



Пермский государственный
национальный исследовательский
университет

VIVAT - CRESCAT - FLOREAT

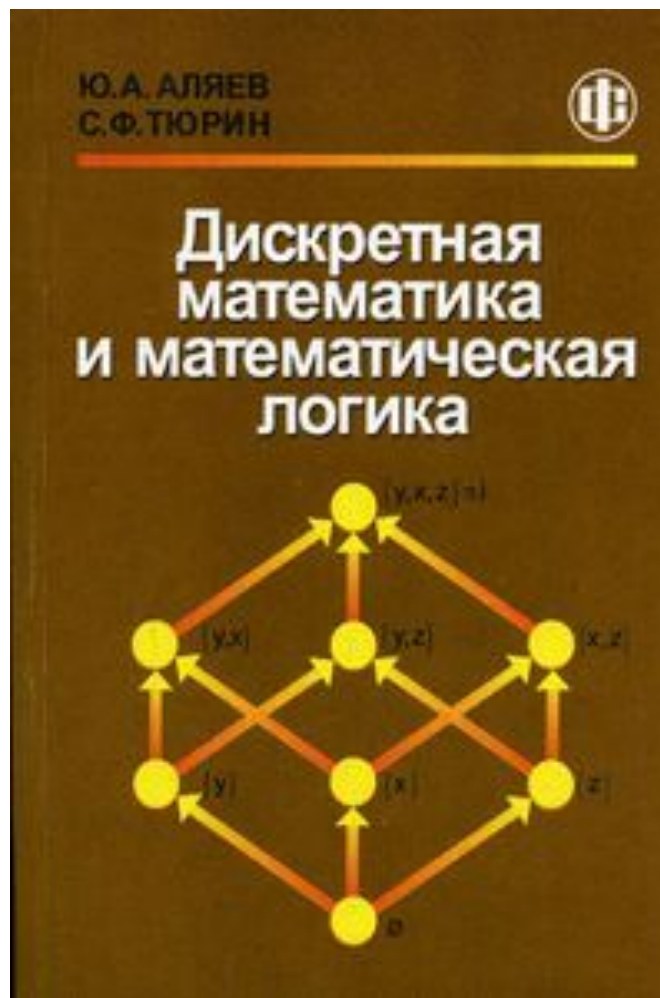
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА (ИТ)

● Тема 2: Логика высказываний

Лекция 4

- **Функциональная
полнота
систем логических
функций**

C.94-145



C.47-145



**Логические функции одной
и двух переменных
называются
элементарными**

$$B \boxtimes B \quad B^2 \boxtimes B$$

**где B – бинарное
множество $\{0,1\}$**

1. Логические функции одной переменной

● **Сколько всего функций одной переменной?**

2 · 2

$n = 1$

Переключательная (логическая) функция				
x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

2^0

2^1

2. Логические функции двух переменных

● **Сколько всего функций двух переменных?**

2 · 2 · 2 · 2

● **Сколько всего функций n переменных?**

2^{2^n}

ПФ двух переменных N0-3

N	8 4 2 1				x1 x2	ПФ	Свойства ПФ				
	1	0	1	0			0	1	с	л	м
	1	0	1	0							
	1	1	0	0							
0	0	0	0	0	Конст.0	⊕			⊕	⊕	
1	0	0	0	1	Вебба, Стрелка Пирса↓						
2	0	0	1	0	Запрет x2	⊕					
3	0	0	1	1	Не x2			+	⊕		

N4-7

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	⊕	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю 2 [⊕]		+			⊕	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера						

N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
8	1	0	0	0	Конъюнкция x_2x_1		+	+			\oplus
9	1	0	0	1	Эквиваленция $x_2 \leftrightarrow x_1$			+			\oplus
10	1	0	1	0	Повторение x_1		+	+	+		\oplus
11	1	0	1	1	Импликация $x_2 \rightarrow x_1$			+			

N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	⊕	⊕
13	1	1	0	1	Импликация $x1 \rightarrow x2$			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция $x1 \vee x2$		+	+			⊕
15	1	1	1	1	Константа 1			+		⊕	⊕

3. Суперпозиция и проблема функциональной полноты

Суперпозиция

- Подстановка в данную функцию вместо ее переменных других функций.

Проблема функциональной полноты

- **Каким должен быть минимальный состав элементарных логических функций, чтобы путём суперпозиции получить любую сколь угодно сложную логическую функцию от конечного числа переменных?**

● **Классы ПФ**

- **1) класс функций, сохраняющих константу 0.**
- **В этот класс входят функции, которые на нулевом наборе переменных принимают нулевое значение: $f(00\dots 0)=0$.**

- **2) класс функций, сохраняющих константу 1.**
- **В этот класс входят функции, которые на единичном наборе переменных принимают единичное значение: $f(11\dots 1)=1$.**

ПФ двух переменных N0-3

N	8 4 2 1				x1 x2	ПФ	Свойства ПФ				
							0	1	с	л	м
	1	0	0	0							
	1	0	1	0							
	1	1	0	0							
0	0	0	0	0	Конст.0	⊕			⊕	⊕	
1	0	0	0	1	Вебба, Стрелка Пирса↓						
2	0	0	1	0	Запрет x2	⊕					
3	0	0	1	1	Не x2			+	⊕		

N4-7

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	⊕	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю 2 [⊕]		+			⊕	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера						

N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
8	1	0	0	0	Конъюнкция $x_2 x_1$		+	+			\oplus
9	1	0	0	1	Эквиваленция $x_2 \leftrightarrow x_1$			+			\oplus
10	1	0	1	0	Повторение x_1		+	+	+		\oplus
11	1	0	1	1	Импликация $x_2 \rightarrow x_1$			+			

N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	⊕	⊕
13	1	1	0	1	Импликация $x1 \rightarrow x2$			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция $x1 \vee x2$		+	+			⊕
15	1	1	1	1	Константа 1			+		⊕	⊕

Самодвойственность

Двойственность f и g

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = \overline{g(\overline{x_1} \overline{x_2} \dots \overline{x_n})}$$

=====

$$X_1 \vee X_2 = X_1 X_2$$

Двойственность f и g

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = \overline{g(\overline{x_1} \overline{x_2} \dots \overline{x_n})}$$

—————
=

$$X_1 X_2 = X_1 \vee X_2$$

● Самодвойственность

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n)$$

ПФ двух переменных N0-3

N											
	8	4	2	1	x1	ПФ	Свойства ПФ				
					x2		0	1	с	л	м
	1	0	1	0							
	1	1	0	0							
0	0	0	0	0	Конст.0	\oplus				\oplus	\oplus
1	0	0	0	1	Вебба, Стрелка Пирса↓						
2	0	0	1	0	Запрет x2	\oplus					
3	0	0	1	1	Не x2				+	\oplus	

N4-7

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	⊕	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю 2 [⊕]		+			⊕	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера						

N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
8	1	0	0	0	Конъюнкция $x_2 x_1$		+	+			⊕
9	1	0	0	1	Эквиваленция $x_2 \leftrightarrow x_1$			+		⊕	
10	1	0	1	0	Повторение x_1		+	+	+	⊕	⊕
11	1	0	1	1	Импликация $x_2 \rightarrow x_1$			+			

N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	⊕	⊕
13	1	1	0	1	Импликация $x1 \rightarrow x2$			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция $x1 \vee x2$		+	+			⊕
15	1	1	1	1	Константа 1			+		⊕	⊕

● **Линейность**

Класс линейных функций.

- функция называется линейной, если возможно представление в виде линейного полинома, использующего функцию сложения по модулю 2:

$$f(x_1x_2) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2,$$

где c_0, c_1, c_2 – константы 0, 1.

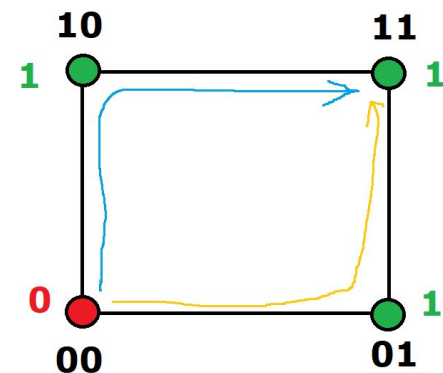
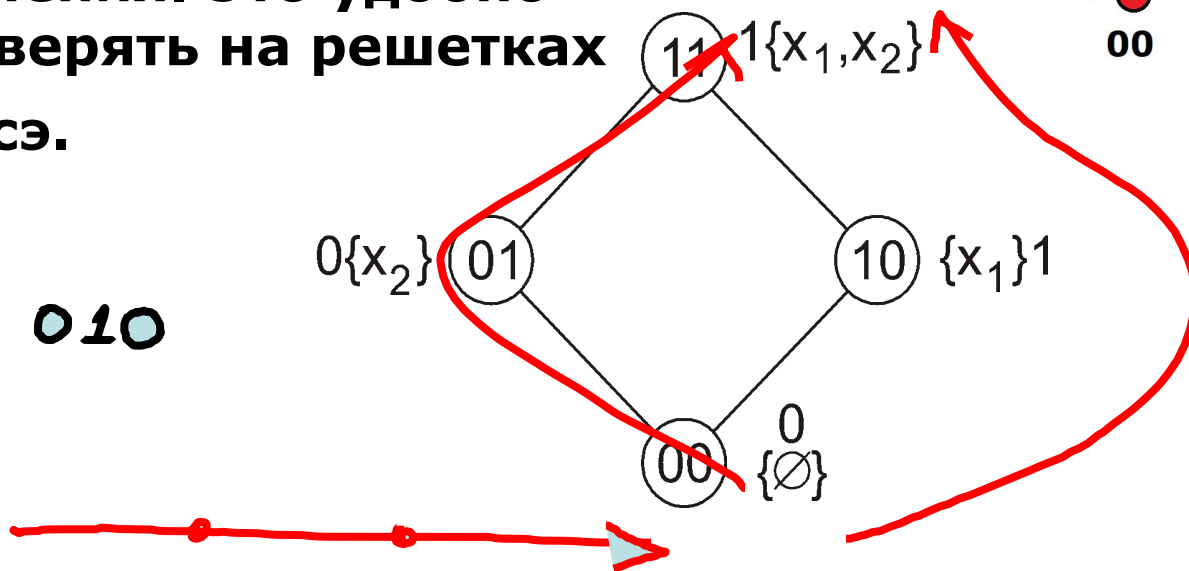
$$f(x_1x_2) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2$$

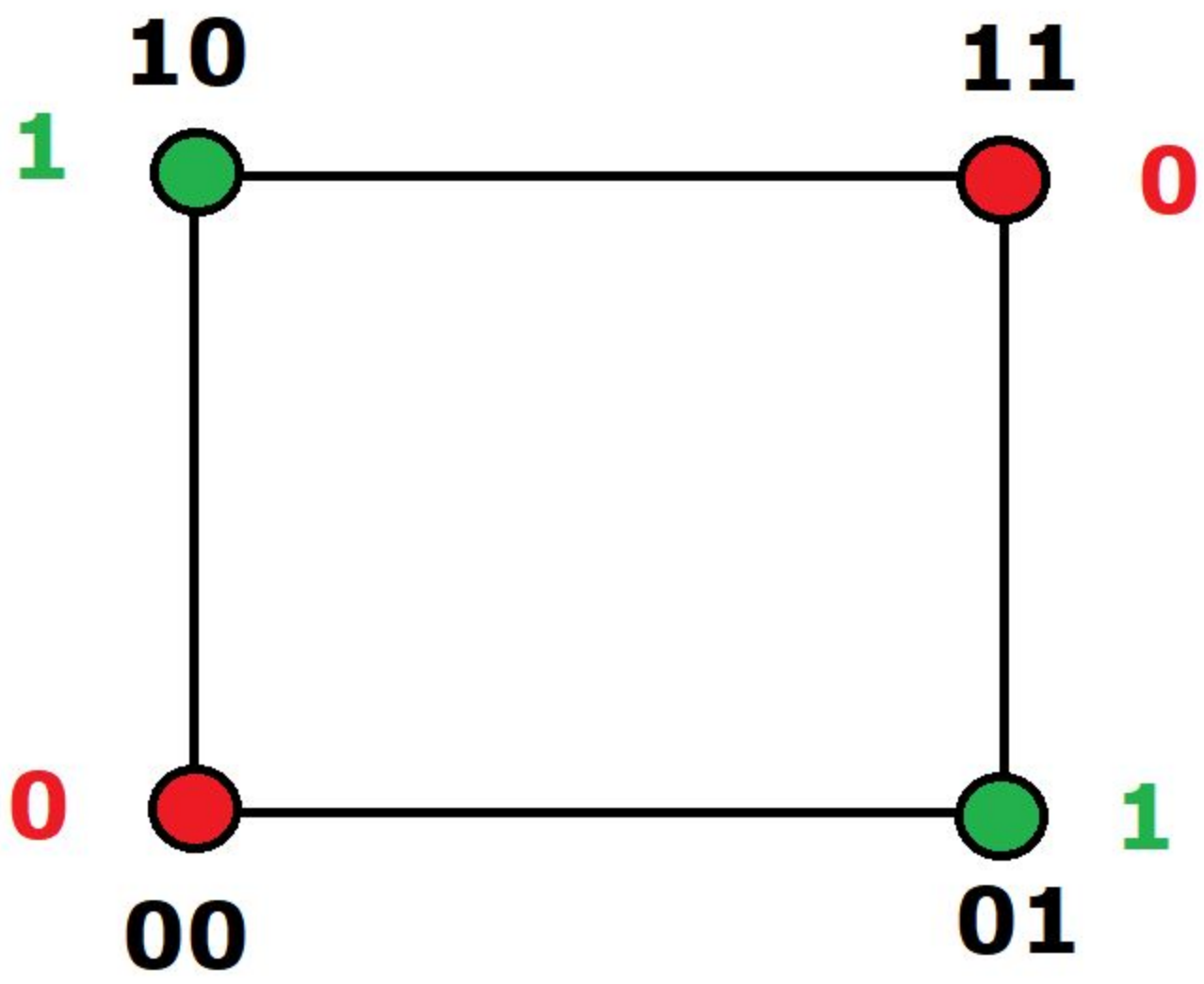
c_0	c_1	c_2	Вид полинома	
0	0	0	0	
0	0	1	x_2	
0	1	0	x_1	
0	1	1	$x_1 \oplus x_2$	$= \overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$
1	0	0	1	
1	0	1	$1 \oplus x_2$	$\overline{x_2}$
1	1	0	$1 \oplus x_1$	$\overline{x_1}$
1	1	1	$1 \oplus x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus \overline{x_2} = x_1 \leftrightarrow x_2$

● **Монотонность**

Класс монотонных функций.

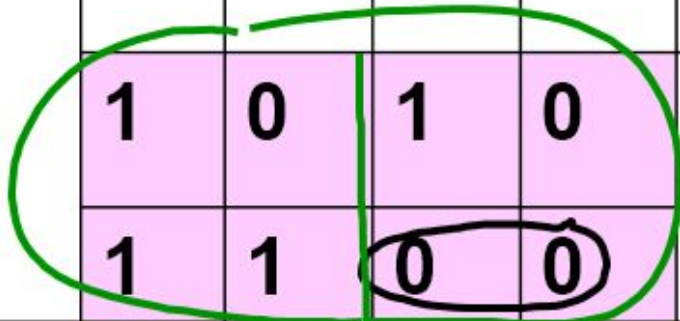
- Монотонная функция на большем сравнимом наборе переменных принимает не меньшие значения. Это удобно проверять на решетках Хассэ.





ПФ двух переменных N0-3

N	8 4 2 1				x1 x2	ПФ	Свойства ПФ						
	1	0	1	0			0	1	с	л	м		
	1	0	1	0									
	1	1	0	0									
0	0	0	0	0	Конст.0	\oplus			\oplus	\oplus			
1	0	0	0	1	Вебба, Стрелка Пирса↓								
2	0	0	1	0	Запрет x2	\oplus							
3	0	0	1	1	Не x2			+	\oplus				



N4-7

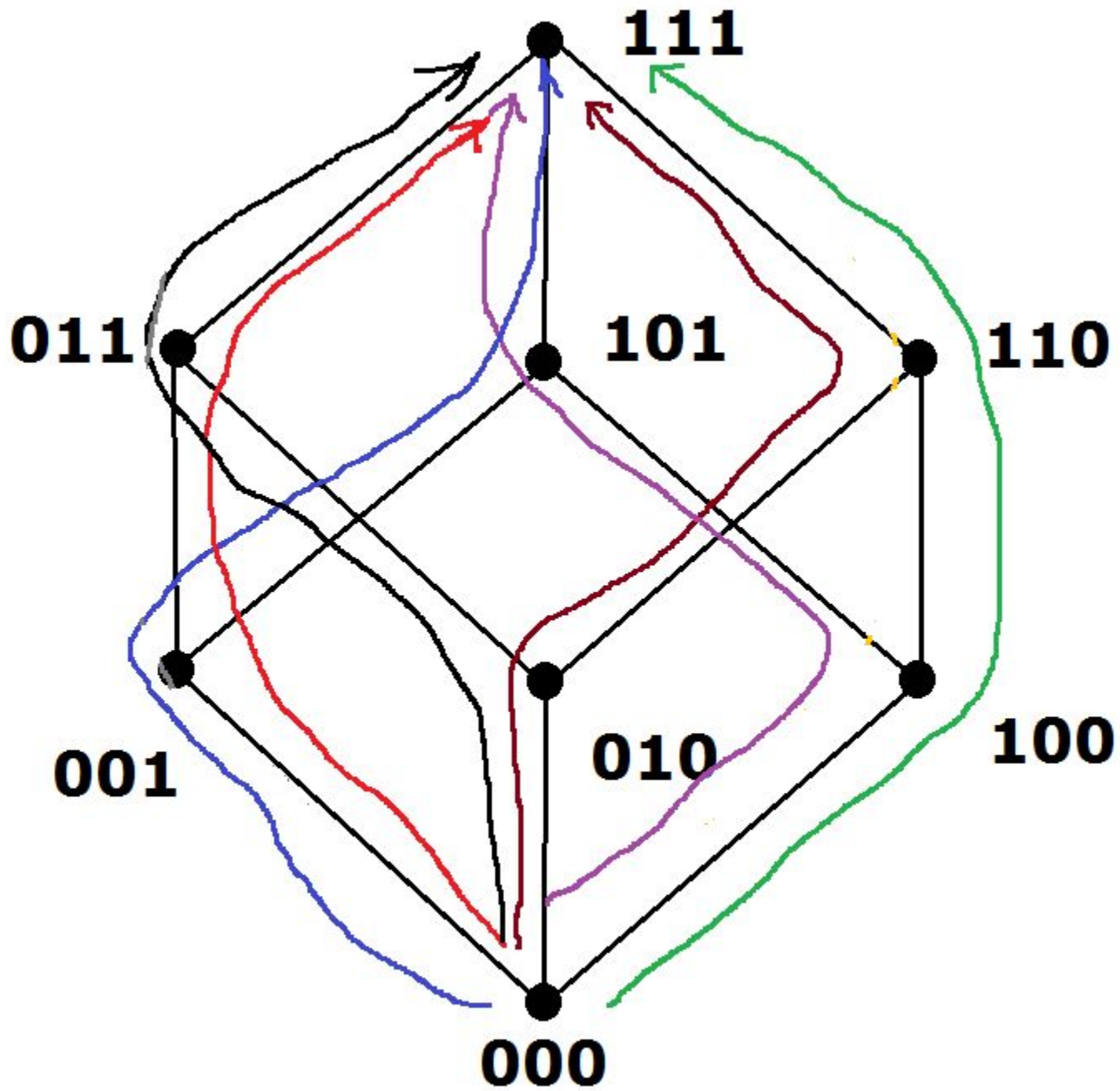
N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	⊕	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю 2 [⊕]		+			⊕	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера						

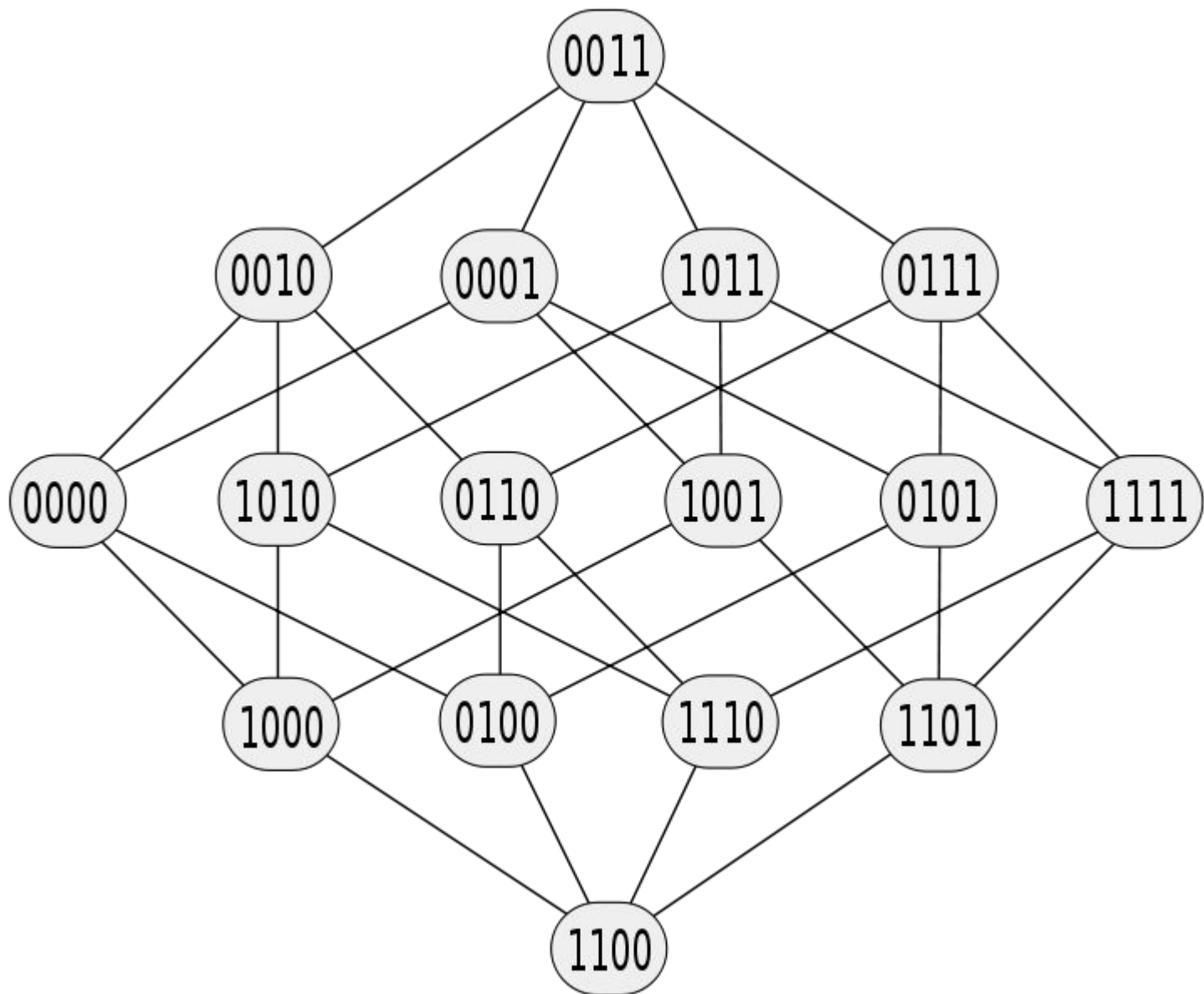
N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
8	1	0	0	0	Конъюнкция x_2x_1		+	+			\oplus
9	1	0	0	1	Эквиваленция $x_2 \leftrightarrow x_1$			+			\oplus
10	1	0	1	0	Повторение x_1		+	+	+		\oplus
11	1	0	1	1	Импликация $x_2 \rightarrow x_1$			+			

N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	⊕	⊕
13	1	1	0	1	Импликация $x1 \rightarrow x2$			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция $x1 \vee x2$		+	+			⊕
15	1	1	1	1	Константа 1			+		⊕	⊕





● 3. Теорема (критерий) Поста

Пост, Эмиль Леон (1897 – 1954)



● Система функций называется функционально полной, если любая произвольная переключательная функция от любого числа переменных может быть представлена в виде суперпозиции логических функций из этой системы.

- для функциональной полноты систем логических функций необходимо и достаточно, чтобы они содержали следующие функции:
 - не сохраняющую константу 0;
 - не сохраняющую константу 1;
 - не самодвойственную;
 - не линейную;
 - не монотонную.

- **Функционально полные системы переключательных функций представляют собой базис.**
- **Всего можно получить 17 различных минимальных базисов из логических функций двух переменных.**

ПФ двух переменных N4-7

N	8	4	2	1								
	1	0	1	0	x1	П Ф	Свойства ПФ					
	1	1	0	0			x2	Ф	0	1	с	л
4	0	1	0	0	Запрет x1		+					
5	0	1	0	1	Не x1				+	+		
6	0	1	1	0	Сложение по модулю 2 [⊕]		+			+		
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера							

ПФ двух переменных N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
8	1	0	0	0	Конъюнкция x_2x_1		+	+			\oplus
9	1	0	0	1	Эквиваленция $x_2 \leftrightarrow x_1$			+			\oplus
10	1	0	1	0	Повторение x_1		+	+	+		\oplus
11	1	0	1	1	Импликация $x_2 \rightarrow x_1$			+			

ПФ двух переменных N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
12	1	1	0	0	Повторение x2	+	+	+	⊕	⊕	
13	1	1	0	1	Импликация x1 → x2		+				
14	1	1	1	0	Дизъюнкция x1 ∨ x2	+	+			⊕	
15	1	1	1	1	Константа 1		+		⊕	⊕	

- Имеются базисы, состоящие из двух функций:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{И} \\ \text{НЕ} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \text{ИЛИ} \\ \text{НЕ} \end{array} \right\}.$

Примеры базисов

- Импликативный базис

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ \text{НЕ.} \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \\ 0. \end{array} \right.$$

Примеры базисов

- **Базис Жегалкина:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \oplus \\ И \\ НЕ. \end{array} \right.$$

● Не минимальное множество (не базис) – из трех функций:

{
И
ИЛИ
НЕ.

- Имеются функции, обладающие всеми пятью отмеченными свойствами. Таковы функции \downarrow и $|$.

- Часто их называют соответственно ИЛИ-НЕ, И-НЕ.

- Таким образом, это базисы, состоящие из одной функции.

ПФ двух переменных N0-3

N											
	8	4	2	1	x1	ПФ	Свойства ПФ				
					x2		0	1	с	л	м
	1	0	1	0							
	1	1	0	0							
0	0	0	0	0	Конст.0	\oplus				\oplus	\oplus
1	0	0	0	1	Вебба, Стрелка Пирса↓						
2	0	0	1	0	Запрет x2	\oplus					
3	0	0	1	1	Не x2				+	\oplus	

N4-7

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	⊕	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю 2 [⊕]		+			⊕	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера						

N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
8	1	0	0	0	Конъюнкция $x_2 x_1$		+	+			⊕
9	1	0	0	1	Эквиваленция $x_2 \leftrightarrow x_1$			+		⊕	
10	1	0	1	0	Повторение x_1		+	+	+	⊕	⊕
11	1	0	1	1	Импликация $x_2 \rightarrow x_1$			+			

N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			x2	0	1	с	л
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	⊕	⊕
13	1	1	0	1	Импликация $x1 \rightarrow x2$			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция $x1 \vee x2$		+	+			⊕
15	1	1	1	1	Константа 1			+		⊕	⊕

● ТЗ.

**МИНИМИЗАЦИЯ
ФОРМУЛ ЛОГИКИ
ВЫСКАЗЫВАНИЙ**

C.118-145

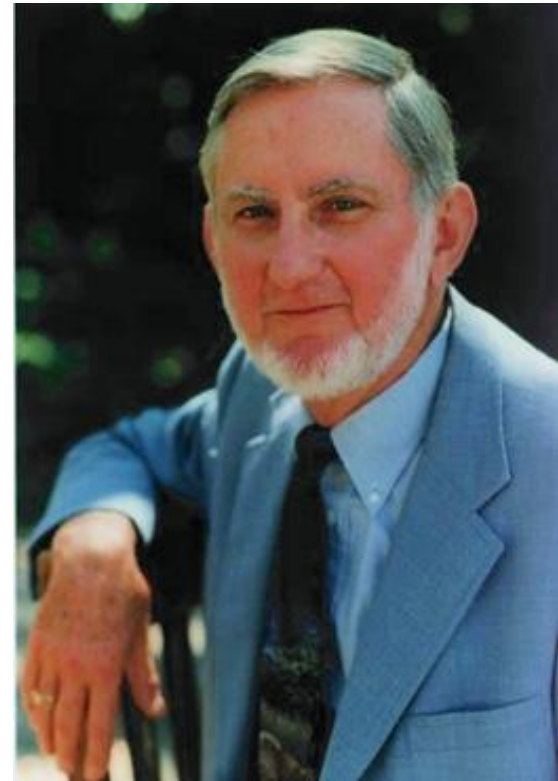


C.62-102



- **Метод Квайна-Мак-Класки.**

Willard Van Orman Quine (1908-2000), McCluskey (1929-2016)



$$p(abc)_2 = 011,101,110,111$$

011

101

110

111

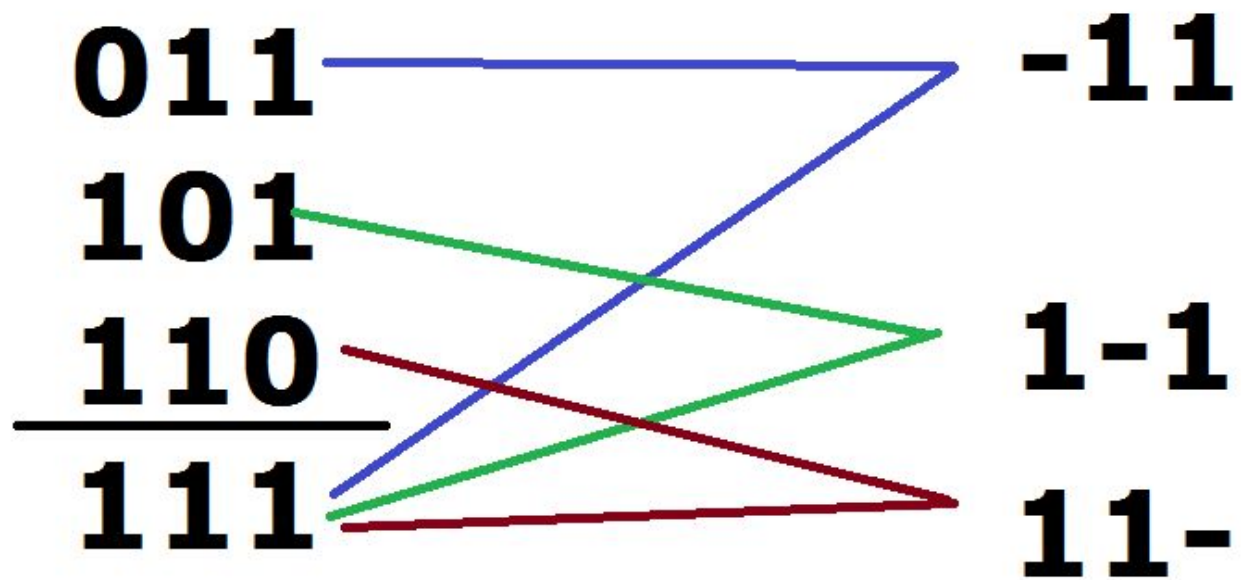


Таблица Квайна

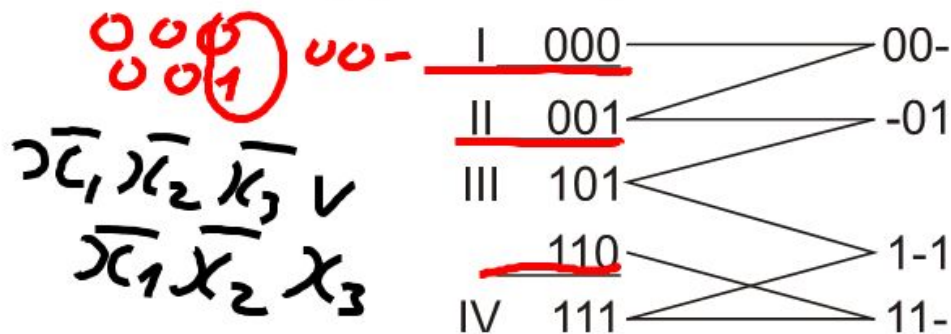
	Конституенты			
Импликаныты	011	101	110	111
-11	+			+
1-1		+		+
11-			+	+

$$p(abc) = (-11) \vee (1-1) \vee (11-)$$

$$p(abc) = bc \vee ab \vee ac$$

$$f(x_1x_2x_3) = \overset{1}{x_1}\overset{1}{x_2}\overset{1}{x_3} \vee \overset{1}{x_1}\overset{0}{x_2}\overset{1}{x_3} \vee \overset{0}{x_1}\overset{0}{x_2}\overset{1}{x_3} \vee \overset{0}{x_1}\overset{0}{x_2}\overset{0}{x_3} \vee \overset{1}{x_1}\overset{1}{x_2}\overset{0}{x_3}$$

- Сгруппируем эти конститuentы единицы по числу единиц:



Импlicantная таблица

Простые импликаты			Конstituенты единиц				
x_1	x_2	x_3	7	5	1	0	6
			111	101	001	000	110
A	0	0	-		+	+	
B	-	0	1	+	+		
C	1	-	1	+	+		
D	1	1	-	+			+

Табл.

покрытия

✓

✓

едина

едина

$(C \vee D)$ $(B \vee C) \wedge (A \vee A)$ A \neq

$$K\Pi = (C \vee D)(B \vee C)(A \vee B)AD = ?$$

$$\text{КП} = (C \vee D)(B \vee C)(A \vee B)AD$$

$\text{КП} = (C \vee D)(B \vee C)(A \vee B)AD$

$$K\Pi = (B \vee C)AD$$

$$f_1 = \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\overline{x_2} \vee x_1x_2$$

$$f_2 = x_1x_3 \vee \overline{x_1}\overline{x_2} \vee x_1x_2$$

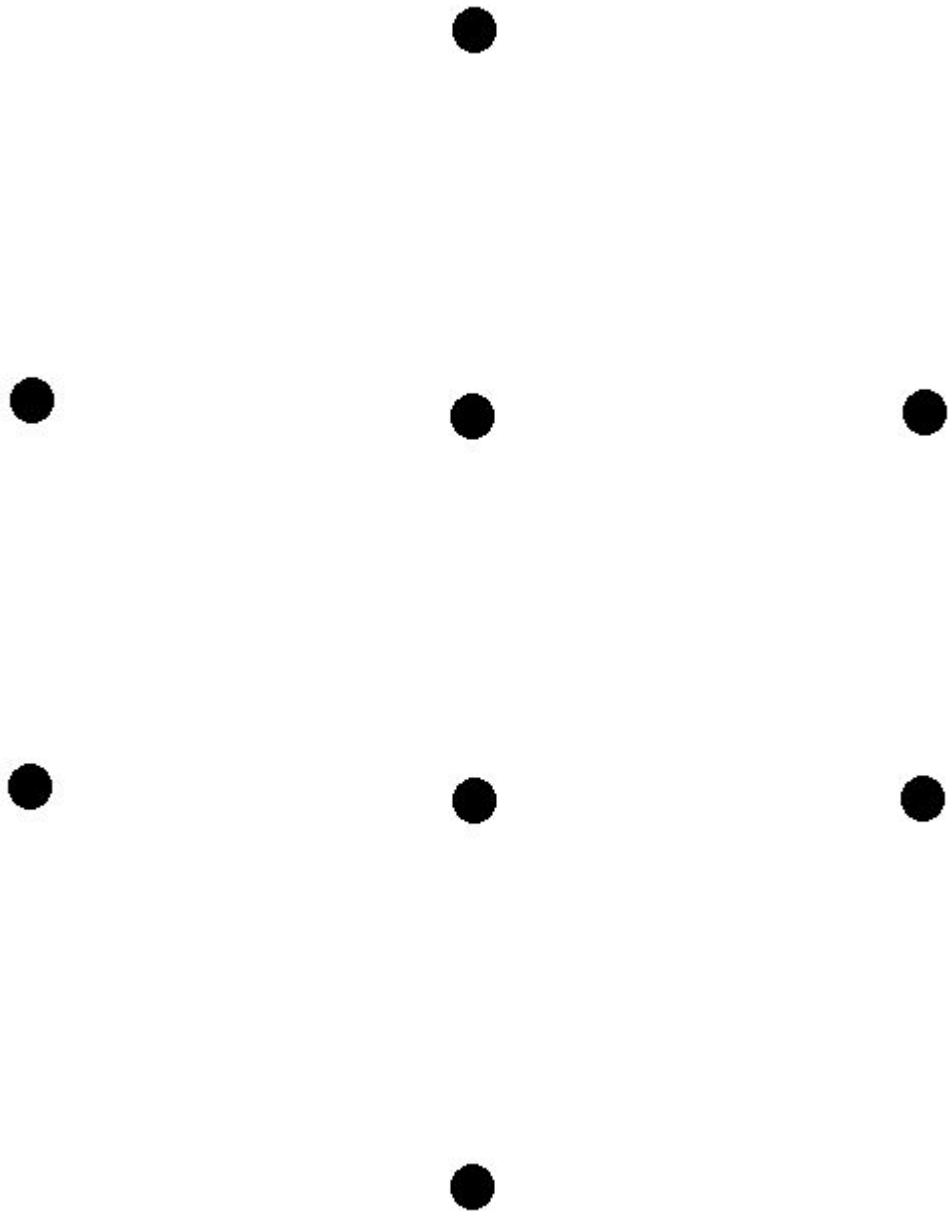
- **Минимизация
по кубу
соседних
чисел**

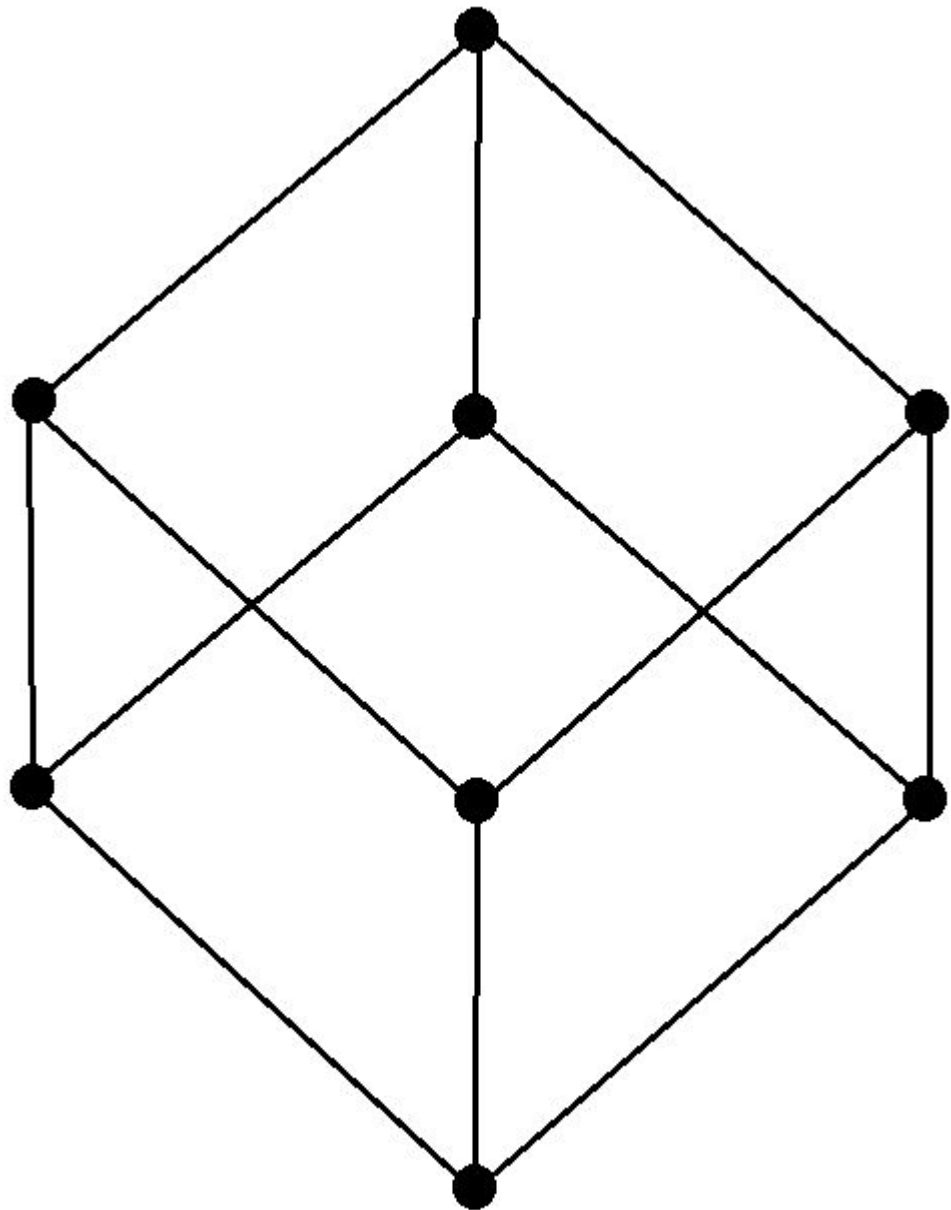


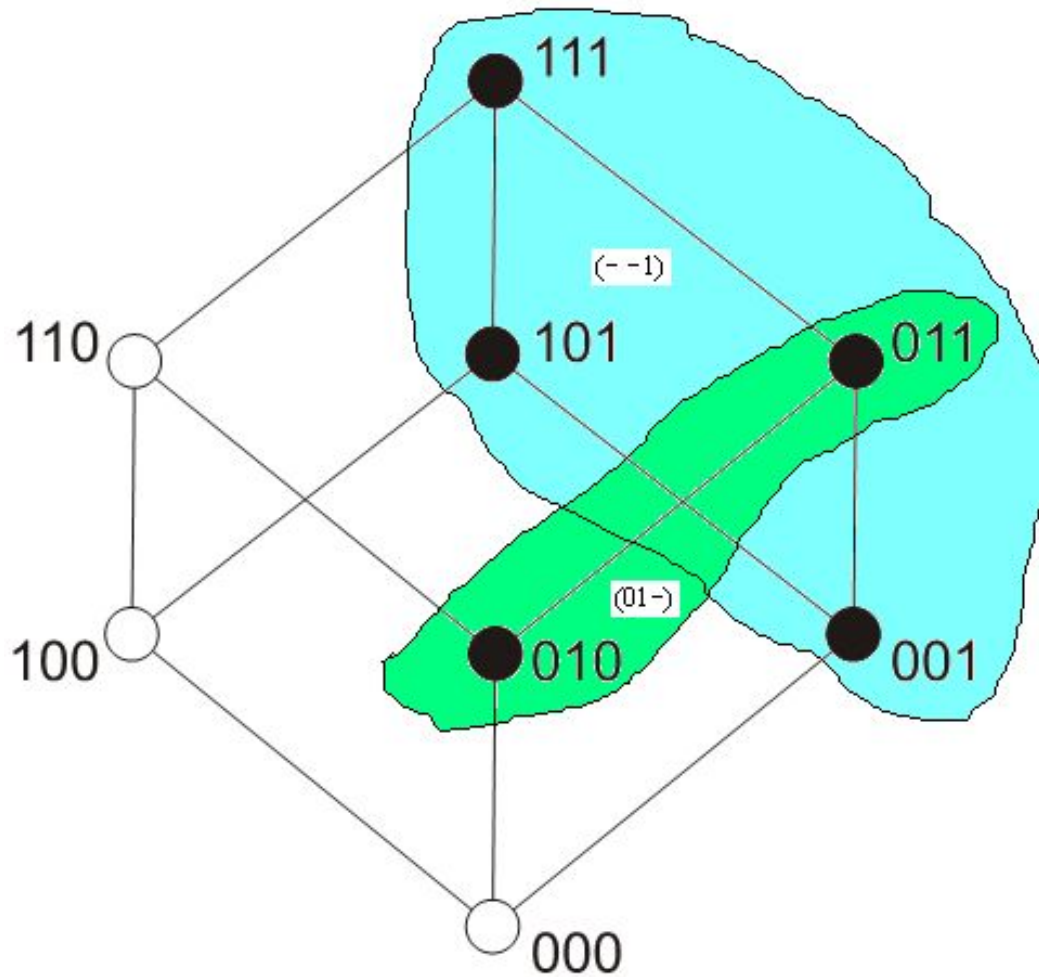






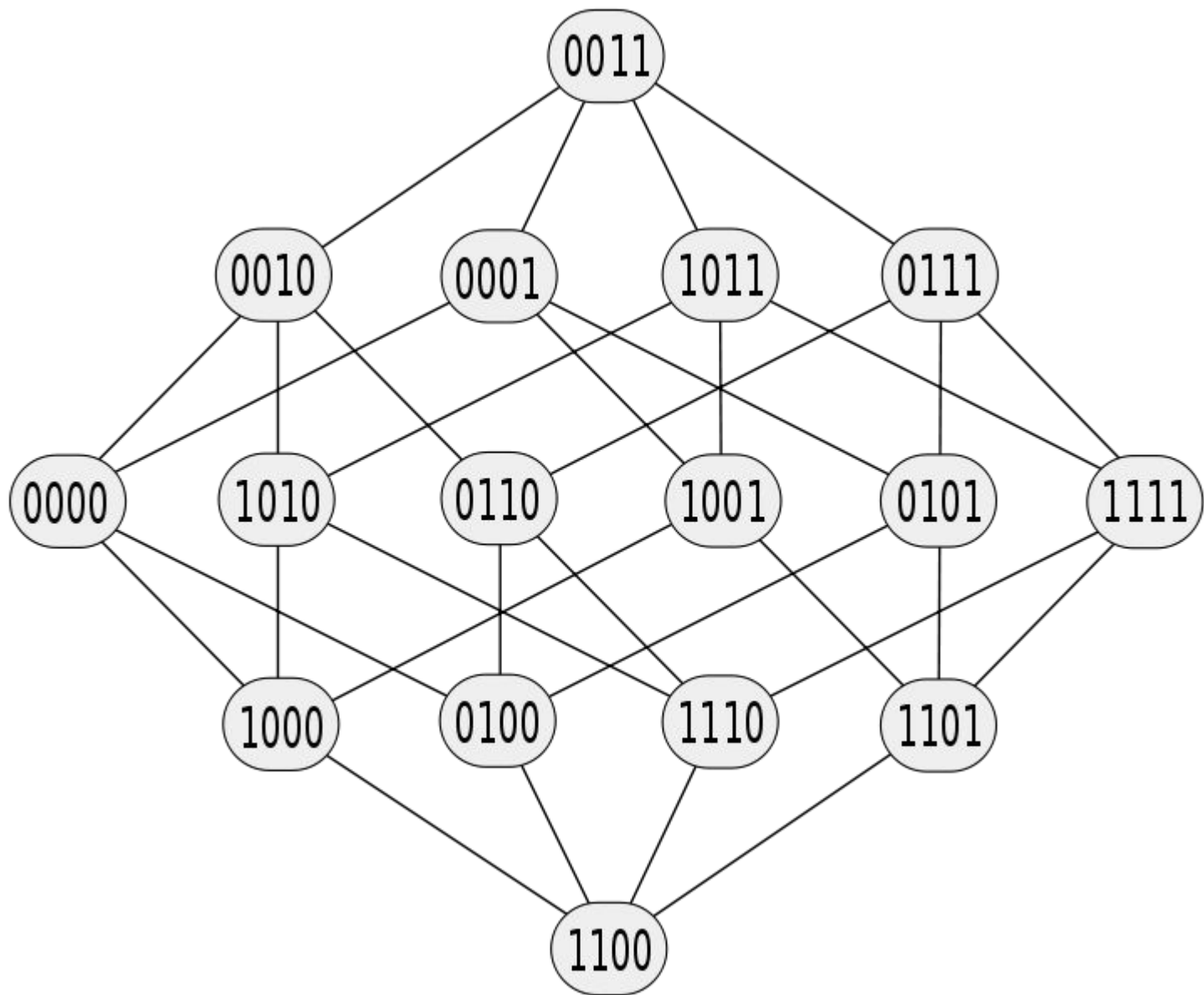




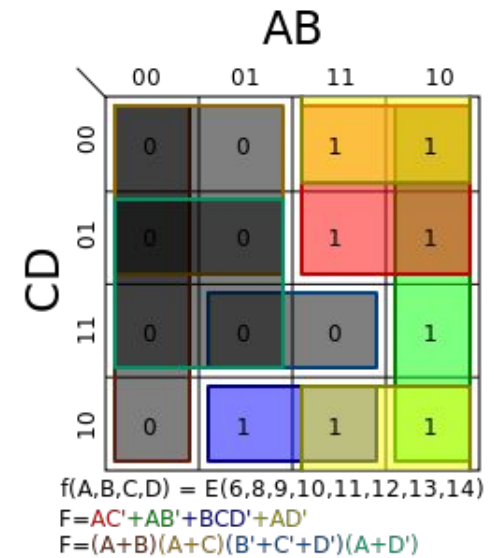


$$f(abc) = (--1) \vee (01-) = c \vee \bar{a}b$$

**МИНИМИЗАЦИЯ
ПО
КАРТАМ КАРНО**



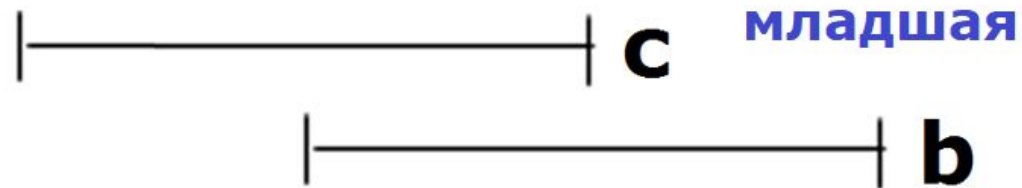
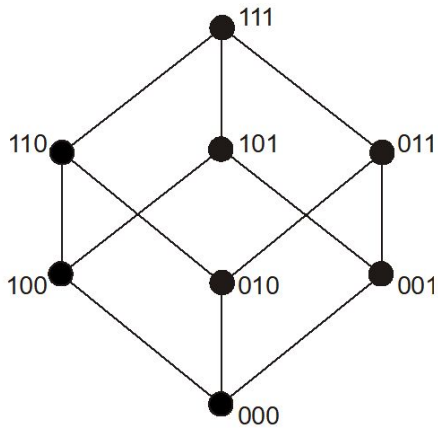
Maurice Karnaugh (1924) is an American physicist, famous for the [Karnaugh map](#) Maurice Karnaugh (1924) is an American physicist, famous for the Karnaugh map used in [Boolean algebra](#).



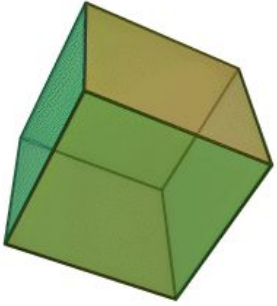
Edward W. Veitch (1924 –2013)
was an American computer scientist.



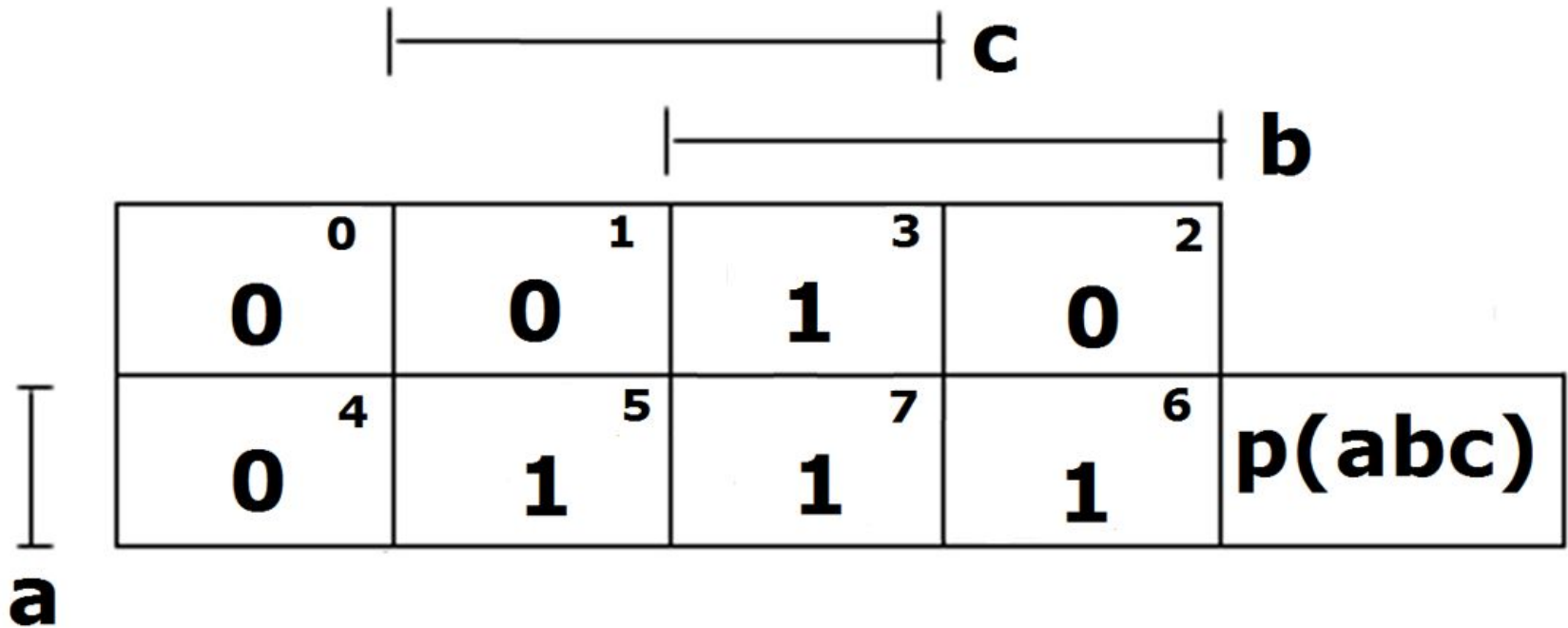
Карта Карно для $n=3$

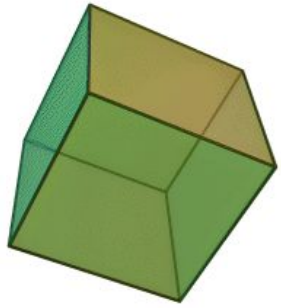


	000	001	011	010	
a старшая переменная	100	101	111	110	f(abc)



$$p(abc) = 3, 5, 6, 7[0, 1, 2, 4]$$





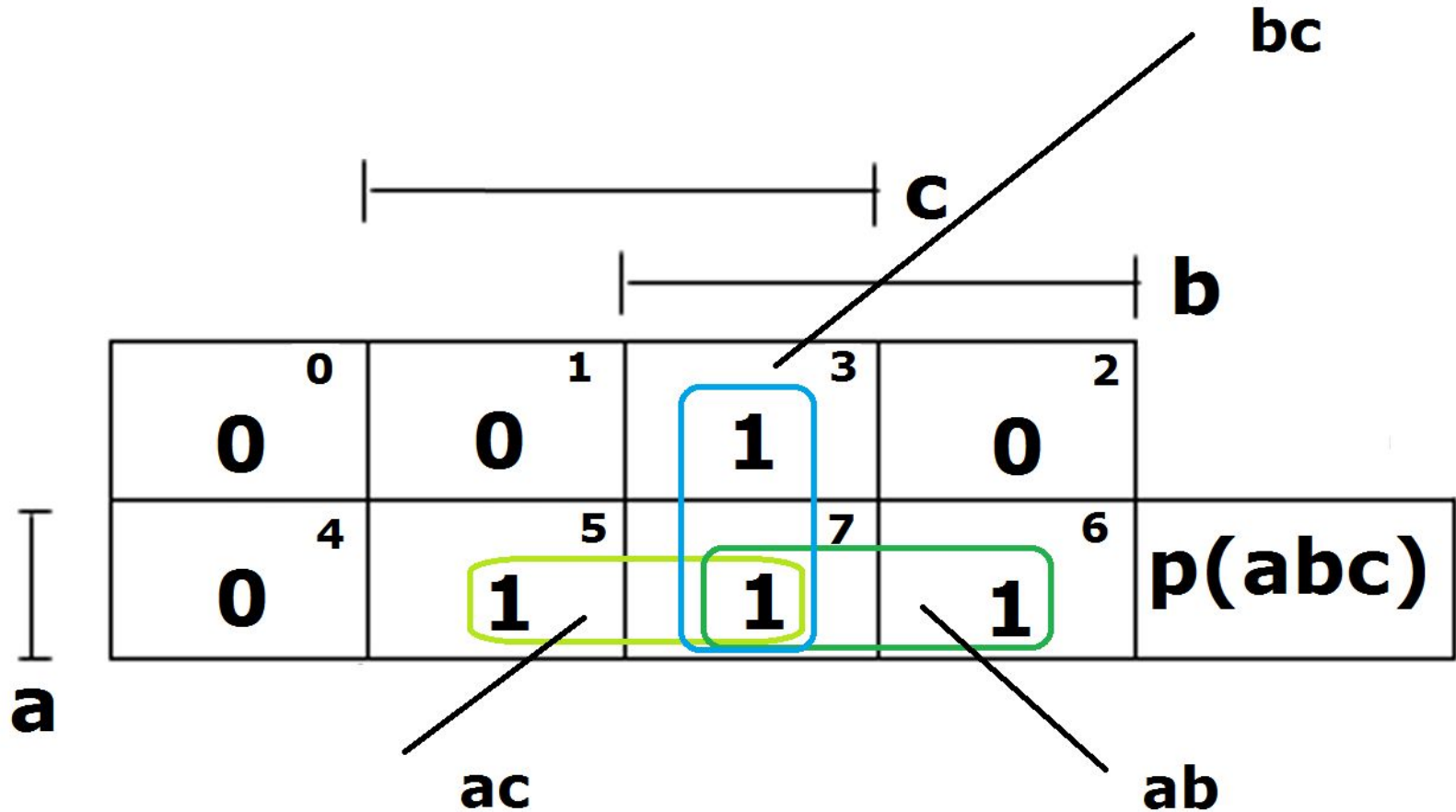
$$p(abc) = ab \vee ac \vee bc$$

Diagram illustrating the truth table for the function $p(abc) = ab \vee ac \vee bc$. The variables a , b , and c are represented by horizontal and vertical brackets above the table.

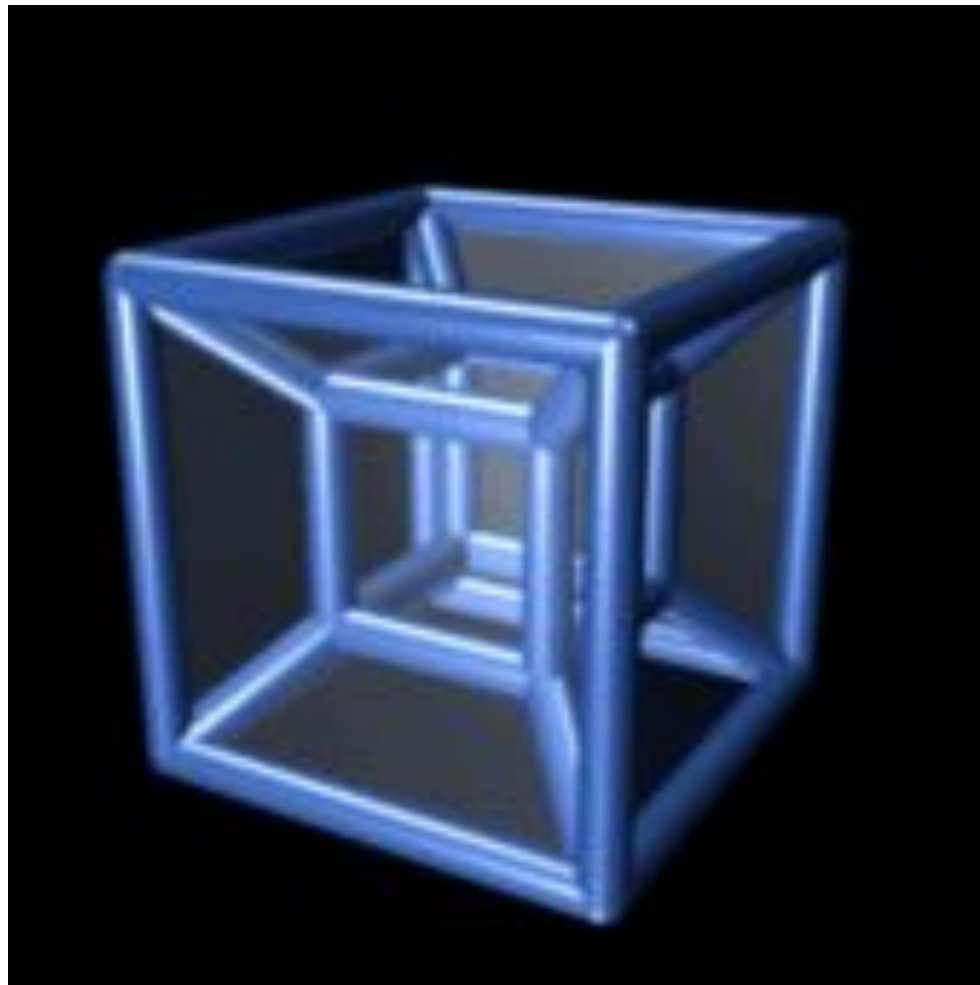
	----- c				
			----- b		
	000	001	011	010	
	0	0	1	0	
a	100	101	111	110	p(abc)
	0	1	1	1	

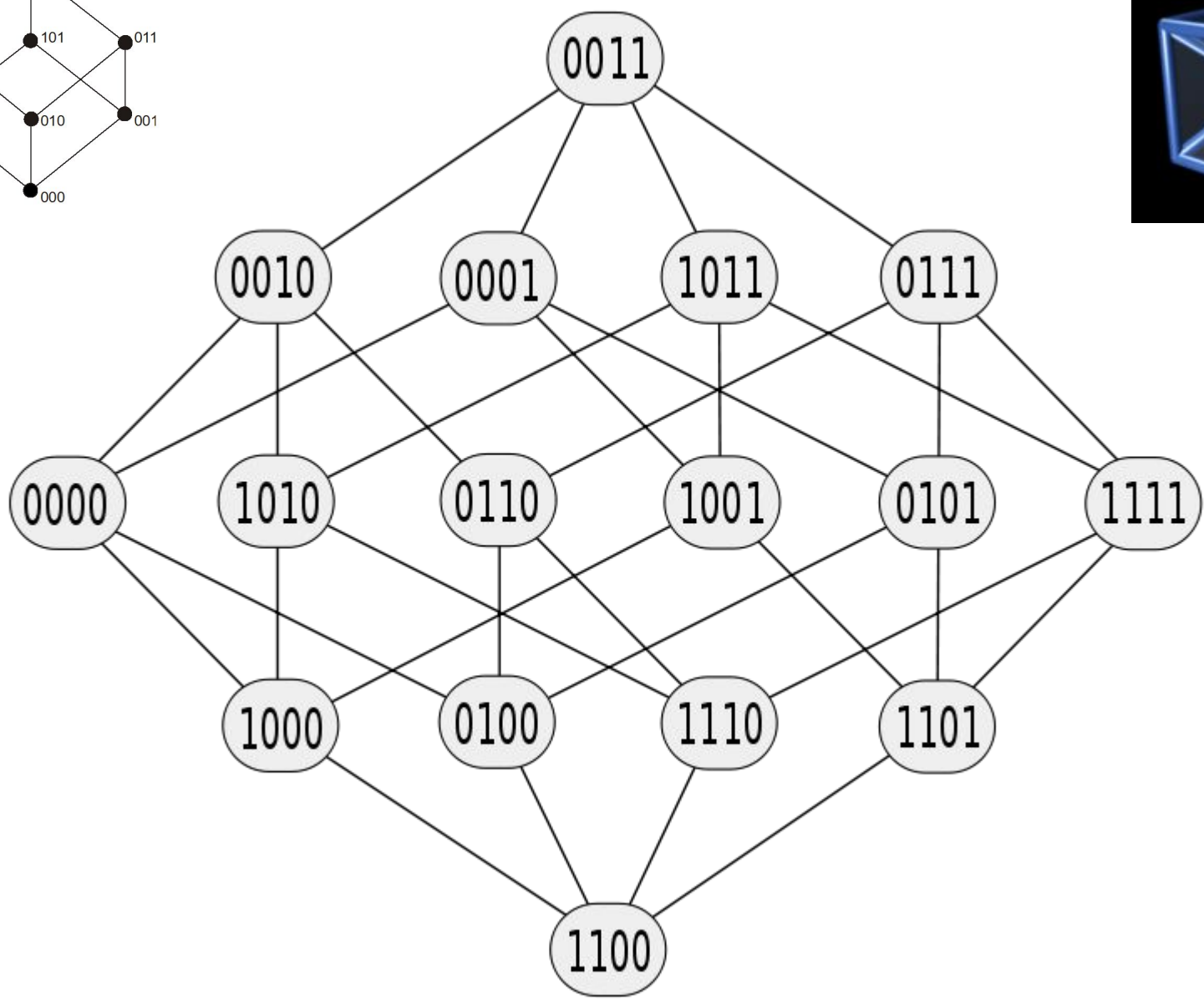
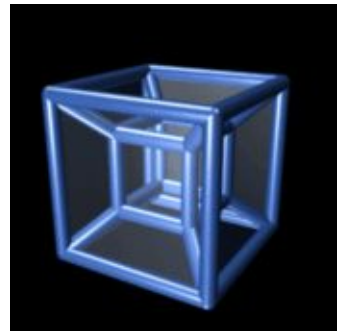
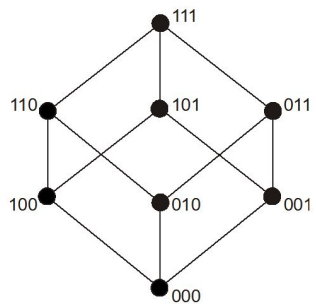
The truth table shows the output $p(abc)$ for all combinations of a , b , and c . The output is 1 for the combinations (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1), and (1,1,0), and 0 for all other combinations.

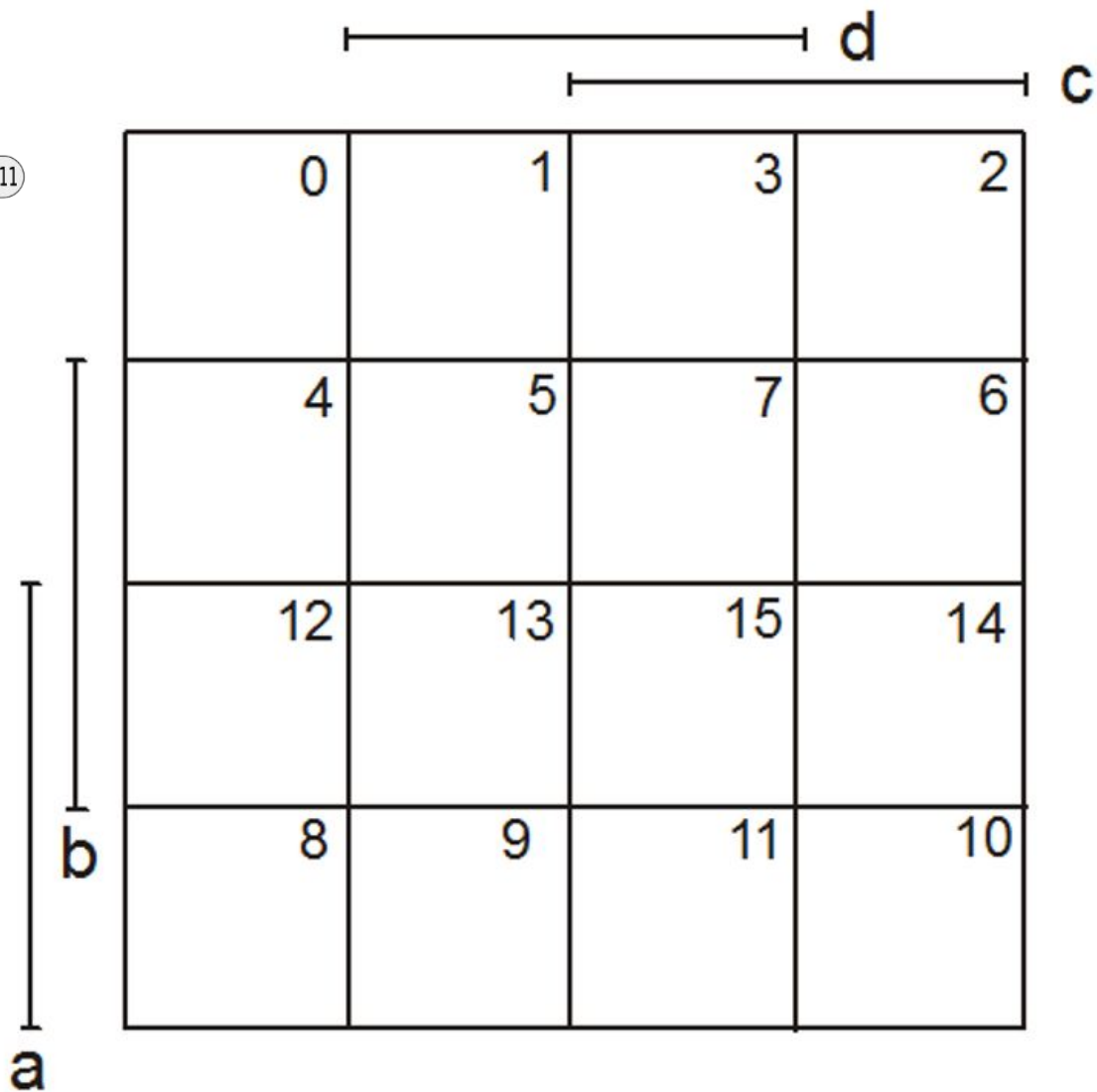
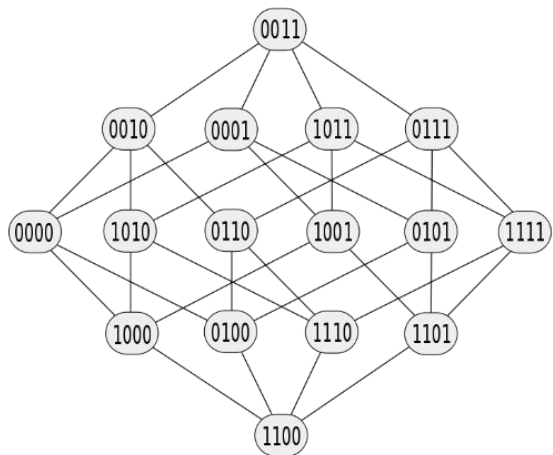
$$p(abc) = ab \vee ac \vee bc$$

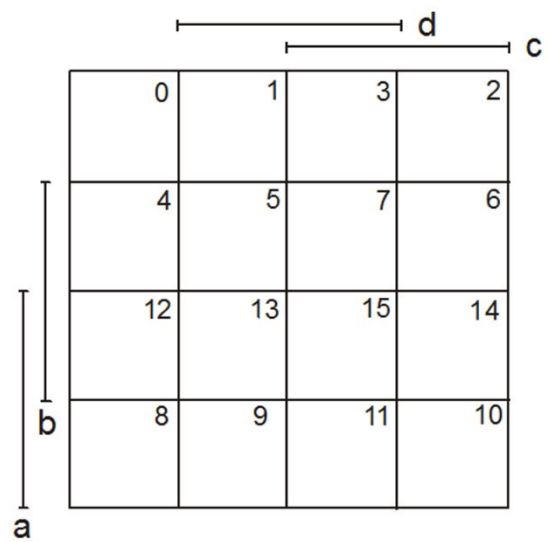
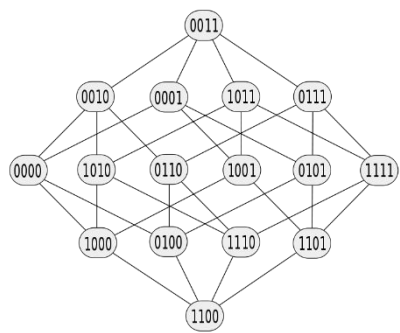
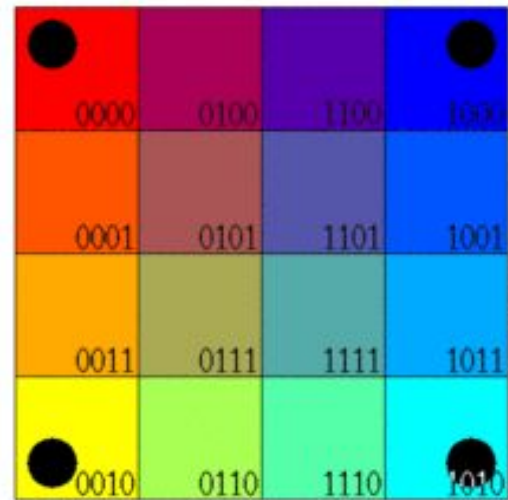
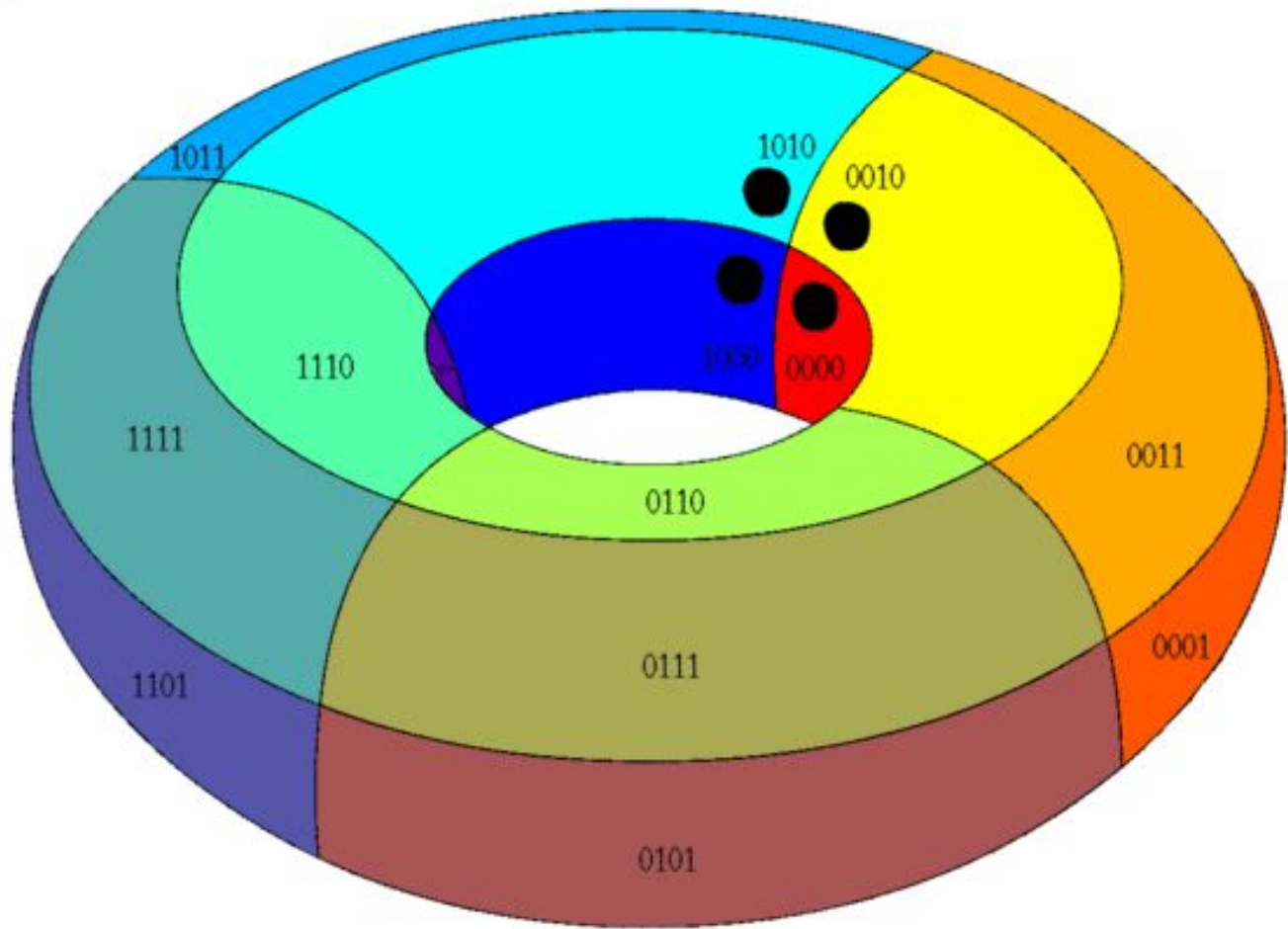


Карта Карно для $n=4$

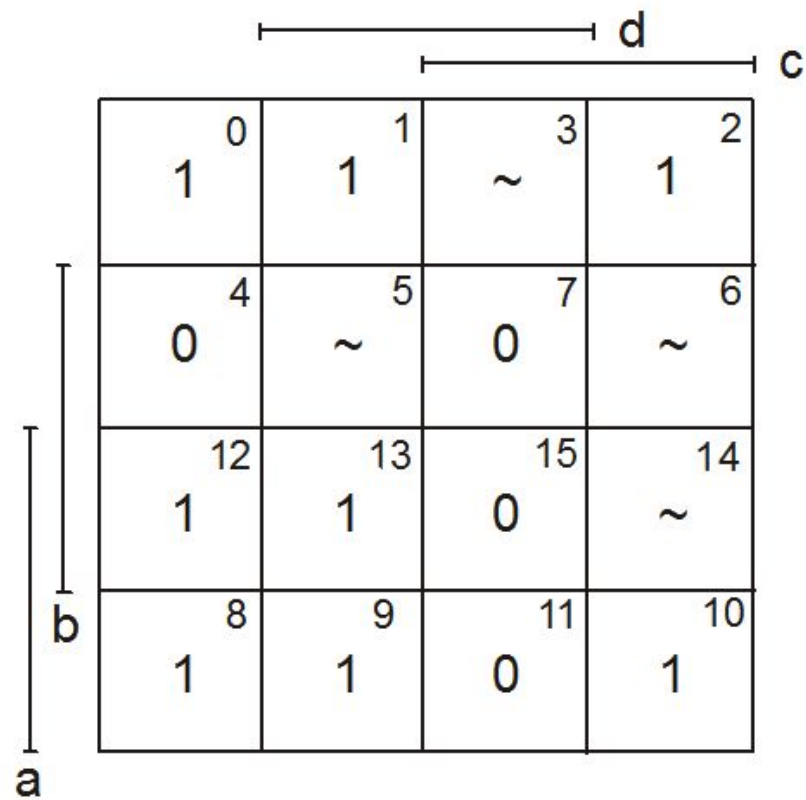


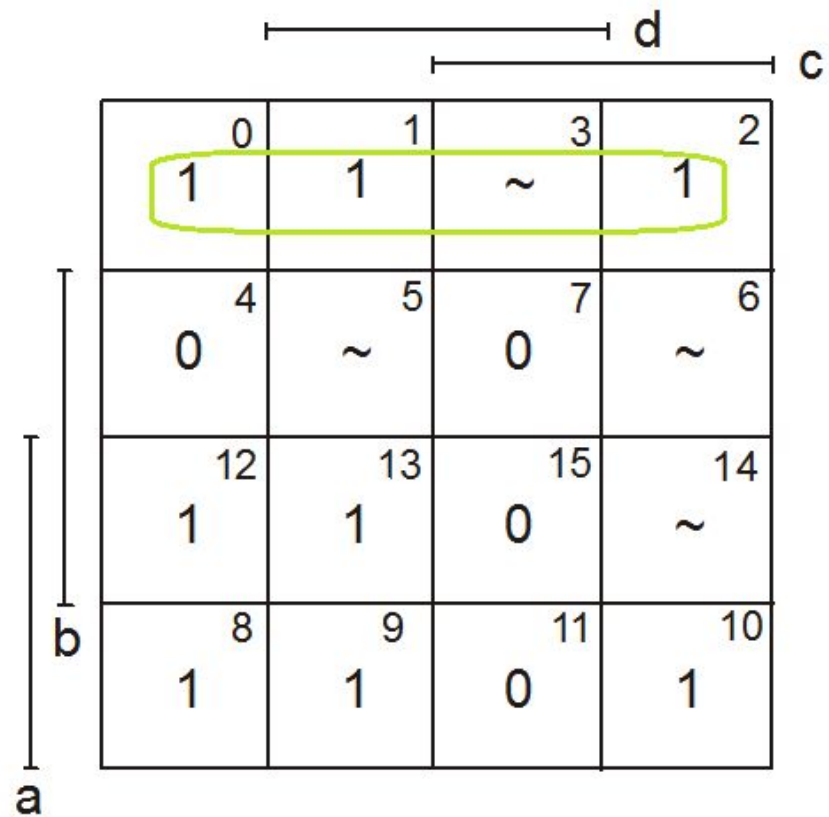




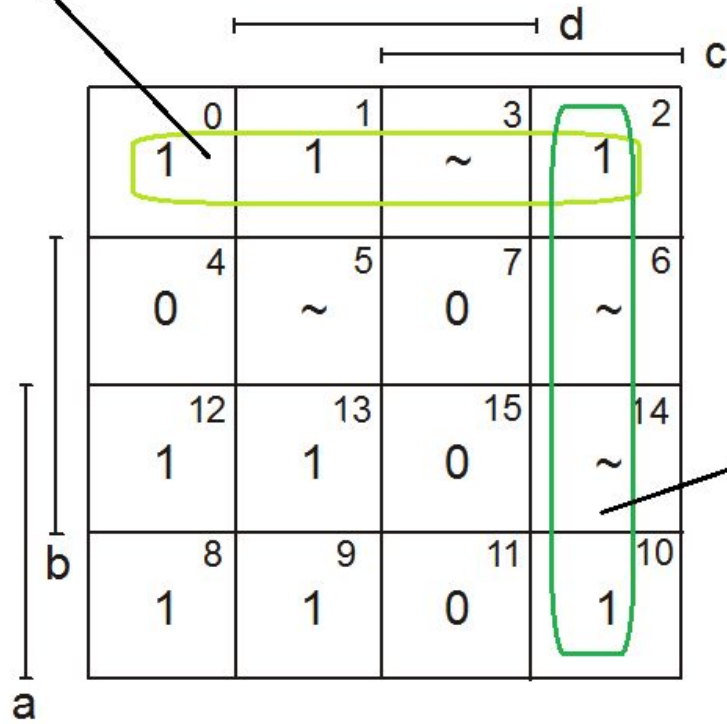


Пример.

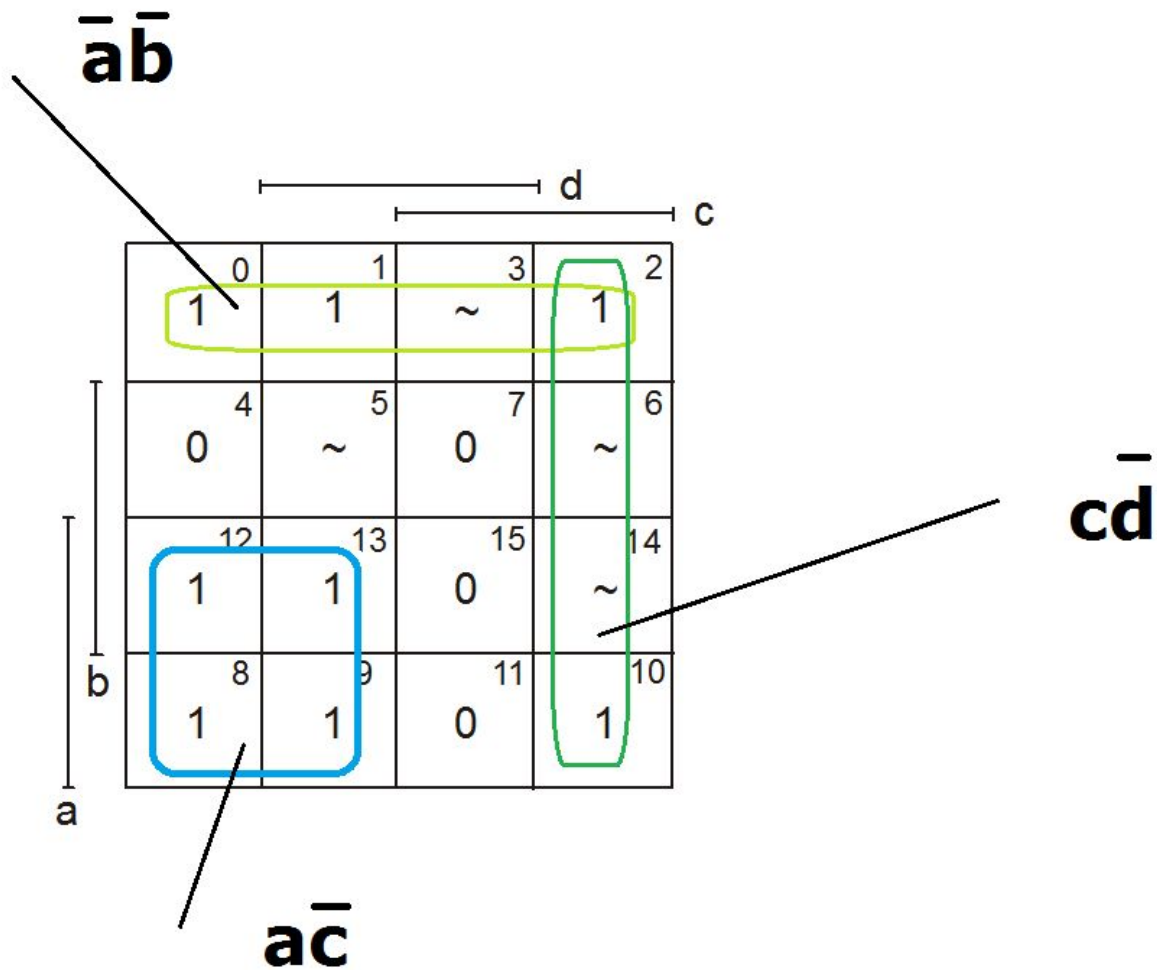




$\bar{a}\bar{b}$



$c\bar{d}$

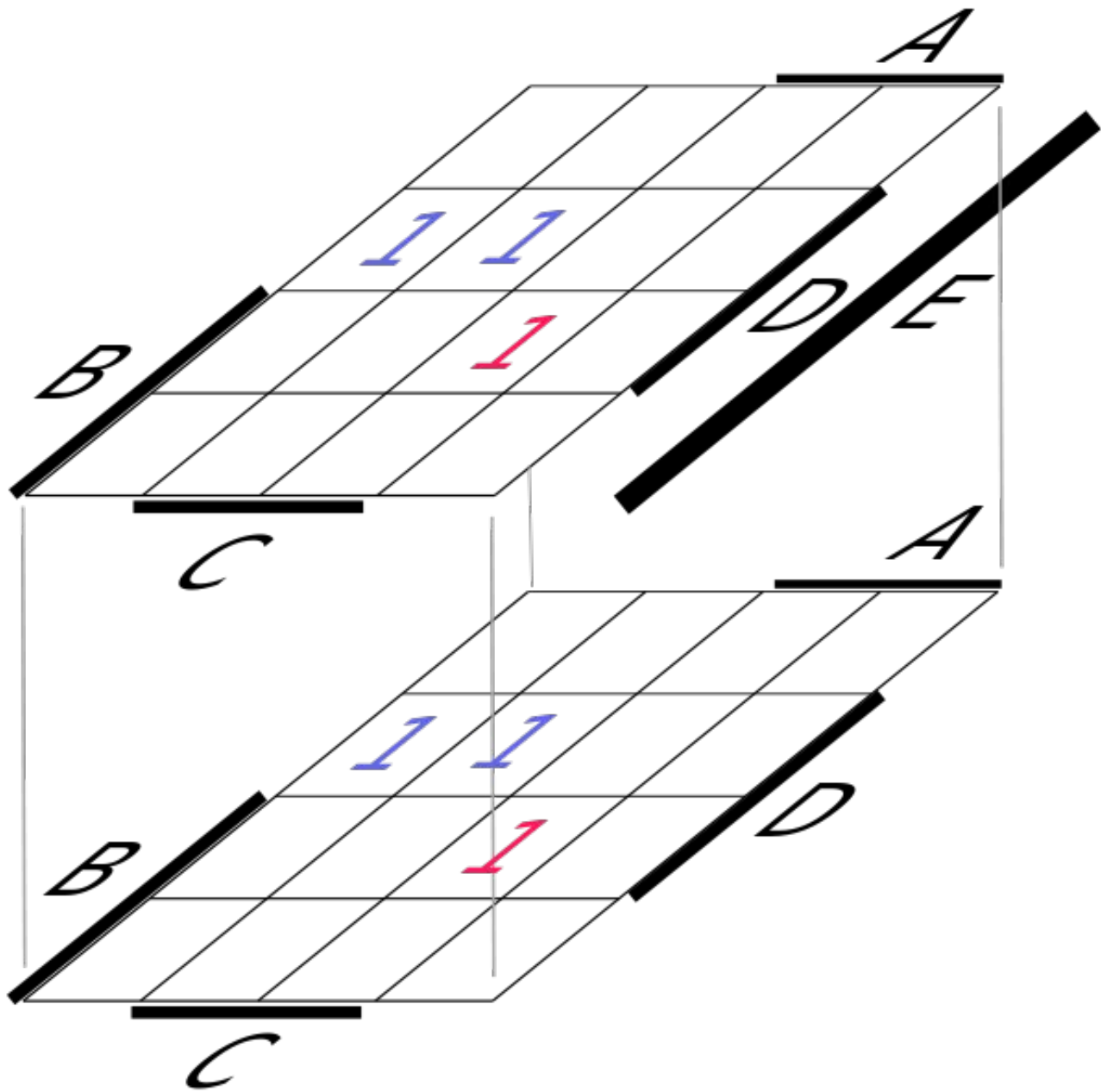


$$f(abcd) = \bar{a}\bar{b} \vee \bar{c}d \vee a\bar{c}$$

Карта

Карно для

$n=5$?



Карта

Карно для

$n=6$?

