Лекция №4
по курсу
«Методы и средства передачи информации ч.1»

Лектор: д.т.н., Оцоков Шамиль Алиевич,
email: otsokovShA@mpei.ru

Москва, 2022

Код с повторением

Код с повторением

$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$

Кодируется

$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \dots \quad A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \dots$

1010 -> 101010101010

Сколько раз повторять?

Код проверки на чётность (избыточность 1 разряд)

Избыточные символы называют контрольными или проверочными.

Прямоугольный код

Рассмотрим множество всех двоичных слов длины 9 (с их помощью можно закодировать $2^9=512$ сообщений). Расположим символы каждого слова $\alpha_1\alpha_2...\alpha_9$ в квадратной таблице следующим образом:

α_1	α_2	α_3
α_4	α_5	α_6
α_7	α_8	α_9

Прямоугольный код

К каждой строке и к каждому столбцу этой таблицы добавим еще по одному (проверочному) символу с таким расчетом, чтобы в строках и столбцах получившейся таблицы (таблица 15) было четное число единиц.

При этом, например, для первой строки и первого столбца будут выполняться проверочные соотношения:

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \pmod 2,$$
$$\beta_4=\alpha_1+\alpha_4+\alpha_7 \pmod 2$$

и аналогично для остальных строк и столбцов. Заметим, что

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta_4+\beta_5+\beta_6 \pmod 2.$$

Обе эти суммы равны 0, если в слове $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_9$ четное число единиц, в противном случае обе они равны 1. Это дает воз-

α_1	α_2	α_3	β_1
α_4	α_5	α_6	β_2
α_7	α_8	α_9	β_3
β_4	β_5	β_6	β_7

Прямоугольный код

$$\beta_7 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 \pmod 2.$$

Например, слову 011010001 отвечает следующая таблица:

Таблица 16

0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

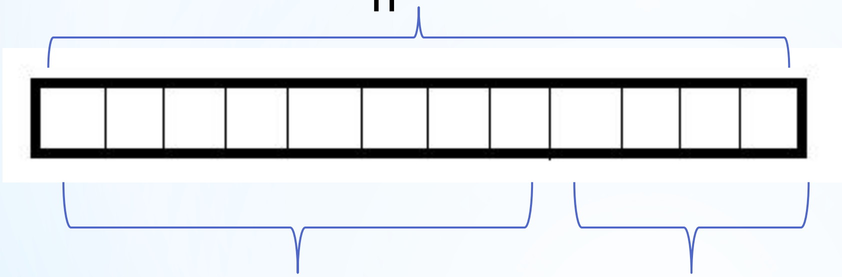
Исправление 1 ошибки и обнаружение двух ошибок

Избыточность

Избыточность помехоустойчивого кода делится на:

- абсолютную избыточность $l = (\quad k)$ двоичных символов;
- относительную избыточность $r = (\quad k) / n = (l / n) * 100\%$;

n



r = n-k

(информ)

k (контрольные биты)

Сколько бит добавить чтобы исправлять одну ошибку
r бит и k контрольных

2^k >= r + k + 1

r = 10, k = 4
r = 4, k = ?

Избыточность

Количество информационных разрядов m	Количество контрольных разрядов k
1	2
2 — 4	3
5 – 11	4
12 — 26	5
27 — 57	6

Код Хэмминга

Вместо x1 будем писать x_{001}
Вместо x2 будем писать x_{010}
Вместо x3 будем писать x_{011}
Вместо x4 будем писать x_{100}
Вместо x5 будем писать x_{101}
Вместо x6 будем писать x_{110}
Вместо x7 будем писать x_{111}

Пусть дано двоичное число
(x1 x2 x3 x4)
Дополним его 3-мя контрольными разрядами
(x5 x6 x7) и получим число:
(x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7)

Выпишем те x , у которых единичка в крайнем правом разряде
x1 + x3 + x5 + x7 = 0 (mod 2)
Выпишем те x , у которых единичка посередине
x2 + x3 + x6 + x7 = 0 (mod 2)
Выпишем те x , у которых единичка в крайнем левом разряде
x4 + x5 + x6 + x7 = 0 (mod 2)

Код Хэмминга

$x1 + x3 + x5 + x7 = 0 \pmod 2$
$x2 + x3 + x6 + x7 = 0 \pmod 2$
$x4 + x5 + x6 + x7 = 0 \pmod 2$

$x5 = x2 + x3 + x4 \pmod 2$
$x6 = x1 + x3 + x4 \pmod 2$
$x7 = x1 + x2 + x4 \pmod 2$

001 | 1011001
110 | 0010100
000 | 0110011
111 | 1110001

№	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	1	1
7	0	1	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	1	0	0
10	1	0	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0	1	0
12	1	1	0	0	1	1	0
13	1	1	0	1	0	0	1
14	1	1	1	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1

Код Хэмминга

$s_3 = x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \mod 2$
$s_2 = x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \mod 2$
$s_1 = x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \mod 2$

Номер одиночной ошибки k определяется числом с двоичной записью $s_1\ s_2\ s_3$?
Т.е. $k = (s_1\ s_2\ s_3)_2$
$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7)$
$(x_{001}\ x_{010}\ x_{011}\ x_{100}\ x_{101}\ x_{110}\ x_{111})$

№	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	1	1
7	0	1	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	1	0	0
10	1	0	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0	1	0
12	1	1	0	0	1	1	0
13	1	1	0	1	0	0	1
14	1	1	1	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1

Код Хэмминга (обнаружение двойной ошибки)

В общем случае кодовые слова двоичного кода Хемминга, позволяющего исправить одиночную ошибку, имеют длину 2^m-1 (m — натуральное). Для определения положения ошибки тогда уже нужно m проверок, т. е. m проверочных символов. Оставшиеся 2^m-1-m символов являются информационными. Проверки строятся по аналогии с рассмотренным случаем. Значения m проверок, как и выше, образуют номер положения ошибки.

$s_3 = x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \bmod 2$
$s_2 = x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \bmod 2$
$s_1 = x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \bmod 2$
$s_0 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \bmod 2$

Почему обнаруживаются две ошибки и исправляется одна?

Код Хэмминга

2. Расположение контрольных разрядов в коде Хемминга определяется соображениями удобства построения опознавателя. Поэтому они располагаются последовательно справа налево в позициях, номера которых являются степенями двойки. Информационные разряды кода занимают оставшиеся свободные позиции. Таким образом, общая структура кода при m=4 имеет вид:

7	6	5	$4=2^2$	3	$2=2^1$	$1=2^0$
a_4	a_3	a_2	k_3	a_0	k_2	k_1

k_1 контролирует четность 3, 5 и 7-го разрядов кода;

k_2 контролирует четность 3, 6 и 7-го разрядов кода;

k_3 контролирует четность 5, 6 и 7-го разрядов кода.

Выражения для определения контрольных разрядов имеют вид:

$k_1 = a_3\ a_5 a_7$;

$k_2 = a_3\ a_6 a_7$;

$k_3 = a_5\ a_6 a_7$;

Код Хэмминга

4. В качестве опознавателя используется k-разрядное слово (r_3 r_2 r_1). Его

Разряды определяются по формулам:

$r_1 = k_1 a_3\, a_5 a_7$;

$r_2 = k_2\, a_3\, a_6 a_7$;

$r_3 = k_3\, a_5\, a_6 a_7$.

Код Хэмминга

Пример. Закодировать по методу Хэмминга число 13. В полученный код ввести одиночную ошибку и с помощью опознавателя определить номер искаженного разряда.

Решение.

1. Число 13 переводится в двоичную систему счисления: $13_{10} = 1101_2$

Число двоичных информационных разрядов m=4. Количество контрольных

разрядов k=3 (было определено ранее).

2. Для получения полной структуры кода, значения информационных

 разрядов подставляются в соответствующие позиции. Общая структура кода

имеет вид: 1 1 0 k_3 1 k_2 k_1

3. Определяются значения контрольных разрядов:

$k_1 = a_3\ a_5 a_7$=101=0;

$k_2 = a_3\ a_6 a_7$=111=1;

$k_3 = a_5\ a_6 a_7$=011=0.

Код Хэмминга

Значения информационных и контрольных разрядов подставляются в

структуру кода. В результате получается искомый код Хемминга.

7	6	5	$4=2^2$	3	$2=2^1$	$1=2^0$
1	*1*	*0*	0	*1*	1	0

4. Предполагаем, что в результате сбоя при передаче исказился третий

разряд кода и его единичное значение изменилось на противоположное

(нулевое). В результате получен код: 1 1 0 0 0 1 0.

Исходя из нового ошибочного значения кода, вычисляется значение

опознавателя:

$r_1= k_1 a_3\ a_5 a_7=00\ 01=1;$

$r_2= k_2\ a_3\ a_6 a_7=10\ 11=1;$

$r_3= k_3\ a_5\ a_6 a=00\ 11=0.$

Опознаватель $r_3\ r_2\ r_1=011_2=3_{10}$, то есть ошибка произошла в третьем разряде.

Код Хэмминга

Проинвертировав ошибочный разряд, получаем истинное значение кода:

1 1 0 0 1 1 0.

5. Построить систему проверок для кода Хемминга длины 15. Сколько кодовых слов содержит этот код? Сколько информационных и сколько проверочных символов имеется в кодовом слове?

Расстояние Хэмминга

Известно, что расстояние между точками в пространстве определяется как длина отрезка прямой, соединяющей эти точки. Оно служит мерой близости точек — чем меньше расстояние, тем ближе друг к другу расположены точки. Если обозначать расстояние между точками a и b через $\rho(a, b)$, то для любых точек a, b и c имеем:

1) $\rho(a,b) \geqslant 0$;
2) $\rho(a,b) = 0$ означает, что $a = b$;
3) $\rho(a,b) = \rho(b, a)$
4) $\rho(a,b) + \rho(b,c) \geqslant \rho(a,c)$.

Расстоянием $\rho(x, y)$ между двумя словами x и y назовем число несовпадающих позиций этих слов. Например, расстояние между словами $x=01101$ и $y=00111$ равно 2.

Кодовое расстояние

Кодовое расстояние $d(V)$ определим как минимальное расстояние между различными кодовыми словами из V:

$$d(V) = \min_{x \neq y} \rho(x, y).$$