4. LOGICA ȘI CALCULUL PROPOZIȚIONAL

Ţîcău Vitalie,
Lector superior universitar

Studiul logicii

Logica poate fi definită ca știință a evaluării argumentelor(raționamentelor).

Un ***argument*** în logică, este un șir de enunțuri (sau judecăți) în care ultimul enunț numit ***concluzie***, rezultă din celelalte enunțuri,numite ***premize***.

<u>Exemplu</u> (de argument). Socrate este om. Toți oamenii sunt muritori. Deci Socrate este muritor.

<u>Exemplu</u> (de argument). Zăpada este albă. Alb este adjectiv. Deci zăpada este adjectiv.

Astfel, argumentele (raționamentele) pot fi ***adevărate*** sau ***false***(***valide*** sau ***nevalide***, ***corecte*** sau ***incorecte*** ...).

Logica oferă cadrul teoretic pentru a evalua corectitudinea argumentelor.

Logica formală

În literatura de specialitate deseori este utilizează sinonimul “*logica formală*”.

Logica este o știință formală întrucât se face abstracție de conținutul raţionamentelor; acestea sânt cercetate în general.

<u>Exemplu</u>. *x* este *y*. *y* este *z*. Deci *x* este *z*.

Dacă acest argument este adevărat, este adevărat și argumentul cu Socrate.

Propoziții

Se numește ***propoziție*** un enunț al limbajului natural sau al unui limbaj simbolic despre care se poate spune că este adevărat sau fals.

- “"Sărmanul Dionis" este o carte scrisă de Mircea Eliade”;
- “Zăpada este albă”;
- “3 <7”.
- Exprimările care nu sunt propoziții includ adesea întrebări și comenzi – acestea nu pot fi adevărate sau false, deși pot fi inteligibile sau absurde. “Stinge lumina.”;
- “Tu ești Mircea?”;
- “Ești catolic?”;
- “x:=2” (Limbajul Pascal).

Valoare de adevăr a unei propoziții

Este foarte important a observa că fiecare propoziție este adevărată sau falsă în raport cu o lume posibilă (sau universul discursului).

De exemplu propoziția “*orice ființă vie nu poate exista mult timp fără apă*” este adevărată în lumea noastră; cine știe cum stau lucrurile în alte sisteme solare.

Sau, de exemplu, afirmația “*printr-un punct la o dreaptă putem duce doar o singură paralelă*” este adevărată doar în geometria lui Euclid, dar nu și în geometriile Bolyai-Lobacevski și Riemann.

Valorile de adevăr le vom nota prin “*1*” pentru adevăr și “*0*”pentru fals.

Simbolul “:” imediat după simbolul unei propoziții va fi utilizat cu sens de a explica care este conținutul propoziției.

Conectori / operatori logici: Negația

Negația: Posibile simboluri: *non p*, □*p*, ˜*p*. În Pascal este operatorul "*NOT*". În C++ și Java este operatorul "!".

p	¬p
0	1
1	0

Conectori / operatori logici: Conjuncția. Disjuncția

Conjuncția: Posibile simboluri: *p AND q*, *p&q*. În Pascal este operatorul "*AND*". În C++ și Java este operatorul "&&". $p \wedge q$:

Disjuncția: Posibile simboluri: *p OR q*, *p + q*. În Pascal este operatorul "*OR*". În C++ și Java este operatorul "||". $p \vee q$:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Conectori / operatori logici: Echivalența. Disjuncția exclusivă

***Echivalența*: În Pascal este operatorul “=”. În C++ și Java este operatorul “==”.**

***Disjuncția exclusivă*: Este negația echivalenței. În Pascal: “*XOR*”. În Java: “ˆ”. În C++ “ˆ” este disjuncția exclusivă la nivel de bit.**

P	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Conectorul lui Pierce Conectorul lui Sheffer. Implicația

Conectorul lui Pierce: este negația disjuncției. Simboluri: *p NOR q*.

Conectorul lui Sheffer: Este negația conjuncției. Simboluri: "↑", *p NAND q*.

Implicația: $p \to q$: "Dacă *p* atunci *q*". Analogie: $p \to q$ este adevărată dacă numai dacă $p \le q$.

p	q	p ↓ q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

p	q	p | q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

p	q	p → q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implicația

Implicația este mai puțin intuitiva decât ceilalți conectori logici. Să considerăm două calculatoare, *A* și *B*, izolate de Internet și de orice rețea locală. Ele sânt conectate doar între ele. Se știe că dacă *A* devine infectat de viruși de calculator atunci în scurt timp și *B* va fi infectat.

p	q			p → q
0	0	A nu este infectat	B nu este infectat	Adevărat
0	1	A nu este infectat	B este infectat	Adevărat
1	0	A este infectat	B nu este infectat	Fals
1	1	A este infectat	B este infectat	Adevărat

Condiții suficiente şi necesare

Implicația ($p \rightarrow q$) constă din *premisă* şi *concluzie*.

Concluzia se mai numeşte ***condiție necesară*** pentru ipoteză.

Ipoteza la rândul său se numeşte ***condiție suficientă*** pentru concluzie.

Ele sunt legate în felul următor:

- Dacă nu se îndeplineşte condiția necesară atunci nu-i ipoteza;
- Dacă este ipoteza atunci este concluzia.

Exemplu. Din expresia “Nu-i fum fără foc” reiese că fumul este o condiție necesară pentru foc.

Şi de aici reiese că “Dacă este foc atunci este fum”.

Conectori logici în cadrul limbajului natural

Limbaj natural	Conector logic	Expresia logică
non p; nu p, p este fals	negația	□p sau ¬p
p şi q; simultan	conjuncție	p ^ q
p sau q, fie p fie q	disjuncție	p ⋁ q
p dacă și numai dacă q; necesar și suficient	echivalentă	p ↔ q
p implică q; dacă p, atunci q	implicație	p → q
p este necesar pentru q	implicație	q → p

Ierarhia conectorilor logici. Lista conectorilor logici în ordinea descreşterii priorității: ¬, ⋀, ⋁, →, ↔.

Negație corectă (absolută)

- ***Negație corectă***: *X* nu este tânăr și frumos.
- ***Negație incorectă***: *X* este bătrân și urât.

Aplicații ale conectorilor logici

- Filtrarea rezultatelor căutărilor (Google, MS Access, SQL etc.);
- Expresii logice în algoritmi.

Formule propoziționale. Tautologii

Orice propoziție obținută din alte propoziții prin intermediul conectorilor logici se numeşte ***formulă propozițională***.

Ramura logicii care se ocupă cu formule propoziționale, operațiile cu ele etc. se numeşte "***logica propozițiilor***" sau "***calculul propozițional***".

O ***tautologie*** este o expresie care întotdeauna este adevărată. De exemplu, $p \vee \neg p$ sau $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$.

Notații. $p \Leftrightarrow q$ înseamnă că $p \leftrightarrow q$ este o tautologie; $p \Rightarrow q$ înseamnă că $p \rightarrow q$ este o tautologie

p	q	¬p	p ∨ ¬p		p	q	¬p	p ∧ ¬p	(p ∧ ¬p) → q
0	0	1	1		0	0	1	0	1
0	1	1	1		0	1	1	0	1
1	0	0	1		1	0	0	0	1
1	1	0	1		1	1	0	0	1

Identități remarcabile

- Comutativitatea:
  $p \wedge q \equiv q \wedge p$; $p \vee q \equiv q \vee p$
- Asociativitatea:
  $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
- Distributivitatea:
  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- Regulile lui De Morgan:
  $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- Absorbția:
  $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- Idempotența:
  $p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
  $p \wedge 0 \equiv 0$ $p \vee 0 \equiv p$
  $p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 1 \equiv 1$

Probleme logice

Un număr impar de negații se reduce la o singură negație. Respectiv întreaga expresie “*Aurel ...* ” se reduce la “*nu colonizării altor planete în viitoarea sută de ani*”. Adică Aurel este împotriva colonizării altor planete în viitoarea sută de ani.

<u>Problemă (logică)</u>: *Două auditorii*

Într-o școală nouă, în fiecare dintre două auditorii libere poate să se afle ”*Laboratorul de Fizică*” sau ”*Cabinetul de Informatică*”. Pe ușile auditoriilor a fost instalată câte o plăcuță glumeață: pe prima ușă, plăcuța cu inscripția ”*Cel puțin în una din aceste două auditorii este plasat Cabinetul de Informatică*”; pe a doua ușă, ”*Laboratorul de Fizică se află în alt auditoriu*”. Între timp, apare o inspecție din exterior, care cunoaște doar că inscripțiile de pe plăcuțe sunt sau ambele adevărate, sau ambele false. Vă propunem să-l ajutați pe inspector să găsească, pe cale logică, unde este ”*Cabinetul de Informatică*”.

Probleme logice

Rezolvarea problemei logice "*Două auditorii*"

p: "*În primul auditoriu se află Cabinetul de Informatică*";

q: "*În al doilea auditoriu se află Cabinetul de Informatică*";

¬*p*: "*În primul auditoriu se află Laboratorul de Fizică*";

¬*q*: "*În al doilea auditoriu se află Laboratorul de Fizică*".

Afirmației de pe plăcuța unui auditoriu (primului) îi corespunde expresia logică: $p \vee q$.

Afirmației de pe plăcuța celuilalt (al doilea) îi corespunde expresia logică: $\neg p$.

Faptul că inscripțiile de pe plăcuțe sunt sau ambele adevărate, sau ambele false înseamnă că: $p \vee q \leftrightarrow \neg p$.

Probleme logice

p	q	$p \lor q$	$\neg p$	$p \lor q \leftrightarrow \neg p$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

Unicul caz când echivalenta este adevărată este atunci când *p* este 0 și *q* = 1.

Astfel, *în primul auditoriu se află Laboratorul de Fizică, iar în al doilea auditoriu se află Cabinetul de Informatică*.