



Лекция №4
по курсу
«Методы и средства передачи информации ч.1»

Лектор: д.т.н., Оцоков Шамиль Алиевич,
email: otsokovShA@mpei.ru

Москва, 2022

Код с повторением

Код с повторением

$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$

Кодируется

$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \dots A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \dots$

1010 -> 101010101010

Сколько раз повторять?

Код проверки на чётность (избыточность 1 разряд)

Избыточные символы называют контрольными или проверочными.

Прямоугольный код

Рассмотрим множество всех двоичных слов длины 9 (с их помощью можно закодировать $2^9=512$ сообщений). Расположим символы каждого слова $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_9$ в квадратной таблице следующим образом:

α_1	α_2	α_3
α_4	α_5	α_6
α_7	α_8	α_9

Прямоугольный код

К каждой строке и к каждому столбцу этой таблицы добавим еще по одному (проверочному) символу с таким расчетом, чтобы в строках и столбцах получившейся таблицы (таблица 15) было четное число единиц.

При этом, например, для первой строки и первого столбца будут выполняться проверочные соотношения:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \pmod{2}, \\ \beta_4 &= \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 \pmod{2}\end{aligned}$$

и аналогично для остальных строк и столбцов. Заметим, что

$$\beta_1 + \beta_4 + \beta_5 = \beta_2 + \beta_6 + \beta_7 \pmod{2}.$$

Обе эти суммы равны 0, если в слове $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_9$ четное число единиц, в противном случае обе они равны 1. Это дает воз-

α_1	α_2	α_3	β_1
α_4	α_5	α_6	β_2
α_7	α_8	α_9	β_3
β_4	β_5	β_6	β_7

Прямоугольный код

$$\beta_7 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 \pmod{2}.$$

Например, слову 011010001 отвечает следующая таблица:

Таблица 16

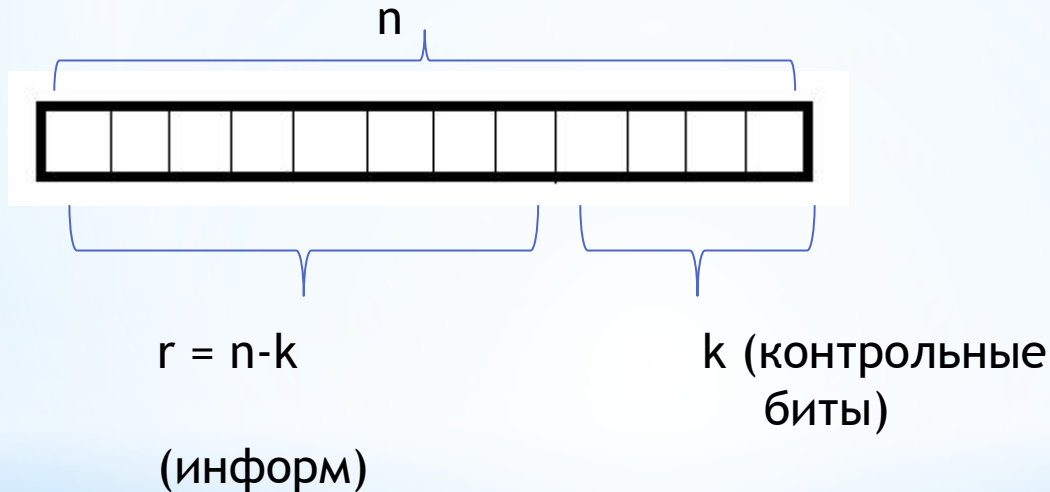
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Исправление 1 ошибки и обнаружение двух ошибок

Избыточность

Избыточность помехоустойчивого кода делится на:

- абсолютную избыточность $I = (n - k)$ двоичных символов;
- относительную избыточность $r = (n - k) / n = (I / n) * 100\%$;



Сколько бит добавить чтобы исправлять одну ошибку
r бит и k контрольных

$$2^k \geq r + k + 1$$

$$r = 10, k = 4$$

$$r = 4, k = ?$$

Избыточность

Количество информационных разрядов m	Количество контрольных разрядов k
1	2
2 — 4	3
5 — 11	4
12 — 26	5
27 — 57	6

Код Хэмминга

Вместо x_1 будем писать x_{001}
Вместо x_2 будем писать x_{010}
Вместо x_3 будем писать x_{011}
Вместо x_4 будем писать x_{100}
Вместо x_5 будем писать x_{101}
Вместо x_6 будем писать x_{110}
Вместо x_7 будем писать x_{111}

Пусть дано двоичное число
($x_1 x_2 x_3 x_4$)
Дополним его 3-мя контрольными
разрядами
($x_5 x_6 x_7$) и получим число:
($x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$)

Выпишем те x , у которых единичка в крайнем правом разряде
 $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 0 \pmod{2}$

Выпишем те x , у которых единичка посередине
 $x_2 + x_3 + x_6 + x_7 = 0 \pmod{2}$

Выпишем те x , у которых единичка в крайнем левом разряде
 $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \pmod{2}$

Код Хэмминга

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 + x_5 + x_7 &= 0 \pmod{2} \\x_2 + x_3 + x_6 + x_7 &= 0 \pmod{2} \\x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 0 \pmod{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_5 &= x_2 + x_3 + x_4 \pmod{2} \\x_6 &= x_1 + x_3 + x_4 \pmod{2} \\x_7 &= x_1 + x_2 + x_4 \pmod{2}\end{aligned}$$

001 | 1011001
110 | 0010100
000 | 0110011
111 | 1110001

№	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	1	1
7	0	1	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	1	0	0
10	1	0	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0	1	0
12	1	1	0	0	1	1	0
13	1	1	0	1	0	0	1
14	1	1	1	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1

Код Хэмминга

$$s_3 = x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \pmod 2$$

$$s_2 = x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \pmod 2$$

$$s_1 = x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \pmod 2$$

Номер одиночной ошибки k
определяется числом s
двоичной записью $s_1 s_2 s_3$?

Т.е. $k = (s_1 s_2 s_3)_2$

$(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7)$

$(x_{001} x_{010} x_{011} x_{100} x_{101} x_{110} x_{111})$

№	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	1	1
7	0	1	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	1	0	0
10	1	0	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0	1	0
12	1	1	0	0	1	1	0
13	1	1	0	1	0	0	1
14	1	1	1	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1

Код Хэмминга (обнаружение двойной ошибки)

В общем случае кодовые слова двоичного кода Хемминга, позволяющего исправить одиночную ошибку, имеют длину $2^m - 1$ (m — натуральное). Для определения положения ошибки тогда уже нужно m проверок, т. е. m проверочных символов. Оставшиеся $2^m - 1 - m$ символов являются информационными. Проверки строятся по аналогии с рассмотренным случаем. Значения m проверок, как и выше, образуют номер положения ошибки.

$$s_3 = x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \pmod{2}$$

$$s_2 = x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \pmod{2}$$

$$s_1 = x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \pmod{2}$$

$$s_0 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \pmod{2}$$

Почему обнаруживаются две ошибки и исправляется одна?

Код Хэмминга

2. Расположение контрольных разрядов в коде Хемминга определяется соображениями удобства построения опознавателя. Поэтому они располагаются последовательно справа налево в позициях, номера которых являются степенями двойки. Информационные разряды кода занимают оставшиеся свободные позиции. Таким образом, общая структура кода при $m=4$ имеет вид:

7 6 5 4= 2^2 3 2= 2^1 1= 2^0

a_4	a_3	a_2	k_3	a_0	k_2	k_1
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

k_1 контролирует четность 3, 5 и 7-го разрядов кода;

k_2 контролирует четность 3, 6 и 7-го разрядов кода;

k_3 контролирует четность 5, 6 и 7-го разрядов кода.

Выражения для определения контрольных разрядов имеют вид:

$$k_1 = a_3 a_5 a_7;$$

$$k_2 = a_3 a_6 a_7;$$

$$k_3 = a_5 a_6 a_7;$$

Код Хэмминга

4. В качестве опознавателя используется k-разрядное слово $(r_3 r_2 r_1)$. Его

Разряды определяются по формулам:

$$r_1 = k_1 a_3 a_5 a_7;$$

$$r_2 = k_2 a_3 a_6 a_7;$$

$$r_3 = k_3 a_5 a_6 a_7.$$

Код Хэмминга

Пример. Закодировать по методу Хэмминга число 13. В полученный код ввести одиночную ошибку и с помощью опознавателя определить номер искаженного разряда.

Решение.

1. Число 13 переводится в двоичную систему счисления: $13_{10} = 1101_2$

Число двоичных информационных разрядов $m=4$. Количество контрольных разрядов $k=3$ (было определено ранее).

2. Для получения полной структуры кода, значения информационных разрядов подставляются в соответствующие позиции. Общая структура кода

имеет вид: 1 1 0 k_3 1 k_2 k_1

3. Определяются значения контрольных разрядов:

$$k_1 = a_3 a_5 a_7 = 101 = 0;$$

$$k_2 = a_3 a_6 a_7 = 111 = 1;$$

$$k_3 = a_5 a_6 a_7 = 011 = 0.$$

Код Хэмминга

Значения информационных и контрольных разрядов подставляются в

структуру кода. В результате получается искомый код Хемминга.

7 6 5 4=2² 3 2=2¹ 1=2⁰

1	1	0	0	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---

4. Предполагаем, что в результате сбоя при передаче исказился третий разряд кода и его единичное значение изменилось на противоположное (нулевое). В результате получен код: 1 1 0 0 0 1 0.

Исходя из нового ошибочного значения кода, вычисляется значение опознавателя:

$$r_1 = k_1 a_3 a_5 a_7 = 0001 = 1;$$

$$r_2 = k_2 a_3 a_6 a_7 = 1011 = 3;$$

$$r_3 = k_3 a_5 a_6 a_7 = 0011 = 3.$$

Опознаватель $r_3 r_2 r_1 = 011_2 = 3_{10}$, то есть ошибка произошла в третьем разряде.

Код Хэмминга

Проинвертировав ошибочный разряд, получаем истинное значение кода:

1 1 0 0 1 1 0.

5. Построить систему проверок для кода Хемминга длины 15. Сколько кодовых слов содержит этот код? Сколько информационных и сколько проверочных символов имеется в кодовом слове?

Расстояние Хэмминга

Известно, что расстояние между точками в пространстве определяется как длина отрезка прямой, соединяющей эти точки. Оно служит мерой близости точек — чем меньше расстояние, тем ближе друг к другу расположены точки. Если обозначать расстояние между точками a и b через $\rho(a, b)$, то для любых точек a, b и c имеем:

- 1) $\rho(a, b) \geq 0$;
- 2) $\rho(a, b) = 0$ означает, что $a = b$;
- 3) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$
- 4) $\rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$.

Расстоянием $\rho(x, y)$ между двумя словами x и y назовем число несовпадающих позиций этих слов. Например, расстояние между словами $x=01101$ и $y=00111$ равно 2.

Кодовое расстояние

Кодовое расстояние $d(V)$ определим как минимальное расстояние между различными кодовыми словами из V :

$$d(V) = \min_{x \neq y} \rho(x, y).$$