j + \theta_3 h) = \frac{h}{2} f^{(1,2)}(x_i + \theta_1 h, y_j + \theta_4 h)$$

$f_{i+1,j}^{(0,1)} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j}}{h} - \frac{h}{2} f^{(0,2)}(x_{i+1}, y_j + \theta_2 h)$ $f_{i,j}^{(0,1)} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{h} + \frac{h}{2} f^{(0,2)}(x_i, y_j - \theta_3 h)$	$f_{ij}^{(1,1)} = \frac{f_{i+1,j}^{(0,1)} - f_{i,j}^{(0,1)}}{h} - \frac{h}{2} f^{(2,1)}(x_i + \theta_1 h, y_j) = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} - f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h^2} - \frac{f_{ij}^{(0,2)}}{h} - \\ - \frac{h}{2} f^{(2,1)}(x_i + \theta_1 h, y_j) - \frac{h}{2} f^{(1,2)}(x_i + \theta_1 h, y_j + \theta_4 h) - \frac{\theta_7 h}{2} f^{(0,3)}(x_i + \theta_5 h, y_j + \theta_6 h)$
---	---

$$f^{(0,2)}(x_{i+1}, y_j + \theta_2 h) + f^{(0,2)}(x_i, y_j - \theta_3 h) = \frac{f^{(0,2)}(x_i, y_j)}{h} + \frac{h}{2} f^{(1,2)}(x_i + \theta_1 h, y_j + \theta_4 h) + \frac{(\theta_2 - \theta_3)h}{2} f^{(0,3)}(x_i + \theta_5 h, y_j + \theta_6 h)$$

Глава 3. Численное интегрирование

$$\int_{\Omega} \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n[f]$$

квадратурная формула: $\Omega \subset R$

$$A_k^{(n)}, x_k^{(n)} \in R$$

$R_n[f] - ?$

коэффициенты и узлы

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n C_k^{(n)} f(\mathbf{x}_k^{(n)}) + R_n[f]$$

кубатурная формула: $\Omega \subset R^s$

$$C_k^{(n)}, x_k^{(n)} \in R^s$$

3.1. Интерполяционные квадратурные формулы

$$f(x) = g_n(x) + R_n(x, f) \Rightarrow \int_{\Omega} \rho(x)f(x)dx = \int_{\Omega} \rho(x)g_n(x)dx + \int_{\Omega} \rho(x)R_n(x, f)dx$$

3.1.1. Интерполяционная квадратурная формула

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k \Phi_k(x) + R_n(x, f) \Rightarrow \int_{\Omega} \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Omega} \rho(x)\Phi_k(x)dx \right) f(x_k) + \int_{\Omega} \rho(x)R_n(x, f)dx$$

а) алгебраическое интерполирование

$$\Phi_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}, \quad \omega(x) = \prod_{j=1}^n (x-x_j), \quad \omega'(x_k) = \prod_{j \neq k} (x_k - x_j)$$

$$\int_{\Omega} \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Omega} \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx \right) f(x_k) + \int_{\Omega} \rho(x) \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) dx \quad A_k = \int_{\Omega} \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx$$

3.1.2. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы

$$\Omega = [a, b]$$

Теорема $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ – интерполяционная квадратурная формула $\Leftrightarrow R_n[f] = 0$, if $f(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$

$$\Rightarrow A_k = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx, f(x) \in \mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k) \Rightarrow \int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx \right) f(x_k) + 0$$

$$\Leftrightarrow R_n[f] = 0, \text{ if } f(x) \in \mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow f(x) = \Phi_j(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)} \Rightarrow \int_a^b \rho(x)\Phi_j(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k \Phi_j(x_k) = A_j$$

⊕

m – алгебраическая степень точности кв. формулы $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$: $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ – интерполяционная кв. формула с n узлами

$$\text{if } R_n[x^k] = 0, k = \overline{0, m} \text{ и } \exists f(x) \in \mathcal{P}_{m+1}: R_n[f] \neq 0$$

$$\Rightarrow m \geq n-1$$

□

3.1.3. Построение алгебраических интерполяционных квадратурных формул заданы $[a, b]$, $\rho(x)$, n , x_k , $k = \overline{1, n}$

а) по определению

$$A_k = \int_{\Omega} \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx, \quad k = \overline{1, n}$$

б) из условия точности

$$\mu_i = \int_a^b \rho(x)x^i dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^i, \quad 0 = \overline{1, n-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n A_k x_k^i = \mu_i, \quad 0 = \overline{1, n-1} \quad \sum_{k=1}^n A_k = \mu_0/n$$

3.1.4. Квадратурные формулы прямоугольников $\rho(x) = 1$ $n = 1$, $x_1 = c \Rightarrow A_1 = \int_a^b dx = b - a$

а) формула левого прямоугольника $c = a$, $f(x) = f(a) + (x-a)f'(\xi_1)$, $a \leq \xi_1 \leq x$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + R_0[f], \text{ if } f(x) \in C^1[a, b] \Rightarrow R_0[f] = \int_a^b (x-a)f'(\xi_1)dx = \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_a^b f'(\xi_1) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi_1)$$

б) формула левого прямоугольника $c = b$, $f(x) = f(b) + (x-b)f'(\xi_2)$, $x \leq \xi_2 \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) + R_1[f], \text{ if } f(x) \in C^1[a, b] \Rightarrow R_1[f] = \int_a^b (x-b)f'(\xi_2)dx = \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_a^b f'(\xi_2) = -\frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi_2)$$

в) формула среднего прямоугольника $c = \frac{a+b}{2}$, $f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + (x-\frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2 f''(\xi_3)$, $a \leq \xi_3 \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + R_{1/2}[f], \text{ if } f(x) \in C^2[a, b] \Rightarrow R_{1/2}[f] = \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f''(\xi_3)dx = \frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{2} \Big|_a^b f''(\xi_3) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi_3)$$

3.1.5. Большие (общие) формулы прямоугольников n – число разбиений $[a, b]$: $h = \frac{b-a}{n}$ $x_k = a + kh$, $k = \overline{0, n}$

а) формула левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + R_{n,0}[f]$$

$$R_{n,0}[f] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^2}{2} f'(\zeta_{k,1}) = \frac{nh^2}{2} f'(\eta_1)$$

$$|R_{n,0}[f]| \leq \frac{b-a}{2} M_1 h \quad M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$$

б) формула левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) + R_{n,1}[f]$$

$$R_{n,1}[f] = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^2}{2} f'(\zeta_{k,2}) = -\frac{nh^2}{2} f'(\eta_2)$$

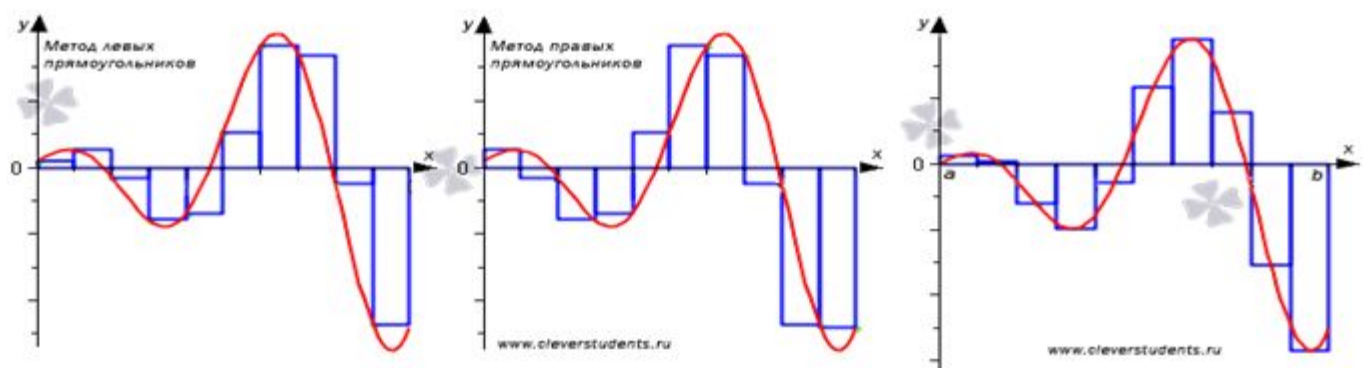
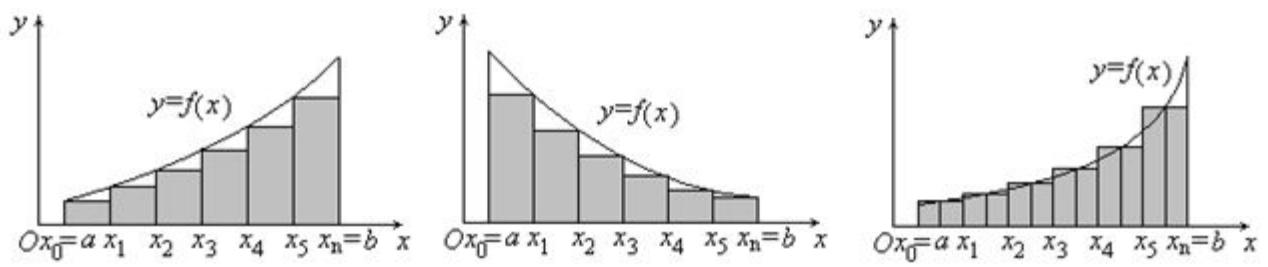
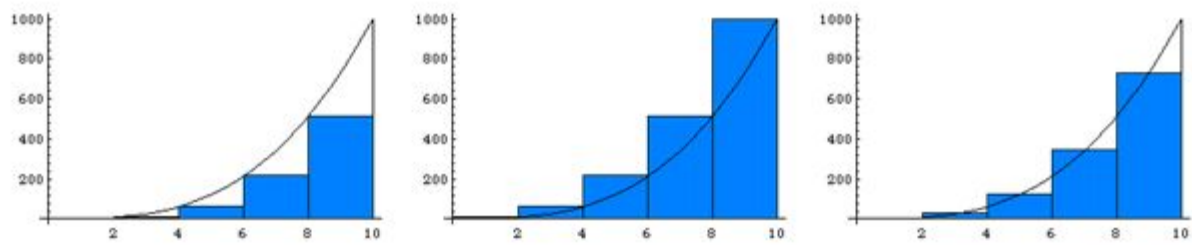
$$|R_{n,1}[f]| \leq \frac{b-a}{2} M_1 h \quad M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$$

в) формула средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + \frac{h}{2}) + R_{n,1/2}[f]$$

$$R_{n,1/2}[f] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^3}{24} f''(\zeta_{k,3}) = \frac{nh^3}{24} f''(\eta_3)$$

$$|R_{n,1/2}[f]| \leq \frac{b-a}{24} M_2 h^2 \quad M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$$



3.1.6. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса n – число разбиений $[a, b]$: $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$, $k = \overline{0, n}$

$$f(x) = P_n(x_0 + th) + R_n(x, f), \quad P_n(x_0 + th) = \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{k!(n-k)!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{t-k} f(x_k), \quad R_n(x, f) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

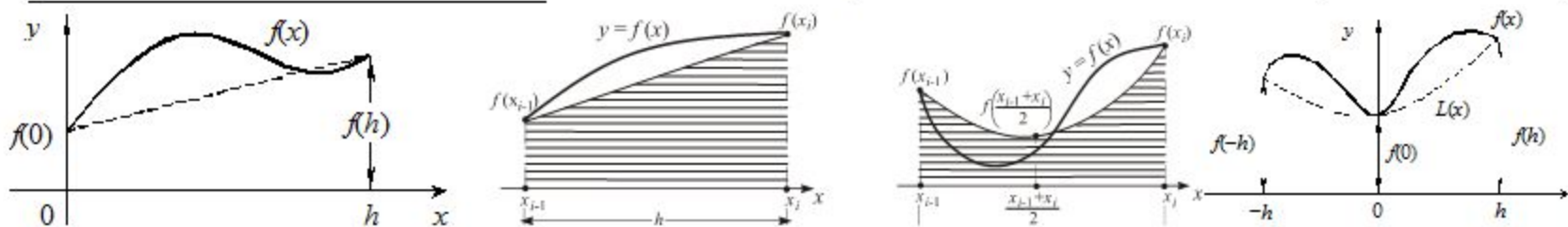
$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^{(n)} f(x_k) + R_n[f], \quad B_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)! n} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{t-k} dt, \quad R_n[f] = h \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) dt$$

а) формула трапеции $n=1, h=b-a, B_0=B_1=\frac{1}{2}$ if $f(x) \in C^2[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + R_1[f] \Rightarrow R_1[f] = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi_1) dx = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi_1)$$

б) формула Симпсона $n=2, h=\frac{b-a}{2}, B_0=B_3=\frac{1}{8}, B_1=B_2=\frac{3}{8}$ if $f(x) \in C^4[a, b]$ с учетом $f'(\frac{a+b}{2})$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2 \cdot 3} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] + R_2[f] \Rightarrow R_2[f] = \int_a^b \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{4!} f^{(4)}(\xi_2) dx = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_2)$$



б) формула Ньютона ($\frac{3}{8}$ -я) $n=3, h=\frac{b-a}{3}, B_0=B_2=\frac{1}{6}, B_1=B_3=\frac{4}{6}$ if $f(x) \in C^4[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} [f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)] + R_3[f] \Rightarrow R_3[f] = \int_a^b \frac{\omega(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_2) dx = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi_3)$$

г) формула Уэддл $n=6, h=\frac{b-a}{6}, B_0=B_2=B_4=B_6=\frac{1}{20}, B_1=B_5=\frac{5}{20}, B_3=\frac{6}{20}$ if $f(x) \in C^8[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{20} [f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6] \Rightarrow |R_6[f]| \geq \frac{(b-a)^5}{39191040 \cdot 6} \left(M_5 + \frac{(b-a)^2}{40 \cdot 6} M_8 \right)$$

3.1.7. Большие (общие) формулы Ньютона-Котеса n – число разбиений $[a, b]: h = \frac{b-a}{n}, x_k = a + kh, k = \overline{0, n}$

а) формула трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n)$$

$$|R_{n,1}[f]| \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2$$

б) формула Симпсона (парабол)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{i=1}^m f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + f_{2m} \right)$$

$$|R_{n,2}[f]| \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4$$

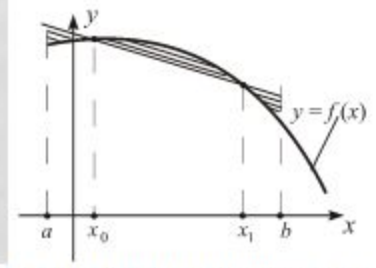
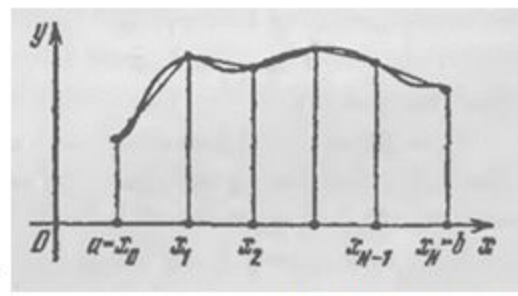
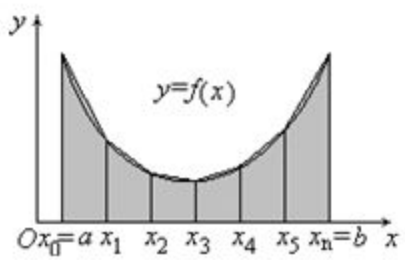
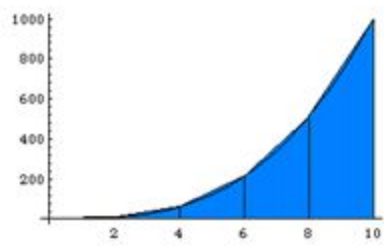
$n=2m$

в) формула Ньютона ($\frac{3}{8}$ - x_3)

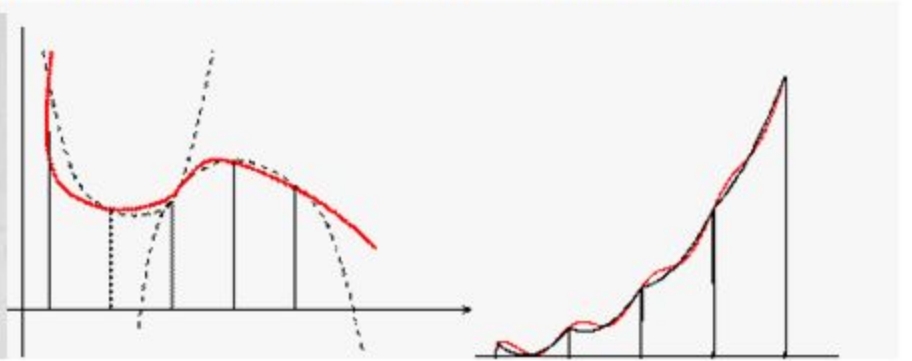
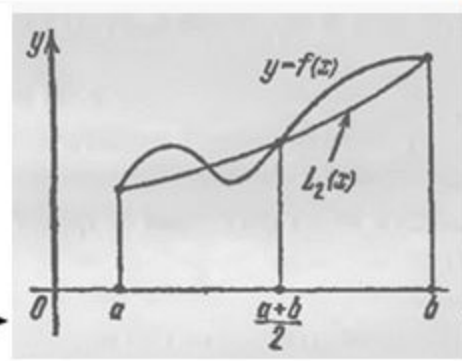
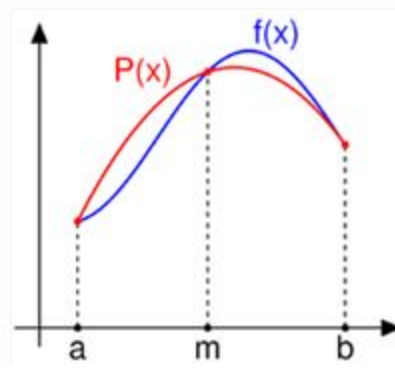
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left(f_0 + 3 \sum_{i=1}^m (f_{3i-2} + f_{3i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f_{3i} + f_{3m} \right)$$

$$|R_{n,2}[f]| \leq \frac{b-a}{80} M_4 h^4$$

$n=3m$



Основной принцип квадратурных формул Гаусса: необходимо так разместить точки x_0 и x_1 внутри отрезка $[a, b]$, чтобы площади "треугольников" в сумме были равны площади "сегмента".



3.1.8. Квадратурные формулы типа Гаусса $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ – интерполяционная кв. формула с n узлами: $m \geq n-1$

заданы $[a, b]$, $\rho(x)$, n , x_k – ?, $k = \overline{1, n} \Rightarrow m = (n-1) + n$

Теорема $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k), R_n[f] = 0, \forall f(x) \in \mathcal{P}_{2n-1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ – интерполяционная, $\omega(x) \perp q(x), \omega(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j), \forall q(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), R_n[f] = 0, \forall f(x) \in \mathcal{P}_{2n-1} \Rightarrow$ интерполяционность $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ следует из Теоремы п. 3.1.2

$$q(x) \in \mathcal{P}_{n-1}, f(x) = \omega(x)q(x) \in \mathcal{P}_{2n-1} \Rightarrow \int_a^b \rho(x)\omega(x)q(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega(x_k)q(x_k) = 0, \text{ т.е. } \omega(x) \perp q(x)$$

$\Leftrightarrow \omega(x) \perp q(x), \forall q(x) \in \mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{P}_{2n-1}, f(x) = \omega(x)q(x) + r(x), r(x) \in \mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)\omega(x)q(x)dx + \int_a^b \rho(x)r(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \Rightarrow R_n[f] = 0 \quad (R_n[r] = 0)$$

Существование (конструктивно) $\int_a^b \rho(x)\omega(x)x^k dx = 0, k = \overline{0, n-1}, \omega(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \Rightarrow \int_a^b \rho(x) \left[x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right] x^k dx = 0 \Rightarrow$

$$\exists \mu_j = \int_a^b \rho(x)x^j dx < \infty \quad j = \overline{0, 2n-1} \quad \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mu_{i+k} = -\mu_{n+k}, k = \overline{0, n-1}} \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mu_{i+k} \right] = 0 \Rightarrow \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right]^2 dx = 0 \Rightarrow \forall a_i = 0$$

3.1.9. Свойства квадратурных формул типа Гаусса

1. $\forall x_i \in [a, b] \subset R$ – простые корни: $\omega(x)q(x) \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b \rho(x)\omega(x)q(x)dx \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$, но if $l < n \int_a^b \rho(x)\omega(x)q(x)dx = 0 \Rightarrow \underline{l = n}$

$\tilde{x}_i \in [a, b], i = \overline{1, l}$ нечетной кратности, $q(x) = \prod_{i=1}^l (x - \tilde{x}_i), \omega(x)q(x) \in \mathcal{P}_{n+l}$ имеет корни $\tilde{x}_i \in [a, b]$ четной кратности \uparrow

2. $m = 2n-1$ $f(x) = \omega^2(x), \deg f = 2n \Rightarrow \int_a^b \rho(x)\omega^2(x)dx > 0$, но $\sum_{k=1}^n A_k \omega^2(x_k) = 0$

3. $A_k > 0$ $f(x) = \left[\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} \right]^2 \in \mathcal{P}_{2n-2} \Rightarrow \int_a^b \rho(x) \left[\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} \right]^2 dx = A_i > 0$

4. $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b \rho(x)f(x)dx$$

(по теореме Вейерштрассе)

3.1.10. Частные виды квадратурных формул типа Гаусса

а) Классические квадратурные формулы

+

Q	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$[0, \infty[$	$] -\infty, \infty[$	
$\rho(x)$	1	с весовой функцией Якоби $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$			$x^\alpha e^{-x}$	e^{-x^2}	
$\omega(x)$	$L_n(x)$	$T_n(x)$	$U_n(x)$		$L_n^\alpha(x)$	$H_n(x)$	
квадратурная формула	Гаусса	Чебышева-Мелера			$\alpha=0.5$	Чебышева-Лагерра	Чебышева-Эрмита
$n=2$	$x_{0,1} = \pm .57735027$ $A_{0,1} = 1$	$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$ $A_k = \frac{\pi}{n}$	$x_k = \cos \frac{k}{n} \pi$ $A_k = \frac{\pi}{n+1}$	$x_k = \cos \frac{2k}{2n+1} \pi$ $A_k = \frac{4\pi}{2n+1}$	$n=1$	$x_0 = 1.5$ $A_0 = .88662692$	$x_0 = 0.0$ $A_0 = 1.77245385$
$n=3$	$x_{0,2} = \pm .7745966692$ $A_{0,2} = 5/9$ $x_1 = 0$ $A_1 = 8/9$				$n=2$	$x_0 = .91886117$ $A_0 = .72336302$ $x_1 = 4.0811388$ $A_1 = .16286390$	$x_{0,1} = \pm .70710678$ $A_{0,1} = 0.88622692$
$n=4$	$x_{0,3} = \pm .8611363116$ $A_{0,3} = 0.34785485$ $x_{1,2} = \pm .3399810436$ $A_{1,2} = 0.6521451549$				$n=3$	$x_0 = .66632591$ $A_0 = .56718628$ $x_1 = 2.8007750$ $A_1 = .30537111$ $x_2 = 7.0328990$ $A_2 = .01366888$	$x_1 = 0.0$ $A_1 = 1.18163590$ $x_{0,2} = \pm 1.22474487$ $A_{0,2} = .29540898$
$n=5$	$x_{0,4} = \pm .9061798459$ $A_{0,4} = 0.2869268851$ $x_{1,3} = \pm .5384693101$ $A_{1,3} = 0.4786286705$ $x_2 = 0$ $A_2 = 0.568888899$				$n=4$		$x_{0,3} = \pm .52464762$ $A_{0,3} = 0.80491409$ $x_{1,2} = \pm 1.65068012$ $A_{1,2} = 0.08131284$

б) Замена переменных для других интервалов $[a, b]$

в) Сведение других интегралов к «классическим»

$$\int_0^R r^k F(r) dr = \left| r = R \frac{1-x}{2} \right| = \left(\frac{R}{2} \right)^{k+1} \int_{-1}^1 (1-x)^k f(x) dx$$

3.1.11. Формула прямоугольников для вычисления интегралов от периодических функций

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n[f], \quad f(x) = f(x + 2\pi) \Rightarrow f(x) \approx T_n(x) = a_k + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

тригонометрическая
степень точности $m < n$

$$f(x) = \prod_{k=0}^n \sin^2\left(\frac{x-x_k}{2}\right) \quad \int_0^{2\pi} f(x) dx > 0 \quad \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = 0 \quad \sin^2\left(\frac{x-x_k}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos x_k \cos x - \sin x_k \sin x)$$

Теорема

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\alpha + \frac{2\pi k}{n}\right) \quad \alpha \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right] \quad \boxed{m = n-1}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ilx} dx = \frac{1}{il} e^{ilx} \Big|_0^{2\pi} = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\alpha + \frac{2\pi k}{n}\right)} = e^{i\alpha} \sum_{k=1}^n e^{i\frac{2\pi k}{n}} = \frac{1 - e^{i\frac{2\pi n}{n}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0, \text{ if } l \leq n-1$$

3.1.12. Квадратурные формулы типа Маркова (Лобатто)

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^l B_j f(\alpha_j) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_{n+l}[f]$$

заданы $[a, b]$, $\rho(x)$, l , α_j , $j = \overline{1, l}$, n , x_k , $k = \overline{1, n} \Rightarrow m = (l+n-1) + n$

Теорема

$$R_{n+l}[f] = 0, \quad \forall f(x) \in \mathcal{P}_{2n+l-1} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^l B_j f(\alpha_j) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \text{ — интерполяционная; } \omega(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$$

(доказывается аналогично Теореме п. 3.1.10) $\forall q(x) \in \mathcal{P}_{n-1}: \omega(x) \perp q(x)$ с весом $\tilde{\rho}(x) = \rho(x)\sigma(x)$, $\sigma(x) = \prod_{j=1}^l (x - \alpha_j)$

$$B_j = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega(x)\sigma(x)}{(x-x_j)\omega(x_j)\sigma'(x_j)} dx, \quad j = \overline{1, l}, \quad A_k = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega(x)\sigma(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)\sigma(x_k)} dx, \quad k = \overline{1, n} \quad \int_a^b \rho(x) \frac{\omega^2(x)\sigma(x)}{(2n+l)!} f^{(2n+l)}(\xi) dx$$

Частные виды и построение $\tilde{\rho}(x) > 0 (< 0) \Rightarrow$

+

$j=1$ $\alpha_1 = a \vee \alpha_1 = b$
$j=2$ $\alpha_1 = a, \alpha_2 = b$

$\sum_{i=0}^{n-1} a_i (\mu_{i+k+1} - \alpha_1 \mu_{i+k}) = -(\mu_{n+k+1} - \alpha_1 \mu_{n+k})$	$k = \overline{0, n-1}$
$\sum_{i=0}^{n-1} a_i (\mu_{i+k+2} - (\alpha_1 + \alpha_2) \mu_{i+k+1} + \alpha_1 \alpha_2 \mu_{i+k}) = -(\mu_{n+k+2} - (\alpha_1 + \alpha_2) \mu_{n+k+1} + \alpha_1 \alpha_2 \mu_{n+k})$	

1) $[0, 1], \rho(x) = 1$
2) $[0, \infty[, \rho(x) = x^\alpha e^{-x}$
3) $[-1, 1], \rho(x) = 1$

□

3.1.13. Квадратурные формулы типа Чебышева $\int_a^b \rho(x)f(x)dx = C \sum_{k=1}^n f(x_k) + R_n[f]: C, x_k - ?, k = \overline{1, n} \Rightarrow \underline{m = n}$

$$R_n[x^l] = 0, l = \overline{0, n}$$

$$\Rightarrow \mu_l \equiv \int_a^b \rho(x)x^l dx = C \sum_{k=1}^n x_k^l, l = \overline{0, n}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\mu_0}{n}$$

$$\sum_{k=1}^n x_k^l = \frac{n\mu_l}{\mu_0}, l = \overline{1, n}$$

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j) = x^n - p_1 x^{n-1} - \dots - p_{n-1} x - p_n$$

$$p_1 = s_1, kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \dots - p_{k-1} s_1, k = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftarrow s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k = \frac{n\mu_k}{\mu_0}$$

Частные примеры

- 1) $[-1, 1], \rho(x) = 1 \quad C = \frac{2}{n}, n = \overline{1, 7}$ и $n = 9$ ($n = 8, n \geq 10: x_k \in C$)
 2) $[-1, 1], \rho(x) = \sqrt{(1-x^2)^{-1}} \quad C = \frac{\pi}{n}, x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, k = 1, 2, \dots, n$
 3) $[0, \infty[, \rho(x) = e^{-x} \quad C = \frac{1}{n}, n = 1, 2$ ($n \geq 3 x_k \in C$)
 4) $]-\infty, \infty[, \rho(x) = e^{-x^2} \quad n = 1, 2, 3$ ($n \geq 4 x_k \in C$)

3.1.14. Повышение точности квадратурных формул $R_n[f] = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{n!} f^{(n)}(\xi) dx \quad R_n[f] = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) dx$

1) Улучшение гладкости (для несобственных интегралов)

2) Выделение главной части остаточного члена

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^x f^{(m)}(t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt = \left| \begin{array}{l} 1 \quad x > t \\ \frac{1}{2} \quad x = t \\ 0 \quad x < t \end{array} \right| = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt$$

$$R[f] = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \dots = \int_a^b f^{(m)}(t) K_n(t) dt \quad K_n(t) = \frac{\int_a^b \rho(x) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dx - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!}}{\int_a^b \rho(x) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dx}$$

$$C_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b K(t) dt, K(t) = C_0 + [K(t) - C_0] \Rightarrow R[f] = C_0 \int_a^b f^{(m)}(t) dt + \int_a^b f^{(m)}(t) [K(t) - C_0] dt = C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + R_1[f]$$

$$R_1[f] = \int_a^b f^{(m+1)}(t) L_1(t) dt, L_1(t) = \int_a^t f^{(m+1)}(t) [K(t) - C_0] dt$$

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \dots + C_{s-1} [f^{(m+s-2)}(b) - f^{(m+s-2)}(a)] + R_s[f]$$

$$C_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_k(t) dt, L_{k+1}(t) = \int_a^t f^{(m+1)}(t) [L_k(x) - C_k] dx, R_s[f] = \int_a^b f^{(m+s)}(t) L_s(t) dt$$

3.1.15. Квадратурные формулы типа Эйлера

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \sum_{l=1}^s C_{l-1} [f^{(m+l-2)}(b) - f^{(m+l-2)}(a)]$$

а) формула Эйлера-Маклорена

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \sum_{l=1}^s \frac{(b-a)^{2l}}{(2l)!} B_{2l} [f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)] + R_{2s}[f], \quad R_{2s}[f] = \frac{(b-a)^{2s}}{(2s)!} \int_a^b f^{(2s)}(t) L_{2s} \left(\frac{b-t}{b-a} \right) dt,$$

б) большая формула Эйлера-Маклорена

B_{2l} - числа Бернулли

$$\int_a^b f(x) dx = T_n - \frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] + \frac{h^4}{720} [f'''(b) - f'''(a)] - \frac{h^6}{30240} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] + R_6[f]$$

в) формула Грегори $f'_0 \approx, f''_0 \approx, \dots, f'_n \approx, f''_n \approx, \dots$

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n - \frac{h}{12} [\Delta f_{n-1} - \Delta f_0] - \frac{h}{24} [\Delta^2 f_{n-2} - \Delta^2 f_0] - \frac{19h}{720} [\Delta^3 f_{n-3} - \Delta^3 f_0] - \frac{3h}{160} [\Delta^4 f_{n-4} - \Delta^4 f_0] - \frac{863h}{60480} [\Delta^6 f_{n-6} - \Delta^6 f_0]$$

г) для большой формулы Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx = V_n - \frac{h^4}{180} [f'''(b) - f'''(a)] - \frac{h^6}{30240} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] + R_6[f]$$

д) для формулы Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{1}{(2n+1)!} \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 [f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(-1)]$$

3.1.16. Сплайн-интерполяционные квадратурные формулы

$$f(x) = S_m(x) + R(x, f) \Rightarrow \int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) S_m(x) dx + \int_a^b \rho(x) R(x, f) dx$$

а) $m = 1$ - формула трапеций

б) $m = 3$ - интерполирование кубическим сплайном

на равномерной сетке узлов с заданием граничных условий $f'_0 \approx$ и $f'_n \approx$ дает формулу Грегори

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n - \frac{h}{12} [\Delta f_{n-1} - \Delta f_0] - \frac{h}{24} [\Delta^2 f_{n-2} - \Delta^2 f_0] - \frac{19h}{720} [\Delta^3 f_{n-3} - \Delta^3 f_0] - \frac{3h}{160} [\Delta^4 f_{n-4} - \Delta^4 f_0] - \frac{863h}{60480} [\Delta^6 f_{n-6} - \Delta^6 f_0]$$

3.1.17. Вычисление неопределенных интегралов

$$y(x) = y(a) + \int_a^x \rho(t) f(t) dt \Rightarrow y_k \approx y(x_k), \quad x_k = a + kh, \quad k = \overline{0, n}$$

а) для таблично заданной функции $f(t)$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \rho(t) f(t) dt \approx y(x_k) + \sum_1^k A_i f(x_i)$$

$$y(x_1) = y(x_0) + h \left[f_{1/2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 f_0 - \frac{19}{720} \Delta^4 f_0 + \frac{1}{160} \Delta^5 f_0 - \dots \right]$$

$$y(x_2) = y(x_1) + h \left[f_{3/2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{1/2} + \frac{11}{720} \Delta^4 f_0 - \frac{11}{1440} \Delta^5 f_0 + \frac{271}{60480} \Delta^6 f_0 - \dots \right]$$

$$y(x_3) = y(x_2) + h \left[f_{5/2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{3/2} + \frac{11}{720} \Delta^4 f_{1/2} - \frac{119}{60480} \Delta^6 f_0 + \frac{191}{120960} \Delta^7 f_0 - \dots \right]$$

$$k = \overline{3, n-4} \quad y(x_{k+1}) = y(x_k) + h \left[f_{k+1/2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{k-1/2} + \frac{11}{720} \Delta^4 f_{k-3/2} - \frac{119}{60480} \Delta^6 f_{k-5/2} + \frac{191}{120960} \Delta^8 f_{k-7/2} - \dots \right]$$

$$y(x_{n-2}) = y(x_{n-3}) + h \left[f_{n-5/2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{n-7/2} + \frac{11}{720} \Delta^4 f_{n-9/2} - \frac{119}{60480} \Delta^6 f_{n-6} + \frac{191}{120960} \Delta^7 f_{n-7} - \dots \right]$$

$$y(x_{n-1}) = y(x_{n-2}) + h \left[f_{n-3/2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{n-5/2} + \frac{11}{720} \Delta^4 f_{n-4} - \frac{11}{1440} \Delta^5 f_{n-5} + \frac{271}{60480} \Delta^6 f_{n-6} - \dots \right]$$

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + h \left[f_{n-1/2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{n-2} + \frac{1}{24} \Delta^3 f_{n-3} - \frac{19}{720} \Delta^4 f_{n-4} + \frac{1}{160} \Delta^5 f_{n-5} - \dots \right]$$

б) для аналитически заданной функции $f(t)$ $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \rho(t) f(t) dt \approx \sum_{i=0}^p A_i f(\alpha + u_i h) + \sum_{j=0}^q B_j f(\beta + v_j h) + \dots + \sum_{k=0}^r C_k f(\gamma + w_k h)$

кв. формула наивысшей алгебраической степени точности с узлами $x_k \leq \alpha < \beta < \dots < \gamma \leq x_{k+1}$ и сходственными с ними узлами

$$m = 1, \quad \alpha = x_k + \frac{h}{2} \quad y(x_{k+1}) = y(x_k) + h \left[f(\alpha) + \frac{1}{24} \Delta^2 f(\alpha - h) - \frac{17}{5760} \Delta^4 f(\alpha - 2h) + \frac{367}{697680} \Delta^6 f(\alpha - 3h) - \dots \right]$$

$$\alpha = x_k + \delta h, \quad \delta = .233338$$

$$\beta = x_k + (1 - \delta)h$$

$$m = 2 \quad y(x_{k+1}) = y(x_k) + h [a_0 (f(\alpha) + f(\beta)) + a_1 (f(\alpha + h) + f(\beta - h)) + a_2 (f(\alpha - h) + f(\beta + h)) + \dots]$$

$$a_0 = .4869023179 \quad \text{по два}$$

$$a_1 = .0130976821 \quad \text{сходств. узла}$$

в) использование предшествующих значений искомой заданной функции

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{r+s} A_i y_{k+1-i} + h \sum_{j=1}^s B_j f_{k+1-j} + h \sum_{l=1}^t B_{ij} f(\xi_{ij}) + R_{krst}$$

$$A_i, B_j, C_i, \xi_{kl}$$

$$r + 2s + 2l - 2 - \text{алгебраическая степень точности}$$

$$r = 0, s = 1$$

$$r = 1, s = 1 - \text{формула Маркова с } t = 1 \text{ узлом}$$

$$r = 0, s = 2$$

3.2. Вычисление интегралов от осциллирующих и быстрорастущих функций и несобственных интегралов

$$R_n[f] = \int_{\Omega} \rho(x) \frac{\omega(x)}{n!} f^{(n)}(\xi) dx$$

3.2.1. Вычисление интегралов от осциллирующих функций $f(x) \sim \cos(\omega x), \sin(\omega x), e^{i\omega x}$

а) интерполяционные квадратурные формулы с весом $\rho(x) \sim \cos(\omega x), \sin(\omega x), e^{i\omega x}$

– квадратурные формулы Филона $h = \frac{b-a}{n} \quad x_k = a + kh, \quad k = \overline{0, n}$



аналоги формул трапеций, Сипсона и 3/8-х для $\rho(x) = \cos(\omega x)$ и $\rho(x) = \sin(\omega x)$

– квадратурные формулы с кратными узлами

– квадратурные формулы с кратными узлами наивысшей алгебр. ст. точности

б) многократное интегрирование по частям

$$\int_0^1 f(x) \sin(2\pi N x) dx = \frac{1}{2\pi N} f(x) \cos(2\pi N x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x) \cos(2\pi N x) dx = \dots = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^{i+1}}{(2\pi N)^{2i-1}} [f^{(2i)}(1) - f^{(2i)}(0)] + \frac{(-1)^k}{(2\pi N)^{2k}} \int_0^1 f^{(2k)}(x) \sin(2\pi N x) dx$$

3.2.2. Вычисление интегралов от быстрорастущих функций

а) интерполяционные квадратурные формулы с быстрорастущим весом $\rho(x)$

б) использование нелинейного интерполирования

Пример $f(x) \approx e^x, \quad \eta = \ln(y), \quad g(x) = e^{\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \ln f_{i+1} + \frac{x_i-x}{x_{i+1}-x_i} \ln f_i} = f_i \left(\frac{f_{i+1}}{f_i}\right)^{\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{f_{i+1} - f_i}{\ln(f_{i+1}/f_i)}$

3.2.3. Вычисление несобственных интегралов I рода $\int_a^{\infty} f(x) dx$

а) замена на определенный интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx, \quad \left| \int_b^{\infty} f(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

б) сведение к квадратурной формуле типа Гаусса

Пример $Ei(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(x+t)}}{x+t} dt = e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$

в) замена переменных и сведение к несобственному интегралу II рода

г) использование нелинейного интерполирования

3.2.4. Вычисление несобственных интегралов II рода $\int_a^b f(x)dx, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \infty, c \in [a, b]$

а) удаление особой точки $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx, \left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx \right| \leq \varepsilon$

б) мультипликативный способ $f(x) = \rho(x)\varphi(x), \varphi(x) \in C^p[a, b]$ и ограничена, $\rho(x)$ – весовая функция или сведение к квадратурной формуле типа Гаусса с особенностью в точке c

б) мультипликативный способ $f(x) = \varphi(x) + \psi(x), \varphi(x)$ не имеет особенности, $\int_a^b \psi(x)dx$ вычисляется точно

Пример $f(x) = (x-c)^\alpha \theta(x), \alpha > -1 \Rightarrow \psi(x) = (x-c)^\alpha [\theta(c) + (x-c)\theta'(c) + \dots + \frac{(x-c)^k}{k!} \theta^{(k)}(c)]$

$$\varphi(x) = (x-c)^\alpha [\theta(x) - \theta(c) - (x-c)\theta'(c) - \dots - \frac{(x-c)^k}{k!} \theta^{(k)}(c)]$$

3.3. Вычисление кратных интегралов

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n C_k^{(n)} f(\mathbf{x}_k^{(n)}) + R_n[f], \Omega \subset R^2$$

3.3.1. Интерполяционные кубатурные формулы

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n f_k \Phi_k(\mathbf{x}) + R_n(\mathbf{x}; f) \Rightarrow \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \Phi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)}_{C_k} f(\mathbf{x}_k) + \underbrace{\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) R_n(\mathbf{x}; f) d\mathbf{x}}_{R_n[f]}$$

а) метод неопределенных коэффициентов алгебраической степени m для $\Omega \subset R^2$

$(x_k, y_k), k = \overline{1, n}, n = \frac{m(m+1)}{2}, f(x, y) \approx P_m(x, y): R_n[x^i y^j] = 0, 0 \leq i + j \leq m$

$$\iint_{\Omega} \rho(x, y) x^i y^j dx dy = \sum_{k=1}^n C_k x_k^i y_k^j, 0 \leq i + j \leq m$$

б) алгебраическое интерполирование для $\Omega \subset R^2: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) a \leq y \leq \varphi_2(x), x_i, y_{ij}, j = \overline{1, m_i}, i = \overline{1, n}$

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \approx \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} f(x_i, y_{ij}) \quad a_i = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} dx, b_{ij} = \int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} \frac{\tilde{\omega}_i(y)}{(y-y_{ij})\tilde{\omega}_i'(y_{ij})} dy, \omega(x) = \prod_{j=1}^n (x-x_j), \tilde{\omega}_i(y) = \prod_{j=1}^{m_i} (y-y_{ij})$$

в частности, $\Omega = [a, b] \times [c, d], x_i, i = \overline{1, n}, y_j, j = \overline{1, m} \Rightarrow \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \approx \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m b_j f(x_i, y_j) \quad b_j = \int_c^d \frac{\tilde{\omega}(y)}{(y-y_j)\tilde{\omega}'(y_j)} dy$

3.3.2. Интерполяционные кубатурные формулы для симметричных областей интегрирования $\Omega \subset R^s$

Симметричные узлы: $(0,0,\dots,0)$ с коэффициентом a_0

$$\nabla^2 f = \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \nabla^{2k+2} f = \nabla^2 (\nabla^{2k} f)$$

u_i определяет $2s$ узлов вида $(\pm u_i, 0, \dots, 0)$ с коэффициентами a_i

$$D^4 f = \sum_{i=1}^s \sum_{j=i}^s \frac{\partial^4 f}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}$$

v_i определяет $2s(s-1)$ узлов вида $(\pm v_i, \pm v_i, 0, \dots, 0)$ с коэффициентами b_i

w_i определяет $\frac{4s(s-1)(s-2)}{3}$ узлов вида $(\pm w_i, \pm w_i, \pm w_i, 0, \dots, 0)$ с коэффициентами c_i

s	№	Координаты узла	Коэффициенты	n	m	Гл. часть остатка	s	№	Координаты узла	Коэффициенты	n	m	Гл. часть остатка
s-мерный куб с вершинами $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$							s-мерный шар радиуса 1 с центром $(0, 0, \dots, 0)$						
2	1	$u_1 = .8164965809$	$a_1 = 1$	4	3		2	1	$v_1 = 1/\sqrt{2}$	$a_1 = \pi/4$	4	3	
	2	$v_1 = 1/\sqrt{3}$	$b_1 = 1$	4	3			2	$v_1 = .5$	$b_1 = \pi/4$	4	3	
	3	$u_1 = 1$	$a_0 = 4/3$ $a_1 = 2/3$	5	3	$\frac{1}{45}(\nabla^4 f - 7D^4 f)$		3	$u_1 = 1/\sqrt{2}$ $v_1 = 1/\sqrt{2}$	$a_0 = a_1 = \pi/6$ $b_1 = \pi/24$	9	5	
	4	$u_1 = 1$ $v_1 = 1$	$a_1 = 4/3$ $b_1 = -1/3$	8	3	$\frac{1}{45}(\nabla^4 f + 8D^4 f)$		4	$u_1 = 1$ $v_1 = 1/2$	$a_0 = a_1 = \pi/6$ $b_1 = \pi/24$	9	5	
	5	$u_1 = 7/15$ $v_1 = \sqrt{7/9}$	$a_1 = 40/49$ $b_1 = 9/49$	8	5	$\frac{1}{\dots}(\nabla^6 f + 8D^4 f)$		1	$u_1 = .7745966692$	$a_1 = 2\pi/9$	6	3	
3	1	$u_1 = 1$	$a_1 = 4/3$	6	3		3	2	$u_1 = .6822591268$ $w_1 = .6082048823$	$a_1 = .55236118$ $c_1 = .10932789$	14	5	
	2	$w_1 = 1/\sqrt{3}$	$c_1 = 1$	8	3			3	$u_1 = 1.238758444$ $w_1 = .4189765704$	$a_1 = .508246097$ $c_1 = .485480318$	14	5	
	3	$u_1 = .7958224258$ $w_1 = .75878691$	$a_1 = .88642659$ $c_1 = .33518006$	14	5								
n	1	$u_1 = \sqrt{n/3}$	$a_1 = 2^{n-1}/n$	$2n$	3		n	1	$u_1 = \sqrt{n/3}$	$a_1 = 2^{n-1}/n$	$2n$	3	
s-мерный симплекс с вершинами $(0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$													
2	1	$(1/6, 1/6), (1/6, 4/6), (4/6, 1/6)$	$1/6$	3	2		3	1	$(1/4, 1/4, 1/4)$ $(1/6, 1/6, 1/6), (1/6, 1/6, 3/6),$ $(1/6, 3/6, 1/6), (3/6, 1/6, 1/6)$	$-16/120$ $9/120$	5	3	
	2	$(1/3, 1/3), (1/5, 1/5), (1/5, 3/5), (3/5, 1/5)$	$-27/96$ $25/96$	4	3								

3.3.3. Последовательное интегрирование (на примере $\Omega \subset R^2$)

а) по области $\Omega = [a, b] \times [c, d]$

общий подход
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \equiv \int_a^b F(x) dx, F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x_i) + R_1[\varphi], \int_c^d \psi(y) dy = \sum_{j=1}^m B_j \psi(y_j) + R_2[\psi]$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i) + R_1[F] = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{j=1}^m B_j f(x_i, y_j) + R_1[F] + \sum_{i=1}^n A_i R_2[f(x_i, y)]$$

СИМПСОН \times СИМПСОН

(Гайсс \times Гайсс)

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \frac{(b-a)(d-c)}{36} \left\{ f(a, c) + f(b, c) + f(a, d) + f(b, d) + 4 \left[f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right] + 16 f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right\} + R$$

$$R = -\frac{(b-a)^5(d-c)}{2^6 45} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\zeta_1, \eta_1) - \frac{(b-a)(d-c)^5}{2^6 45} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\zeta_2, \eta_2) + \frac{(b-a)^5(d-c)^5}{2^{12} 45^2} \frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}(\zeta_3, \eta_3)$$

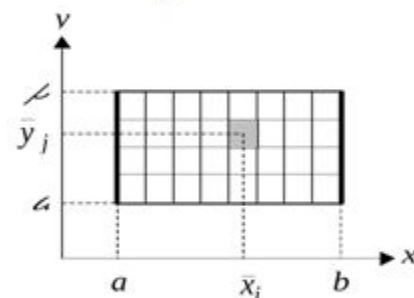
БОЛЬШОЙ СИМПСОН \times БОЛЬШОЙ СИМПСОН

$$h = \frac{b-a}{2n}, x_i = a + ih, i = \overline{0, 2n};$$

$$l = \frac{d-c}{2m}, y_j = a + jl, j = \overline{0, 2m}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & \dots & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & \dots & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & \dots & 8 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4 & 16 & 8 & \dots & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & \dots & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx \frac{hl}{9} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} c_{ij} f_{ij}$$



б) по области $\Omega: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \equiv \int_a^b F(x) dx, F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

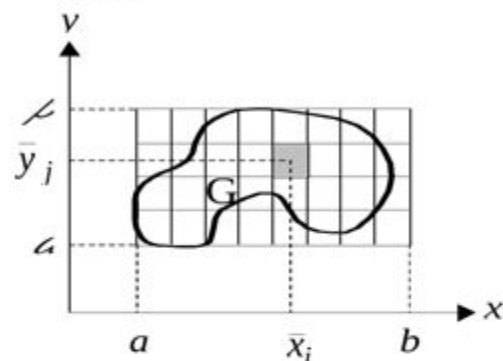
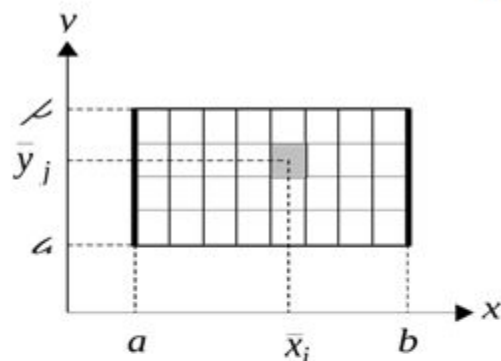
ТРИВИАЛЬНЫЙ ПОДХОД
$$\int_a^b F(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i F(x_i), \int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i, y) dy \approx \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i, y_j)$$

с учетом вида области
$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \rho(x) \Phi(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i \Phi(x_i), \Phi(x) = \frac{F(x)}{\rho(x)}, \int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i, y) dy \approx \sum_{j=1}^m B_j f(x_i, y_j)$$

$$\rho(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \Rightarrow \alpha, \beta: \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \approx (x-a)^\alpha (b-x)^\beta$$

3.3.4. Метод ячеек (на примере $\Omega \subset \mathbb{R}^2$)

Аналог формулы средних прямоугольников $\iint_{ac}^{bd} f(x, y) dx dy \approx hl \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + O(h^2 + l^2)$



3.3.5. Способы перенесения правил интегрирования на другие области

Известна кубатурная формула $\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{k=1}^n C_k f(\mathbf{x}_k)$ по области $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^r$

$$\boxed{J: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2} \Rightarrow \mathbf{y} = J\mathbf{x}, d\mathbf{y} = |J|d\mathbf{x}, \tilde{\rho}(\mathbf{y}) = \rho(\mathbf{x}), g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \Rightarrow \boxed{\int_{\Omega_2} \rho(\mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \approx \sum_{k=1}^n D_k g(\mathbf{y}_k)} \quad D_k = |J|C_k, \mathbf{y}_k = J\mathbf{x}_k$$

3.4. Стохастический подход к вычислению интегралов большой кратности

Ограничим функцию прямоугольником (n -мерным параллелепипедом в случае многих измерений), площадь (объем) которого S_{par} можно легко вычислить.

«Набросаем» в этот прямоугольник (параллелепипед) некоторое количество точек (N штук), координаты которых будем выбирать случайным образом.

Определим число точек (K штук), которые попадут под график функции.

Площадь области, ограниченной функцией и осями координат, S даётся выражением $S = S_{par} \frac{K}{N}$

