

4. LOGICA ȘI CALCULUL PROPOZIȚIONAL

Țicău Vitalie,
Lector superior universitar

Studiul logicii

Logica poate fi definită ca știință a evaluării argumentelor (raționamentelor).

Un **argument** în logică, este un șir de enunțuri (sau judecăți) în care ultimul enunț numit **concluzie**, rezultă din celelalte enunțuri, numite **premise**.

Exemplu (de argument). Socrate este om. Toți oamenii sunt muritori. Deci Socrate este muritor.

Exemplu (de argument). Zăpada este albă. Alb este adjectiv. Deci zăpada este adjectiv.

Astfel, argumentele (raționamentele) pot fi **adevărate** sau **false** (**valide** sau **nevalide**, **corecte** sau **incorecte** ...).

Logica oferă cadrul teoretic pentru a evalua corectitudinea argumentelor.

Logica formală

În literatura de specialitate deseori este utilizată sinonimul “*logica formală*”.

Logica este o știință formală întrucât se face abstracție de conținutul raționamentelor; acestea sânt cercetate în general.

Exemplu. x este y . y este z . Deci x este z .

Dacă acest argument este adevărat, este adevărat și argumentul cu Socrate.

Propoziții

Se numește **propoziție** un enunț al limbajului natural sau al unui limbaj simbolic despre care se poate spune că este adevărat sau fals.

- “"Sărmanul Dionis" este o carte scrisă de Mircea Eliade”;
- “Zăpada este albă”;
- “ $3 < 7$ ”.
- Exprimările care nu sunt propoziții includ adesea întrebări și comenzi – acestea nu pot fi adevărate sau false, deși pot fi inteligibile sau absurde. “Stinge lumina.”;
- “Tu ești Mircea?”;
- “Ești catolic?”;
- “ $x := 2$ ” (Limbajul Pascal).

Valoare de adevăr a unei propoziții

Este foarte important a observa că fiecare propoziție este adevărată sau falsă în raport cu o lume posibilă (sau universul discursului).

De exemplu propoziția “*orice ființă vie nu poate exista mult timp fără apă*” este adevărată în lumea noastră; cine știe cum stau lucrurile în alte sisteme solare.

Sau, de exemplu, afirmația “*printr-un punct la o dreaptă putem duce doar o singură paralelă*” este adevărată doar în geometria lui Euclid, dar nu și în geometriile Bolyai-Lobacevski și Riemann.

Valorile de adevăr le vom nota prin “1” pentru adevăr și “0” pentru fals.

Simbolul “:” imediat după simbolul unei propoziții va fi utilizat cu sens de a explica care este conținutul propoziției.

Conectori / operatori logici: Negația

Negația: Posibile simboluri: *non p*, $\square p$, $\sim p$. În Pascal este operatorul “*NOT*”. În C++ și Java este operatorul “!”.

p	$\neg p$
0	1
1	0

Conectori / operatori logici:

Conjunția. Disjuncția

Conjunția: Posibile simboluri: p AND q , $p \& q$. În Pascal este operatorul “AND”. În C++ și Java este operatorul “&&”. $p \wedge q$:

Disjuncția: Posibile simboluri: p OR q , $p + q$. În Pascal este operatorul “OR”. În C++ și Java este operatorul “||”. $p \vee q$:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Conectori / operatori logici: Echivalența. Disjuncția exclusivă

Echivalența: În Pascal este operatorul “=”. În C++ și Java este operatorul “==”.

Disjuncția exclusivă: Este negația echivalenței. În Pascal: “XOR”. În Java: “^”. În C++ “^” este disjuncția exclusivă la nivel de bit.

P	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Conectorul lui Pierce Conectorul lui Sheffer.

Implicația

Conectorul lui Pierce: este negația disjuncției.
Simboluri: $p \text{ NOR } q$.

Conectorul lui Sheffer: Este negația conjuncției.
Simboluri: “ \uparrow ”, $p \text{ NAND } q$.

Implicația: $p \rightarrow q$: “Dacă p atunci q ”. Analogie: $p \rightarrow q$ este adevărată dacă numai dacă $p \leq q$.

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implicația

Implicația este mai puțin intuitivă decât ceilalți conectori logici. Să considerăm două calculatoare, *A* și *B*, izolate de Internet și de orice rețea locală. Ele sânt conectate doar între ele. Se știe că dacă *A* devine infectat de viruși de calculator atunci în scurt timp și *B* va fi infectat.

p	q			$p \rightarrow q$
0	0	A nu este infectat	B nu este infectat	Adevărat
0	1	A nu este infectat	B este infectat	Adevărat
1	0	A este infectat	B nu este infectat	Fals
1	1	A este infectat	B este infectat	Adevărat

Condiții suficiente și necesare

Implicația ($p \rightarrow q$) constă din *premisă* și *concluzie*.

Concluzia se mai numește **condiție necesară** pentru ipoteză.

Ipoteza la rândul său se numește **condiție suficientă** pentru concluzie.

Ele sunt legate în felul următor:

- Dacă nu se îndeplinește condiția necesară atunci nu-i ipoteza;
- Dacă este ipoteza atunci este concluzia.

Exemplu. Din expresia “Nu-i fum fără foc” reiese că fumul este o condiție necesară pentru foc.

Și de aici reiese că “Dacă este foc atunci este fum”.

Conectori logici în cadrul limbajului natural

Limbaj natural	Conector logic	Expresia logică
non p; nu p, p este fals	negația	$\neg p$ sau $\neg p$
p și q; simultan	conjunție	$p \wedge q$
p sau q, fie p fie q	disjunție	$p \vee q$
p dacă și numai dacă q; necesar și suficient	echivalentă	$p \leftrightarrow q$
p implică q; dacă p, atunci q	implicație	$p \rightarrow q$
p este necesar pentru q	implicație	$q \rightarrow p$

Ierarhia conectorilor logici. Lista conectorilor logici în ordinea descreșterii priorității: \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow .

Negație corectă (absolută)

- ▣ **Negație corectă:** X nu este tânăr și frumos.
- ▣ **Negație incorectă:** X este bătrân și urât.

Aplicații ale conectorilor logici

- Filtrarea rezultatelor căutărilor (Google, MS Access, SQL etc.);
 - Expresii logice în algoritmi.

Formule propoziționale. Tautologii

Orice propoziție obținută din alte propoziții prin intermediul conectorilor logici se numește **formulă propozițională**.

Ramura logicii care se ocupă cu formule propoziționale, operațiile cu ele etc. se numește “**logica propozițiilor**” sau “**calculul propozițional**”.

O **tautologie** este o expresie care întotdeauna este adevărată. De exemplu, $p \vee \neg p$ sau $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$.

Notatii. $p \Leftrightarrow q$ înseamnă că $p \leftrightarrow q$ este o tautologie; $p \Rightarrow q$ înseamnă că $p \rightarrow q$ este o tautologie

p	q	$\neg p$	$p \vee \neg p$		p	q	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
0	0	1	1		0	0	1	0	1
0	1	1	1		0	1	1	0	1
1	0	0	1		1	0	0	0	1
1	1	0	1		1	1	0	0	1

Identități remarcabile

□ Comutativitatea:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p; \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

□ Asociativitatea:

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

□ Distributivitatea:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

□ Regulile lui De Morgan:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

□ Absorbția:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

□ Idempotența:

$$p \wedge p \equiv p \quad p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge 0 \equiv 0 \quad p \vee 0 \equiv p$$

$$p \wedge 1 \equiv p \quad p \vee 1 \equiv 1$$

Probleme logice

Un număr impar de negații se reduce la o singură negație.

Respectiv întreaga expresie “Aurel ... ” se reduce la “*nu colonizării altor planete în viitoarea sută de ani*”. Adică Aurel este împotriva colonizării altor planete în viitoarea sută de ani.

Problemă (logică): Două auditorii

Într-o școală nouă, în fiecare dintre două auditorii libere poate să se afle “*Laboratorul de Fizică*” sau “*Cabinetul de Informatică*”. Pe ușile auditoriilor a fost instalată câte o plăcuță glumeață: pe prima ușă, plăcuța cu inscripția “*Cel puțin în una din aceste două auditorii este plasat Cabinetul de Informatică*”; pe a doua ușă, “*Laboratorul de Fizică se află în alt auditoriu*”. Între timp, apare o inspecție din exterior, care cunoaște doar că inscripțiile de pe plăcuțe sunt sau ambele adevărate, sau ambele false. Vă propunem să-l ajutați pe inspector să găsească, pe cale logică, unde este “*Cabinetul de Informatică*”.

Probleme logice

Rezolvarea problemei logice “Două auditorii”

p : “În primul auditoriu se află Cabinetul de Informatică”;

q : “În al doilea auditoriu se află Cabinetul de Informatică”;

$\neg p$: “În primul auditoriu se află Laboratorul de Fizică”;

$\neg q$: “În al doilea auditoriu se află Laboratorul de Fizică”.

Afirmației de pe plăcuța unui auditoriu (primului) îi corespunde expresia logică: $p \vee q$.

Afirmației de pe plăcuța celuilalt (al doilea) îi corespunde expresia logică: $\neg p$.

Faptul că inscripțiile de pe plăcuțe sunt sau ambele adevărate, sau ambele false înseamnă că: $p \vee q \leftrightarrow \neg p$.

Probleme logice

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$p \vee q \leftrightarrow \neg p$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

Unicul caz când echivalența este adevărată este atunci când p este 0 și $q = 1$.

Astfel, în primul auditoriu se află Laboratorul de Fizică, iar în al doilea auditoriu se află Cabinetul de Informatică.