

Простейшие уравнения

Тип 1. Линейные, квадратные, кубические уравнения

Решите уравнение $(2x+7)^2 = (2x-1)^2$.

Решение.

Выполним преобразования, используя формулы $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$:

$$(2x+7)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 28x + 49 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 32x = -48 \Leftrightarrow x = -1,5.$$

Тип 2. Рациональные уравнения

Решите уравнение $\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение.

Заметим, что числители дробей равны. Имеем:

$$\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x+8=0; \\ 5x+7=7x+5, 7x+5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8; \\ x=1. \end{cases}$$

Тип 3. Иррациональные уравнения

Решите уравнение $\sqrt{6+5x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{6+5x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 6+5x = x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = 6, \end{cases} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Уравнение имеет единственный корень, он и является ответом.

Тип 4. Показательные уравнения

Решите уравнение $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$.

Решение.

Перейдем к одному основанию степени:

$$2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x} \Leftrightarrow \frac{2^{3+x}}{5^{3+x}} = 0,4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = \left(\frac{2}{5}\right)^1 \Leftrightarrow 3+x = 1 \Leftrightarrow x = -2.$$

Тип 5. Логарифмические уравнения

Решите уравнение $\log_{x-5} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Решение.

На ОДЗ перейдем к уравнению на основание логарифма:

$$\log_{x-5} 49 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 = 49, \\ x-5 > 0, \\ x-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = \pm 7, \\ x-5 > 0, \\ x-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x-5 = 7 \Leftrightarrow x = 12.$$

Итак, на ОДЗ уравнение имеет только один корень.

Тип 6. Тригонометрические уравнения

Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow x = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z}.$$

Значению $k = 0$ соответствует $x = -1$. Положительным значениям параметра соответствуют положительные значения корней, отрицательным значениям параметра соответствуют меньшие значения корней. Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -1 .