Пермский государственный национальный исследовательский университет

VIVAT - CRESCAT - FLOREAT

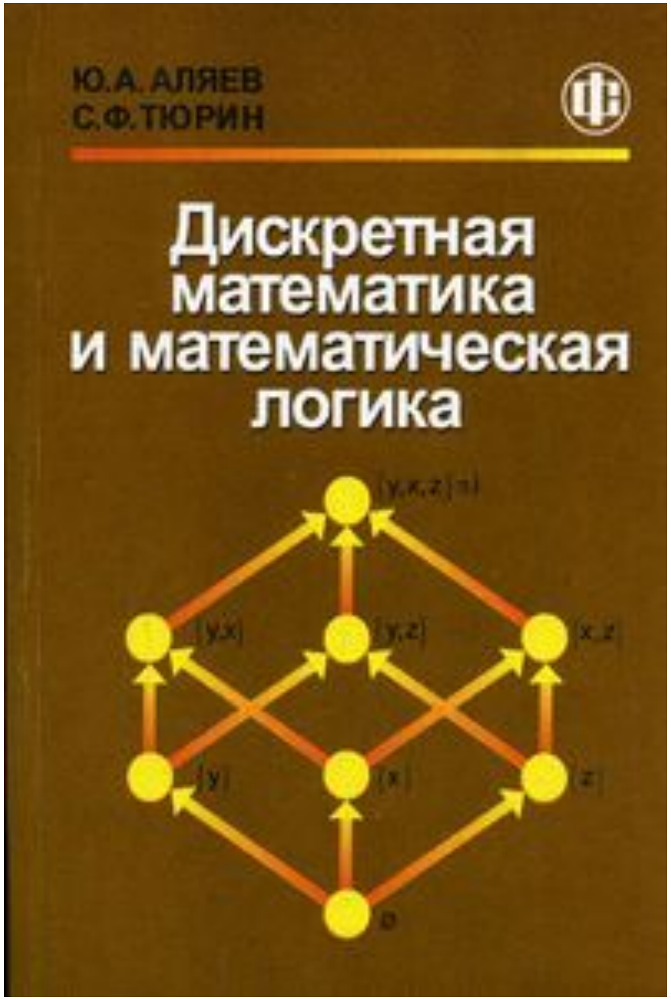
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА (ИТ)

- **Тема 2:Логика высказываний**

Лекция 4

- **Функциональная полнота систем логических функций**

С.94-145


Ю.А. АЛЯЕВ
С.Ф. ТЮРИН
Дискретная математика и математическая логика

С.47-145


С.Ф.ТЮРИН, Ю.А.АЛЯЕВ
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА:
практическая
дискретная математика
и
математическая логика

Логические функции одной и двух переменных называются элементарными

$$B \to B \qquad\qquad B^2 \to B$$

где В – бинарное множество {0,1}

1. Логические функции одной переменной

- **Сколько всего функций одной переменной?**

2.2

n=1

	Переключательная (логическая) функция				
x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	
0	0	1	0	1	2^0
1	0	0	1	1	2^1

2.Логические функции двух переменных

- **Сколько всего функций двух переменных?**

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

- **Сколько всего функций n переменных?**

$$2^{2^{n}}$$

ПФ двух переменных
N0-3

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
0	0	0	0	0	Конст.0		+			+	+
1	0	0	0	1	Вебба, Стрелка Пирса↓						
2	0	0	1	0	Запрет x2		+				
3	0	0	1	1	Не x2 $\bar{x}_2$				+	+	

N4-7

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	+	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю2⊕		+			+	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера|						

N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
8	1	0	0	0	Конъюнкция x2x1		+	+			+
9	1	0	0	1	Эквиваленция x2↔x1			+		+	
10	1	0	1	0	Повторение x1		+	+	+	+	+
11	1	0	1	1	Импликация x2→x1			+			

N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	+	+
13	1	1	0	1	Импликация $x1 \rightarrow x2$			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция x1 V x2		+	+			+
15	1	1	1	1	Константа 1			+		+	+

3.Суперпозиция и проблема функциональной полноты

Суперпозиция

- Подстановка в данную функцию вместо ее переменных других функций.

Проблема функциональной полноты

- **Каким должен быть минимальный состав элементарных логических функций, чтобы путём суперпозиции получить любую сколь угодно сложную логическую функцию от конечного числа переменных?**

- **Классы ПФ**

- **1) класс функций, сохраняющих константу 0.**
- **В этот класс входят функции, которые на нулевом наборе переменных принимают нулевое значение: f(00…0)=0.**

- **2) класс функций, сохраняющих константу 1.**
- **В этот класс входят функции, которые на единичном наборе переменных принимают единичное значение: f(11…1)=1.**

ПФ двух переменных
N0-3

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
0	0	0	0	0	Конст.0		+			+	+
1	0	0	0	1	Вебба, Стрелка Пирса↓						
2	0	0	1	0	Запрет x2		+				
3	0	0	1	1	$\bar{x}_2$ Не x2				+	+	

N4-7

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	+	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю2 $\oplus$		+			+	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера $\vert$						

N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	П	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2	Ф	0	1	с	л	м
8	1	0	0	0	Конъюнкция x2x1		+	+			+
9	1	0	0	1	Эквиваленция $x2 \leftrightarrow x1$			+		+	
10	1	0	1	0	Повторение x1		+	+	+	+	+
11	1	0	1	1	Импликация $x2 \rightarrow x1$			+			

N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	+	+
13	1	1	0	1	Импликация x1→x2			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция x1 V x2		+	+			+
15	1	1	1	1	Константа 1			+		+	+

Самодвойственность

Двойственность f и g

$$f(x_1 x_2 \ldots . x_n) = \overline{g}(\overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n)$$

$$\overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = x_1 x_2$$

Двойственность f и g

$$f(x_1 x_2 \ldots. x_n) = \overline{g}(\overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n)$$

$$\overline{\overline{x}_1 \overline{x}_2} = x_1 \vee x_2$$

- **Самодвойственность**

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n)$$

ПФ двух переменных
N0-3

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
0	0	0	0	0	Конст.0		+			+	+
1	0	0	0	1	Вебба, Стрелка Пирса↓						
2	0	0	1	0	Запрет x2		+				
3	0	0	1	1	Не x2 $\bar{x}_2$				+	+	

N4-7

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	+	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю2⊕		+			+	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера|						

N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	П	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2	Ф	0	1	с	л	м
8	1	0	0	0	Конъюнкция x2x1		+	+			+
9	1	0	0	1	Эквиваленция $x2 \leftrightarrow x1$			+		+	
10	1	0	1	0	Повторение x1		+	+	+	+	+
11	1	0	1	1	Импликация $x2 \rightarrow x1$			+			

N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	+	+
13	1	1	0	1	Импликация x1→x2			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция x1 V x2		+	+			+
15	1	1	1	1	Константа 1			+		+	+

- **Линейность**

Класс линейных функций.

- функция называется линейной, если возможно представление в виде линейного полинома, использующего функцию сложения по модулю 2:

$$f(x1x2)=c0\oplus c1x1\oplus c2x2,$$

где c0,c1,c2 – константы 0, 1.

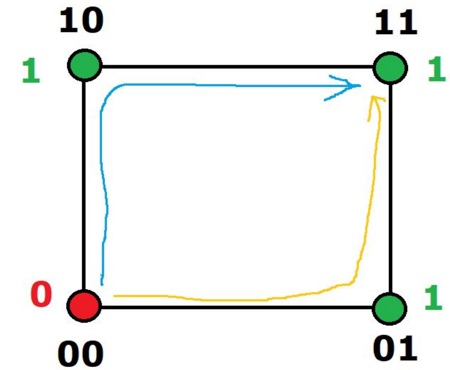
$f(x1x2)=c0 \oplus c1x1 \oplus c2x2$

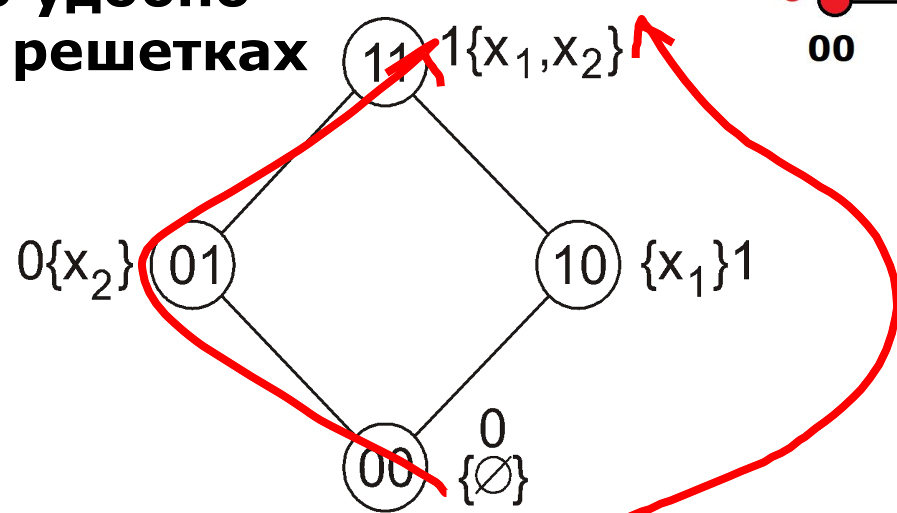
c_0	c_1	c_2	Вид полинома	
0	0	0	0	
0	0	1	x_2	
0	1	0	x_1	
0	1	1	$x_1 \oplus x_2$	$= \overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$
1	0	0	1	
1	0	1	$1 \oplus x_2$	$\overline{x_2}$
1	1	0	$1 \oplus x_1$	$\overline{x_1}$
1	1	1	$1 \oplus x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus \overline{x_2} = x_1 \leftrightarrow x_2$

- **Монотонность**

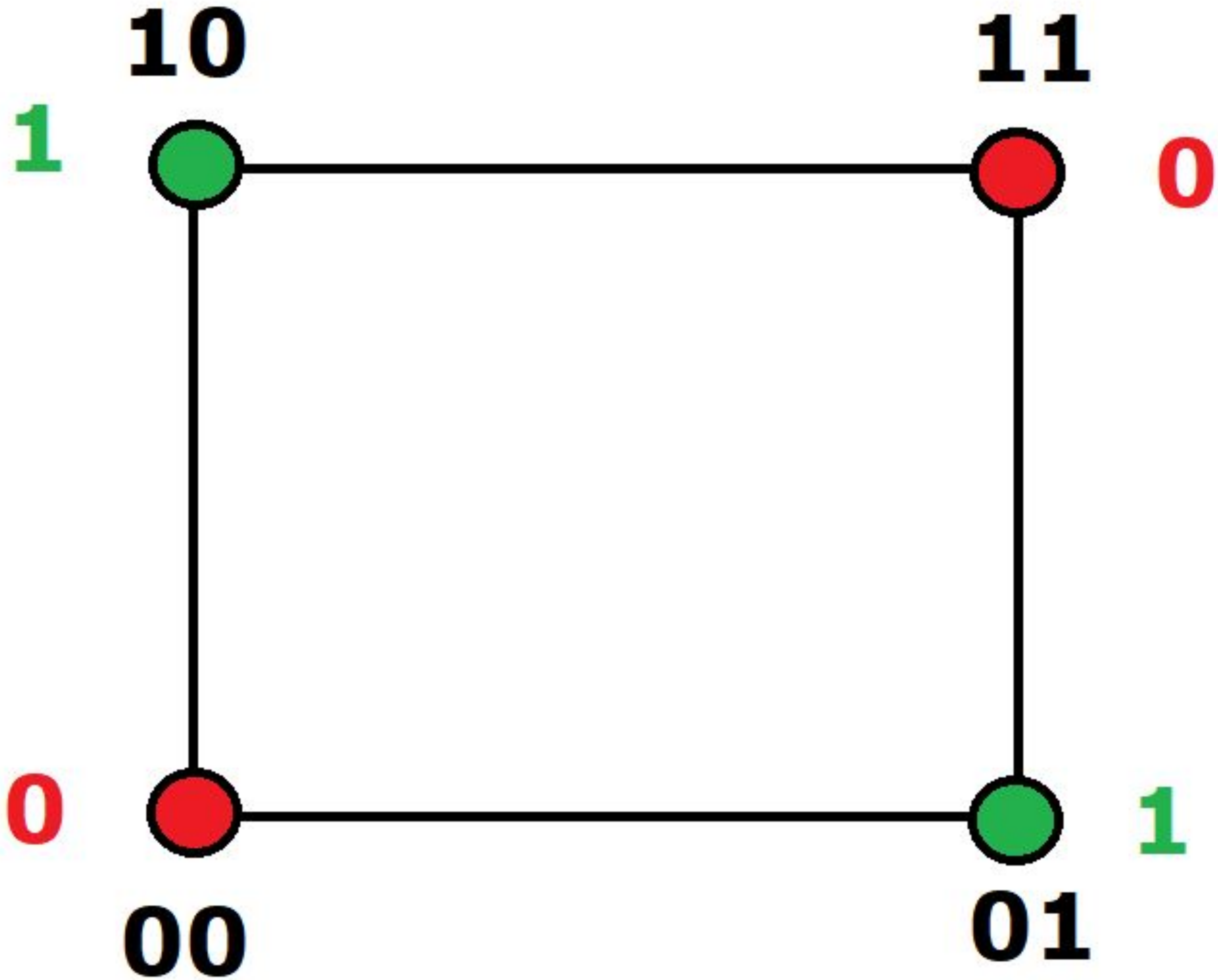
Класс монотонных функций.

- **Монотонная функция на большем сравнимом наборе переменных принимает не меньшие значения. Это удобно проверять на решетках Хассэ.**





010


10
11
1
0
0
1
00
01

ПФ двух переменных
N0-3

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
0	0	0	0	0	Конст.0		+			+	+
1	0	0	0	1	Вебба, Стрелка Пирса↓						
2	0	0	1	0	Запрет x2		+				
3	0	0	1	1	Не x2 $\bar{x}_2$				+	+	

N4-7

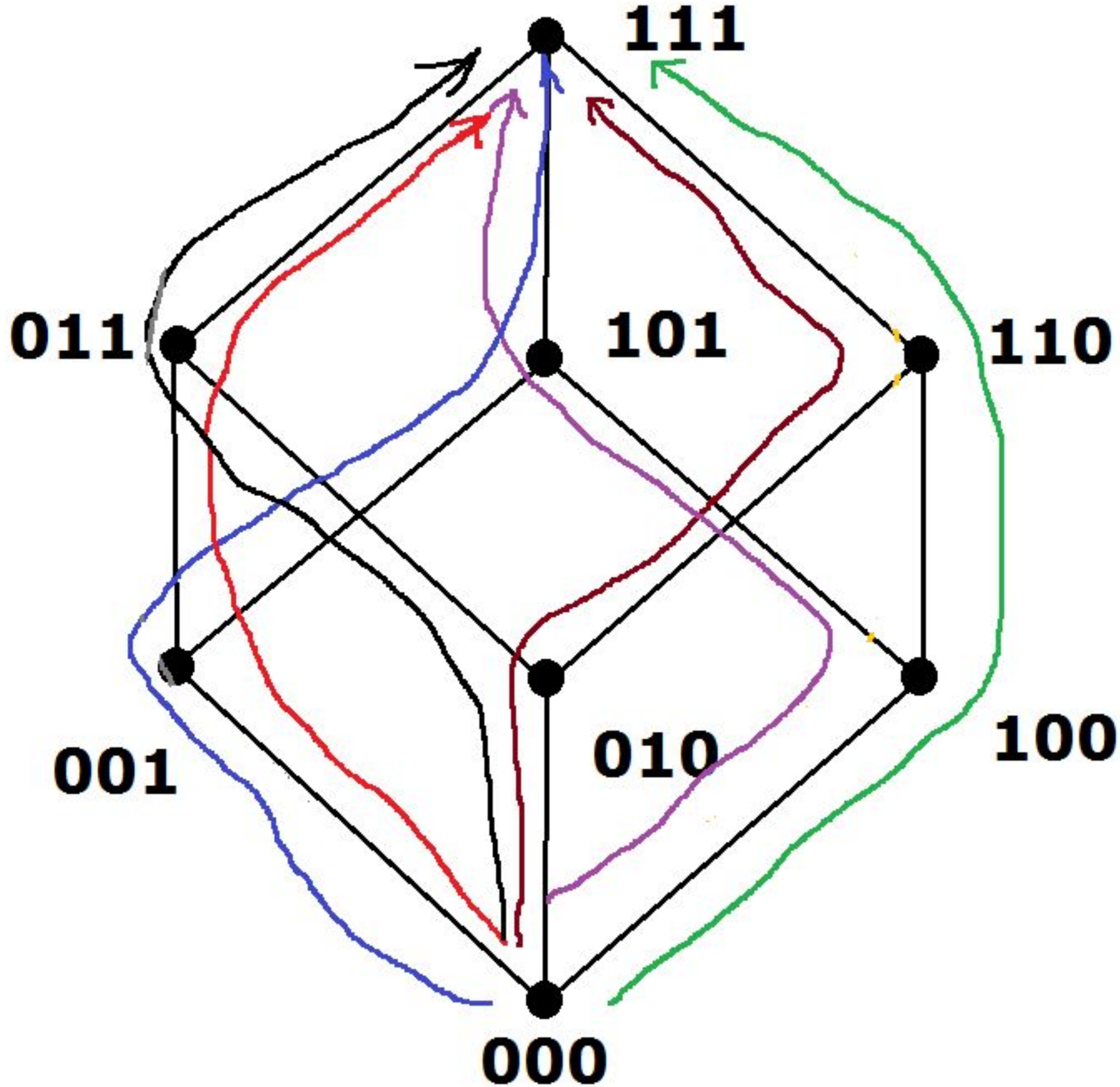
N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	П Ф	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	+	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю2⊕		+			+	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера|						

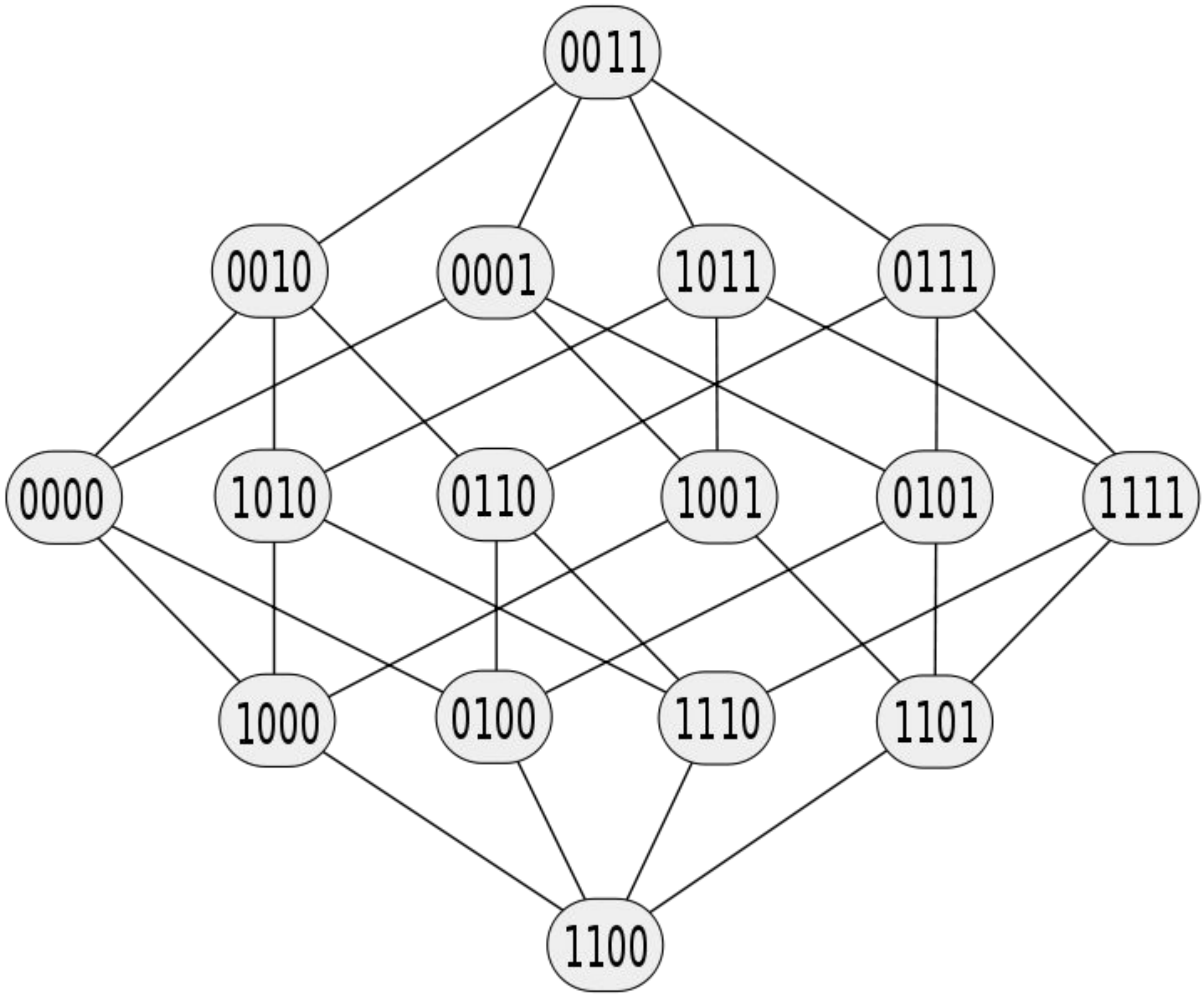
N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	П	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2	Ф	0	1	с	л	м
8	1	0	0	0	Конъюнкция x2x1		+	+			+
9	1	0	0	1	Эквиваленция x2↔x1			+		+	
10	1	0	1	0	Повторение x1		+	+	+	+	+
11	1	0	1	1	Импликация x2→x1			+			

N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	+	+
13	1	1	0	1	Импликация x1→x2			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция x1 V x2		+	+			+
15	1	1	1	1	Константа 1			+		+	+


111
011
101
110
001
010
100
000


0011
0010
0001
1011
0111
0000
1010
0110
1001
0101
1111
1000
0100
1110
1101
1100

- **3.Теорема (критерий) Поста**

Пост, Эмиль Леон (1897 – 1954)

- **Система функций называется функционально полной, если любая произвольная переключательная функция от любого числа переменных может быть представлена в виде суперпозиции логических функций из этой системы.**

- **для функциональной полноты систем логических функций необходимо и достаточно, чтобы они содержали следующие функции:**
- **не сохраняющую константу 0;**
- **не сохраняющую константу 1;**
- **не самодвойственную;**
- **не линейную;**
- **не монотонную.**

- **Функционально полные системы переключательных функций представляют собой базис.**
- **Всего можно получить 17 различных минимальных базисов из логических функций двух переменных.**

ПФ двух переменных N4-7

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	+	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю2 ⊕		+			+	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера |						

ПФ двух переменных
N8-11

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
8	1	0	0	0	Конъюнкция x2x1		+	+			+
9	1	0	0	1	Эквиваленция $x2 \leftrightarrow x1$			+		+	
10	1	0	1	0	Повторение x1		+	+	+	+	+
11	1	0	1	1	Импликация $x2 \to x1$			+			

ПФ двух переменных N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	+	+
13	1	1	0	1	Импликация $x1 \to x2$			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция X1 V x2		+	+			+
15	1	1	1	1	Константа 1			+		+	+

- **Имеются базисы, состоящие из двух функций:**

$$\begin{cases} \text{И} \\ \text{НЕ,} \end{cases} \begin{cases} \text{ИЛИ} \\ \text{НЕ.} \end{cases}$$

59

Примеры базисов

- **Импликативный базис**

$$\begin{cases} \rightarrow \\ \text{НЕ}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \leftarrow \\ 0. \end{cases}$$

Примеры базисов

- **Базис Жегалкина:**

$$\begin{cases} \oplus \\ \text{И} \\ \text{НЕ}. \end{cases}$$

61

- **Не минимальное множество (не базис) – из трех функций:**

$$\begin{cases} \text{И} \\ \text{ИЛИ} \\ \text{НЕ.} \end{cases}$$

- Имеются функции, обладающие всеми пятью отмеченными свойствами. Таковы функции $\downarrow$ $|$.
- Часто их называют соответственно ИЛИ-НЕ, И-НЕ.
- Таким образом, это базисы, состоящие из одной функции.

ПФ двух переменных
N0-3

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
0	0	0	0	0	Конст.0		+			+	+
1	0	0	0	1	Вебба, Стрелка Пирса↓						
2	0	0	1	0	Запрет x2		+				
3	0	0	1	1	Не x2				+	+	

$\bar{x}_2$

N4-7

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
4	0	1	0	0	Запрет x1		+				
5	0	1	0	1	Не x1				+	+	
6	0	1	1	0	Сложение по модулю2⊕		+			+	
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера|						

N8-11

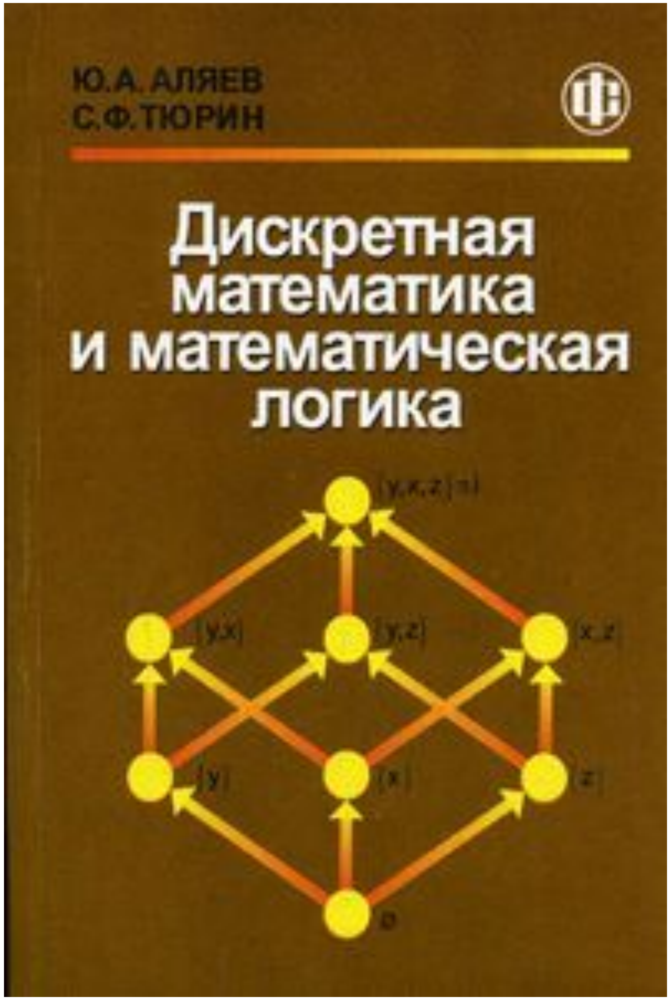
N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0	x2		0	1	с	л	м
8	1	0	0	0	Конъюнкция x2x1		+	+			+
9	1	0	0	1	Эквиваленция x2↔x1			+		+	
10	1	0	1	0	Повторение x1		+	+	+	+	+
11	1	0	1	1	Импликация x2→x1			+			

N12-15

N	8	4	2	1							
	1	0	1	0	x1 x2	ПФ	Свойства ПФ				
	1	1	0	0			0	1	с	л	м
12	1	1	0	0	Повторение x2		+	+	+	+	+
13	1	1	0	1	Импликация x1→x2			+			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция x1 V x2		+	+			+
15	1	1	1	1	Константа 1			+		+	+

• Т3. МИНИМИЗАЦИЯ ФОРМУЛ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

С.118-145

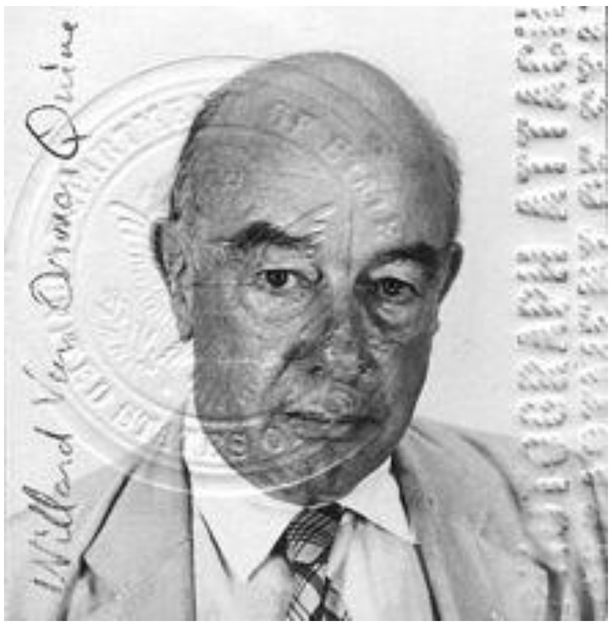

Ю.А. АЛЯЕВ
С.Ф.ТЮРИН
Дискретная математика и математическая логика

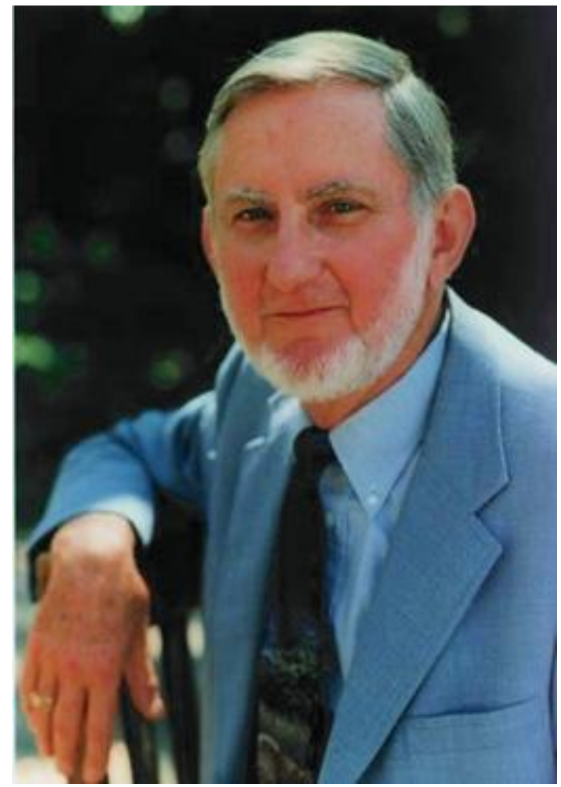
С.62-102


С.Ф.ТЮРИН, Ю.А.АЛЯЕВ
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА:
практическая
дискретная математика
и
математическая логика

- **Метод Квайна-Мак-Класки.**

Willard Van Orman Quine (1908-2000), McCluskey (1929-2016)





$$p(abc)_2 = 011, 101, 110, 111$$

$$\begin{array}{r} 011 \\ 101 \\ 110 \\ \hline 111 \end{array}$$

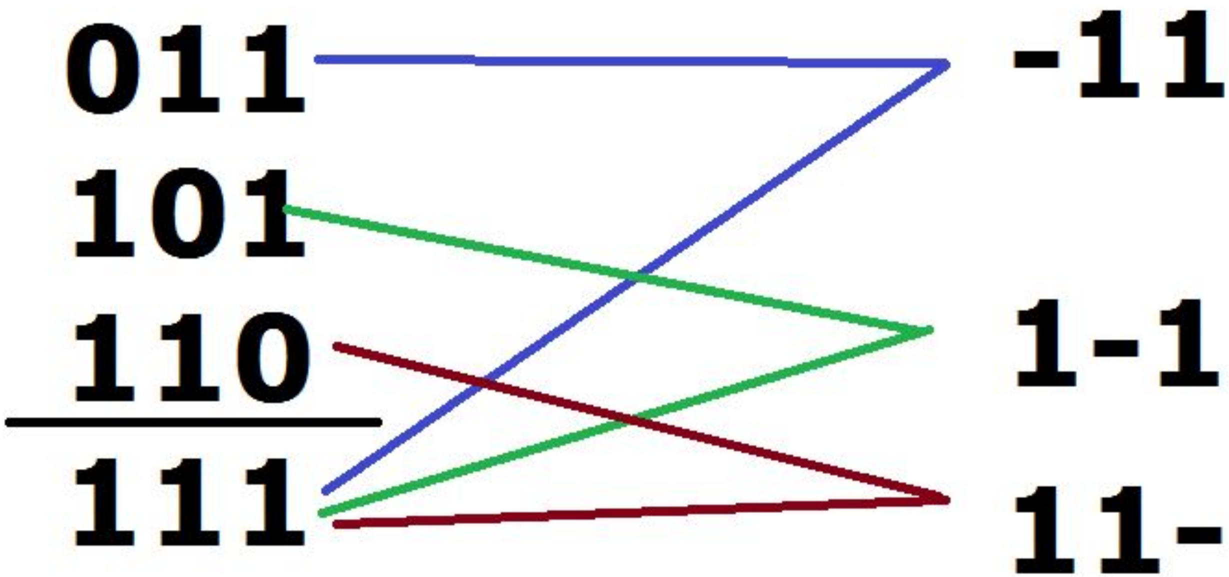

011
101
110
111
-11
1-1
11-

Таблица Квайна

	Конституенты			
Импликанты	**011**	**101**	**110**	**111**
-11	+			+
1-1		+		+
11-			+	+

$$p(abc) = (-11) \vee (1-1) \vee (11-)$$

$$p(abc) = bc \vee ab \vee ac$$

$$f(x_1x_2x_3) = \overset{1}{x_1}\overset{1}{x_2}\overset{1}{x_3} \vee \overset{1}{x_1}\overset{0}{\overline{x_2}}\overset{1}{x_3} \vee \overset{0}{\overline{x_1}}\overset{0}{\overline{x_2}}\overset{1}{x_3} \vee \overset{0}{\overline{x_1}}\overset{0}{\overline{x_2}}\overset{0}{\overline{x_3}} \vee \overset{1}{x_1}\overset{1}{x_2}\overset{0}{\overline{x_3}}$$

- **Сгруппируем эти конституенты единицы по числу единиц:**

000
001 00-

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee$
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$

I	000	00-
II	001	-01
III	101	
	110	1-1
IV	111	11-

Импликантная таблица

Табл. покрытий

	Простые импликанты			Конституенты единиц				
				7	5	1	0	6
	x_1	x_2	x_3	111	101	001	000	110
A	0	0	-			+	+	
B	-	0	1		+	+		
C	1	-	1	+	+			
D	1	1	-	+				+

ядро

ядро

$(C \vee D)\ (B \vee C)(A \vee B)\ A\ D$

$$\text{КП} = (C \vee D)(B \vee C)(A \vee B)AD = ?$$

$$КП = (C \vee D)(B \vee C)(A \vee B)AD$$

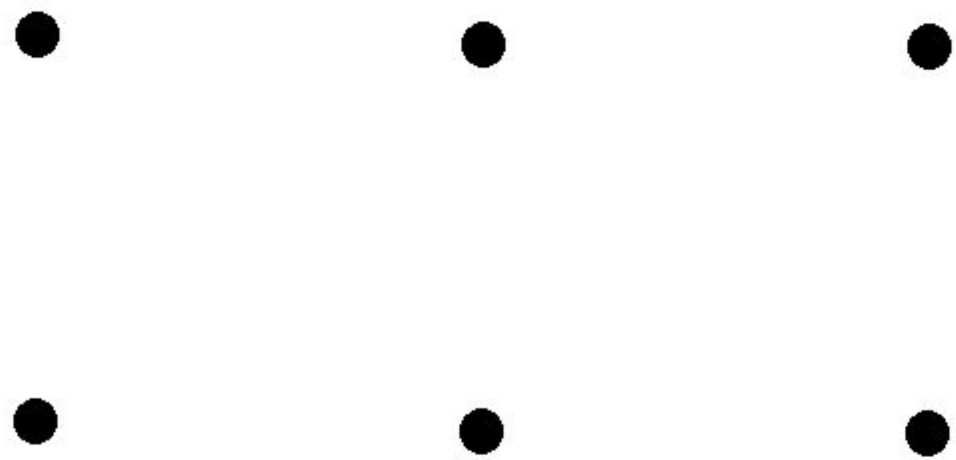
$$КП = \underbrace{(C \vee D)}_{1}(B \vee C)\underbrace{(A \vee B)}_{1}AD$$

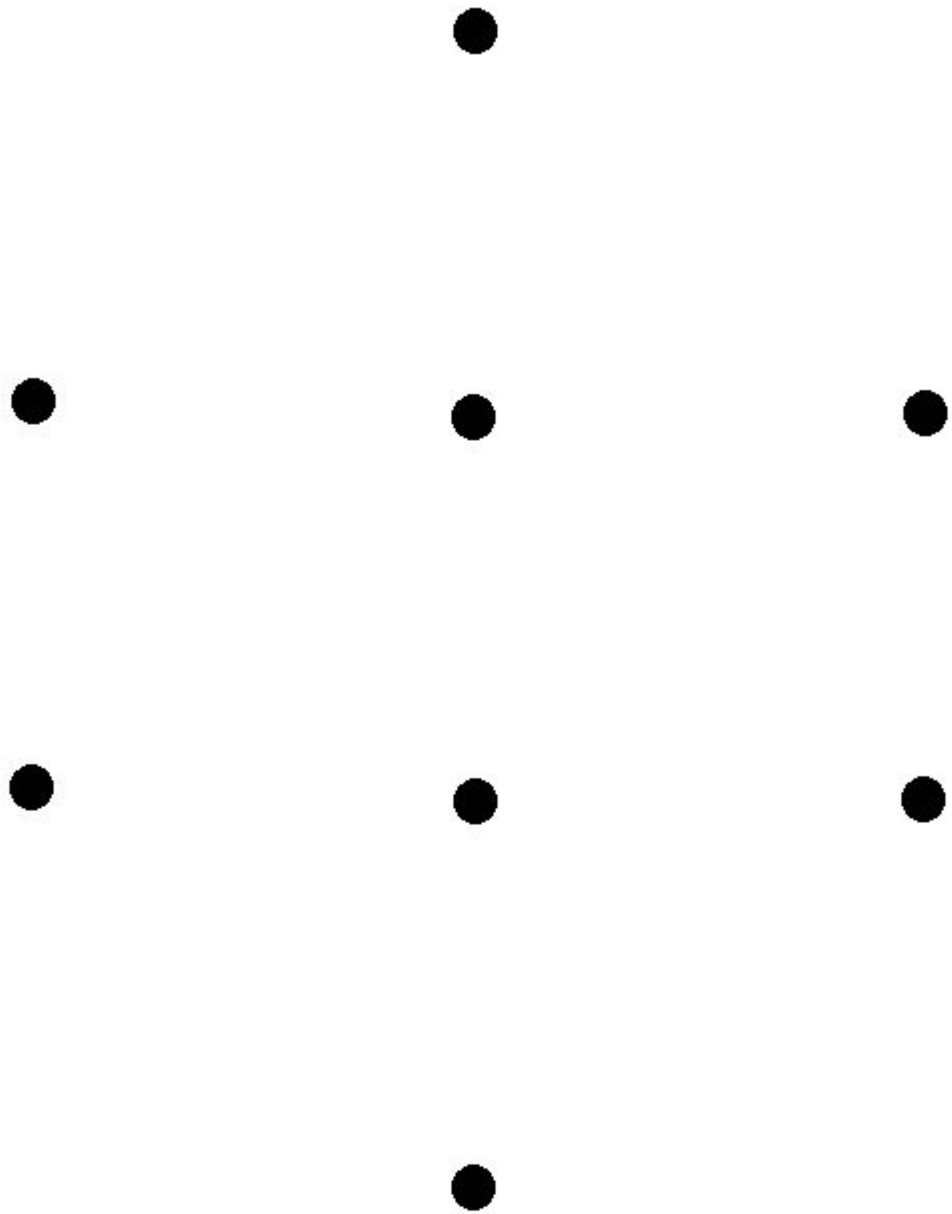
$$\text{КП} = (B \vee C)AD$$

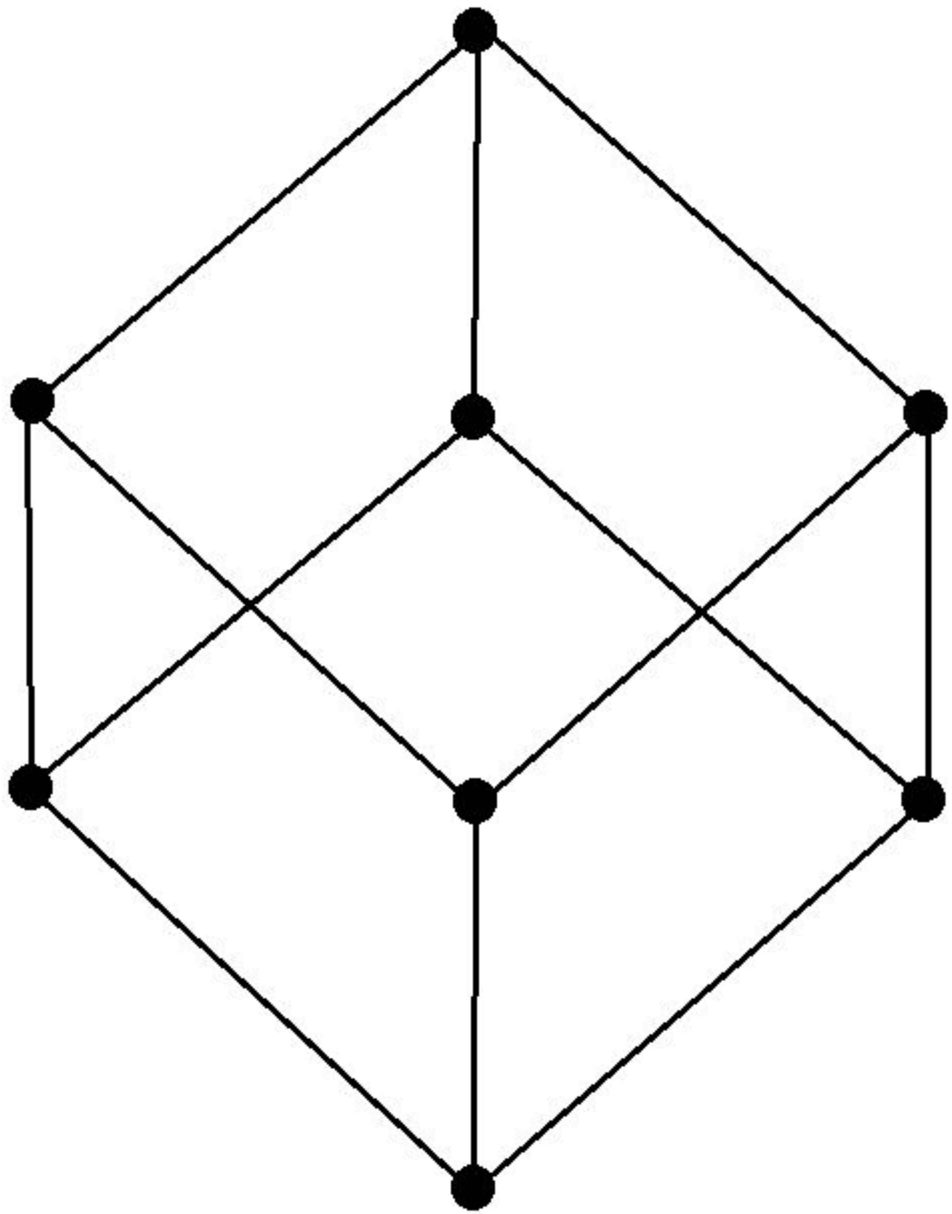
$$f_1 = \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2$$

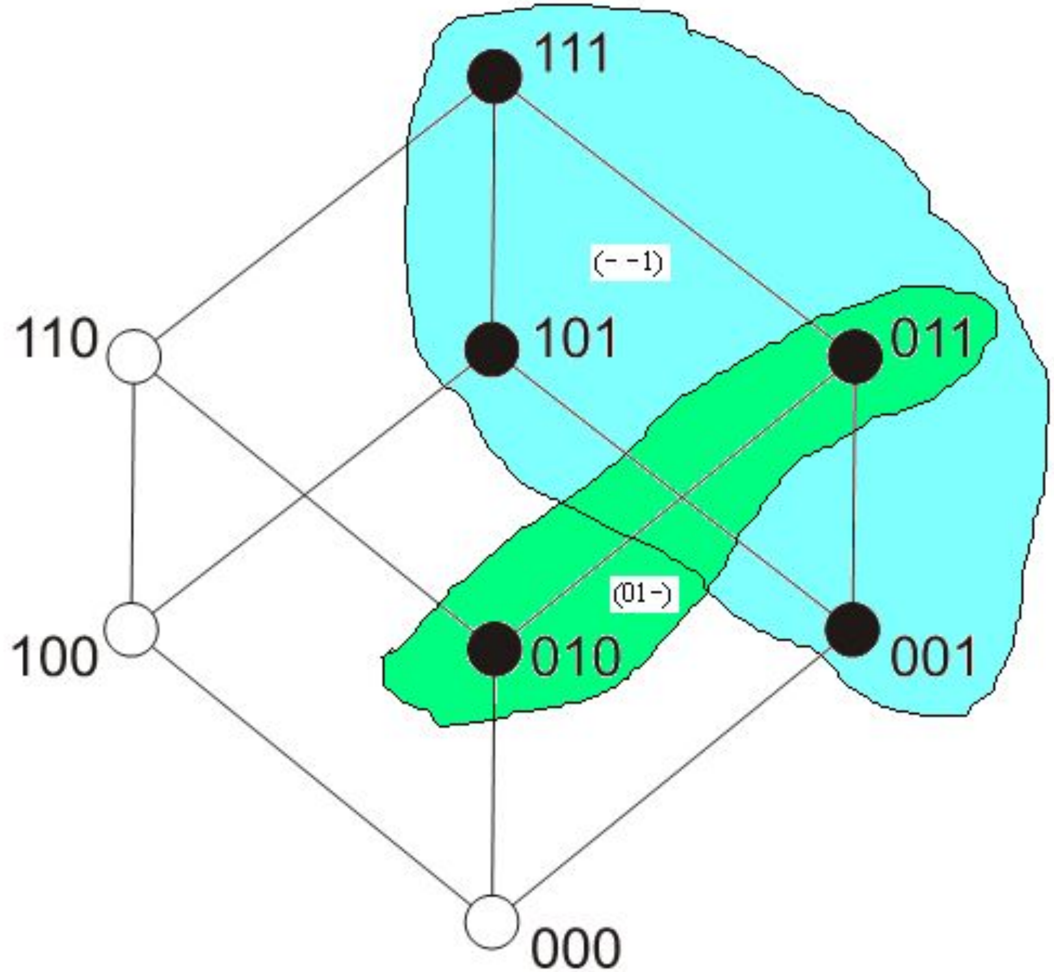
$$f_2 = x_1 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2$$

- **Минимизация по кубу соседних чисел**



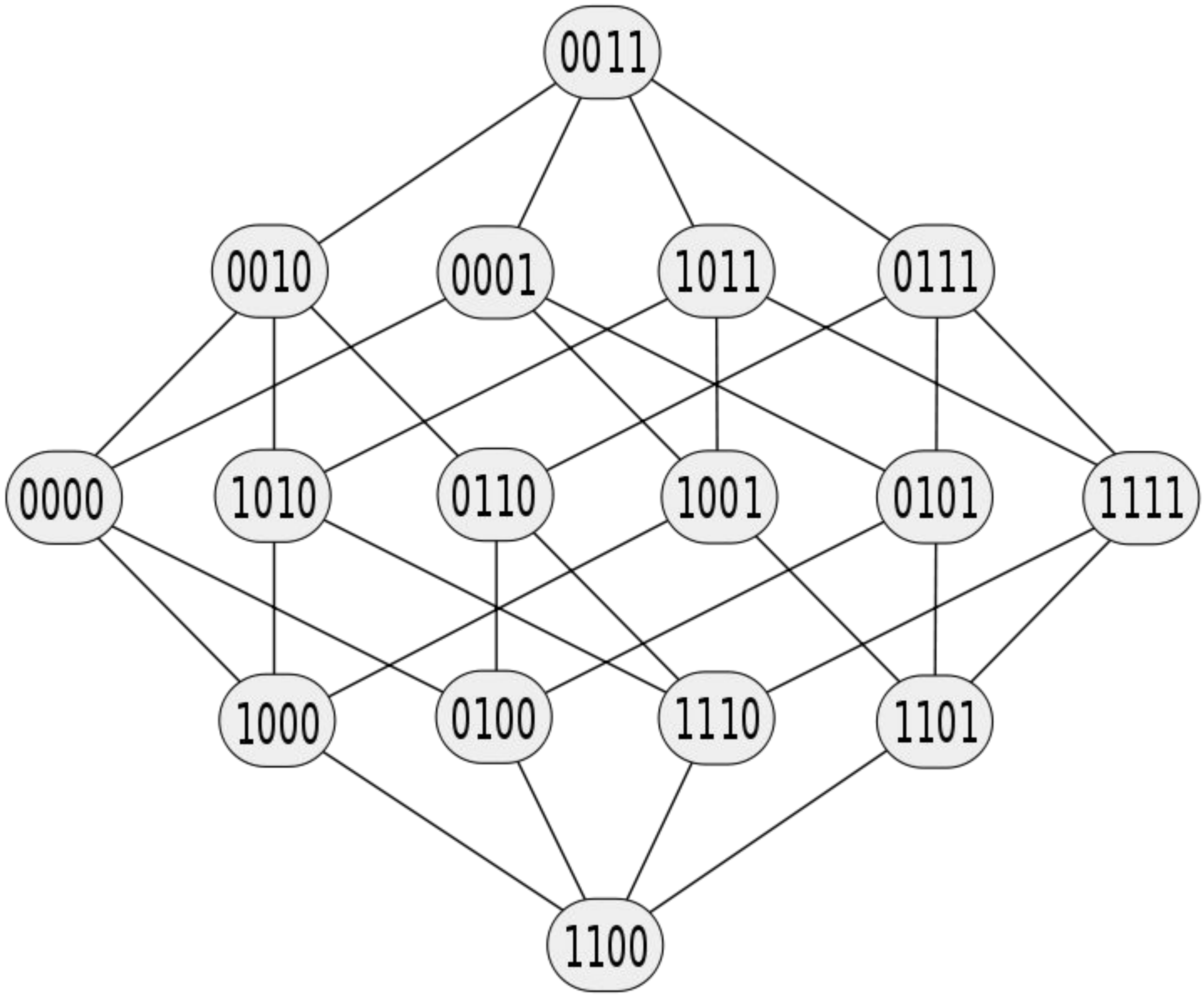




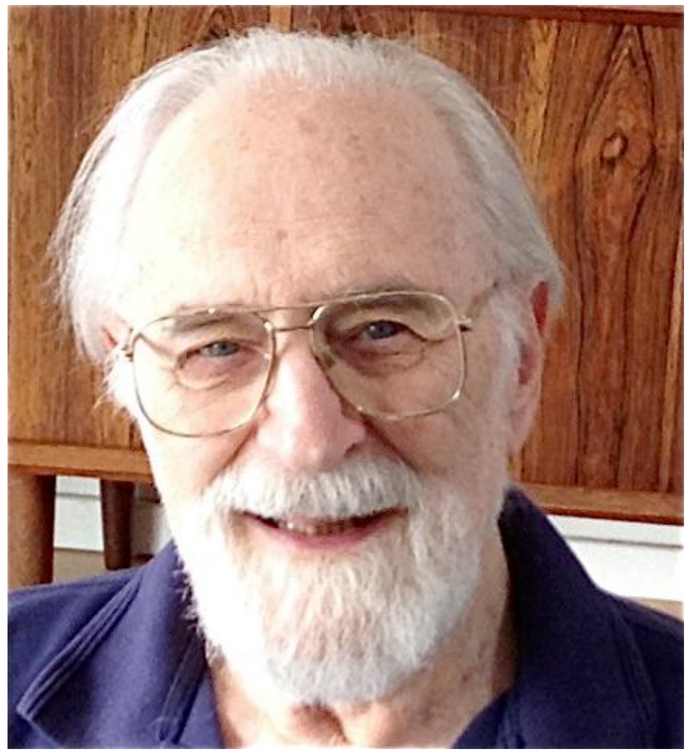


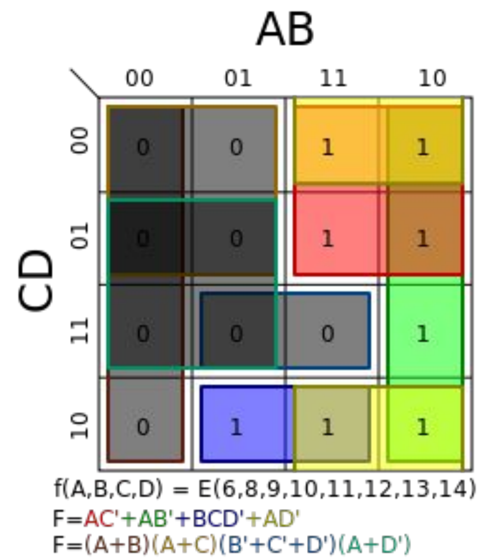
$$f(abc) = (--1) \vee (01-) = c \vee \bar{a}b$$

МИНИМИЗАЦИЯ ПО КАРТАМ КАРНО

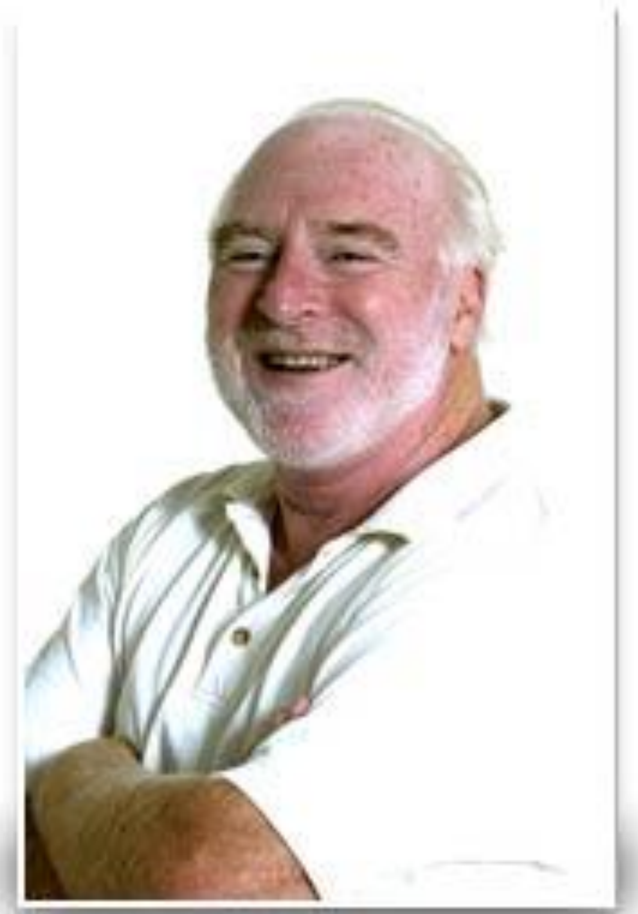

0011
0010
0001
1011
0111
0000
1010
0110
1001
0101
1111
1000
0100
1110
1101
1100

Maurice Karnaugh (1924) is an American physicist, famous for the Karnaugh mapMaurice Karnaugh (1924) is an American physicist, famous for the Karnaugh map used in Boolean algebra.

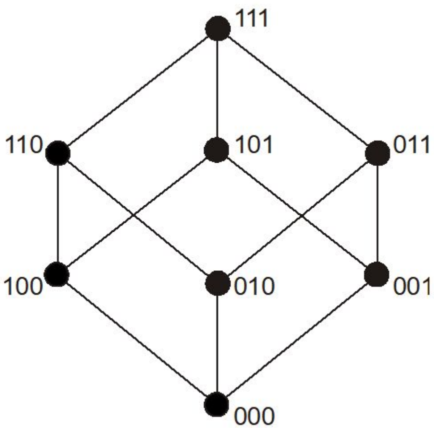




Edward W. Veitch (1924 –2013) was an American computer scientist.



Карта Карно для n=3



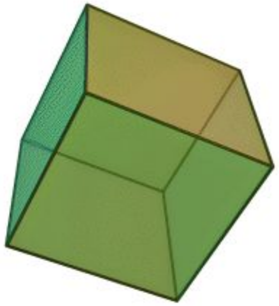
c младшая

b

000	001	011	010	
100	101	111	110	f(abc)

a

старшая переменная



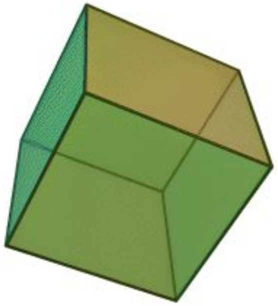
$$p(abc) = 3, 5, 6, 7[0, 1, 2, 4]$$

c

b

0^{0}	0^{1}	1^{3}	0^{2}	
0^{4}	1^{5}	1^{7}	1^{6}	p(abc)

a



$$p(abc) = ab \vee ac \vee bc$$

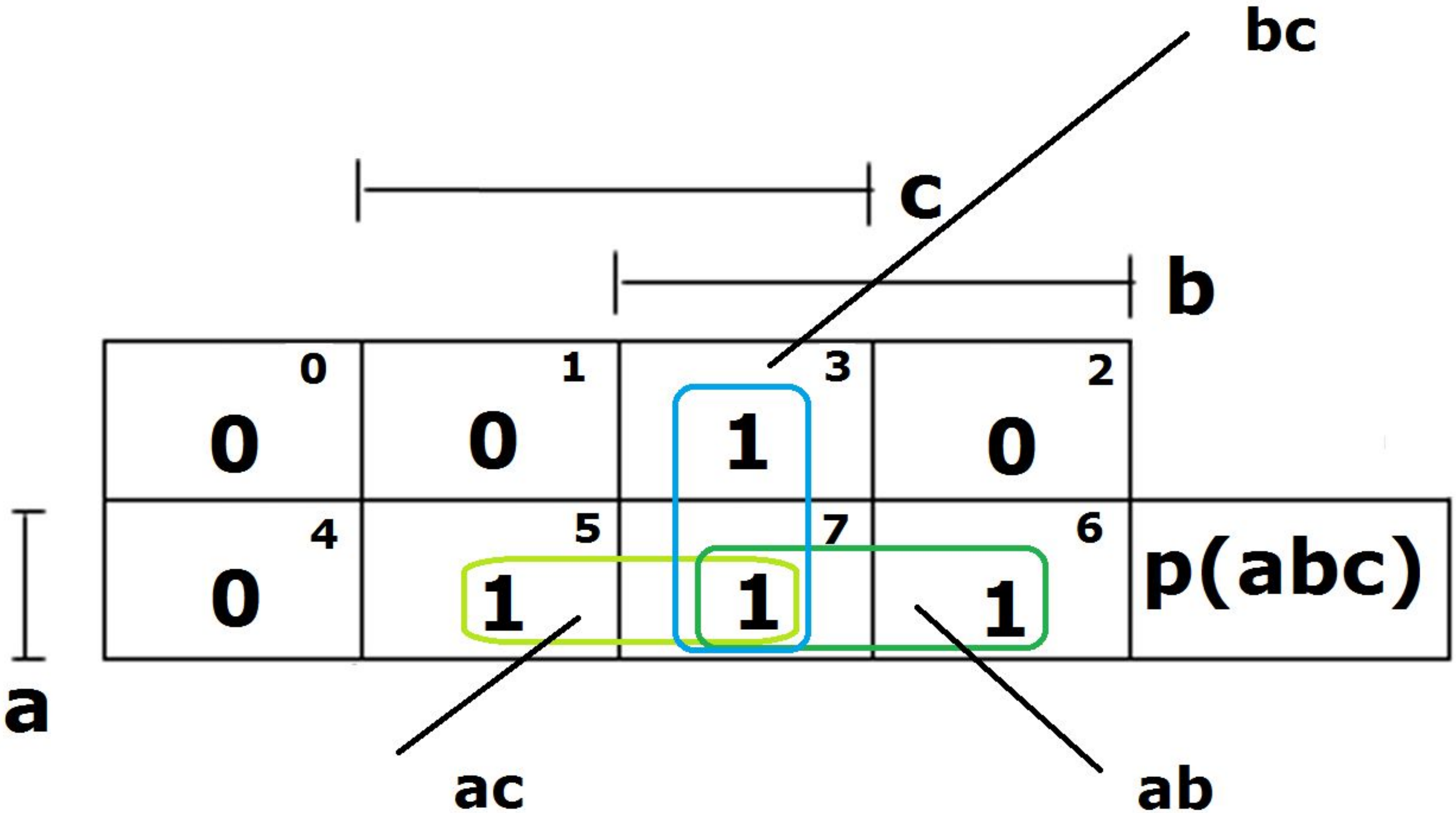
c

b

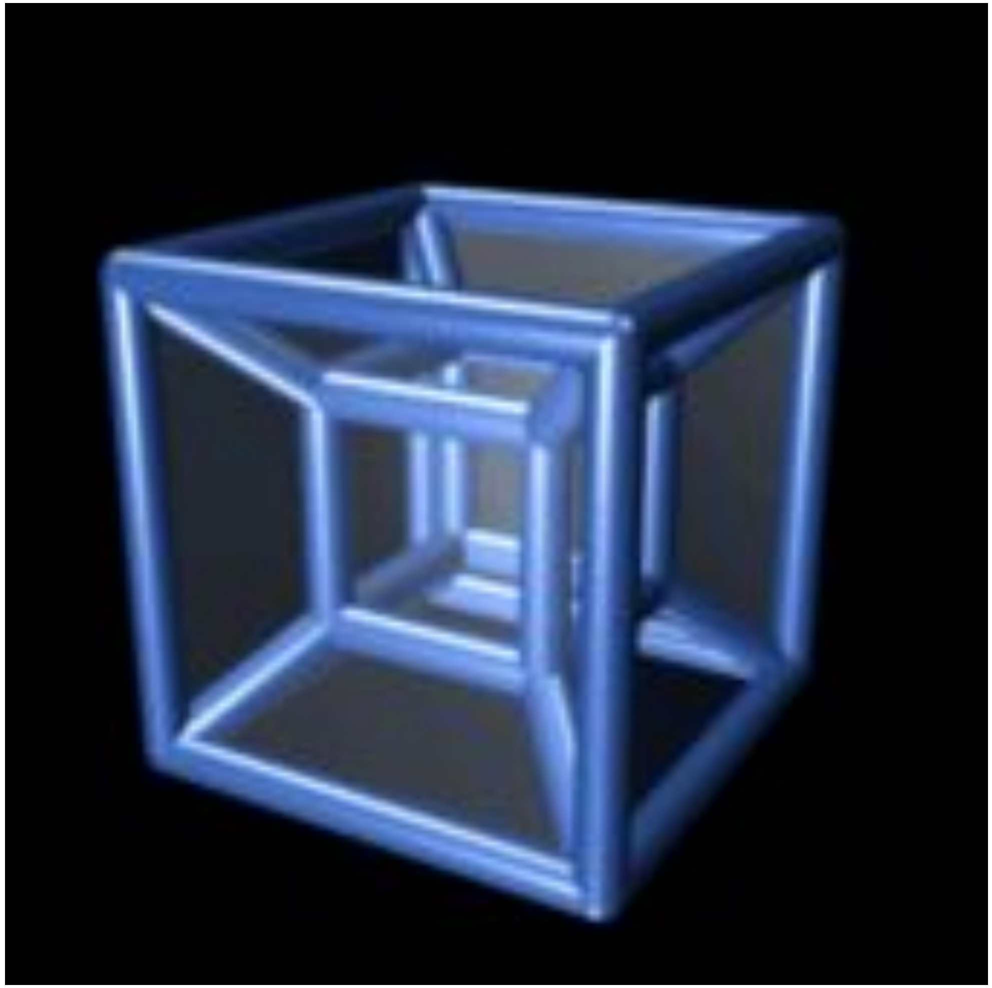
000 **0**	001 **0**	011 **1**	010 **0**	
100 **0**	101 **1**	111 **1**	110 **1**	**p(abc)**

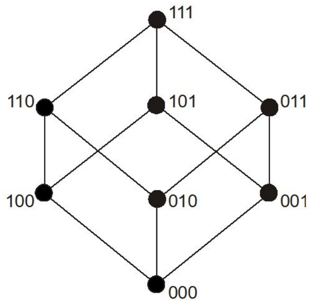
a

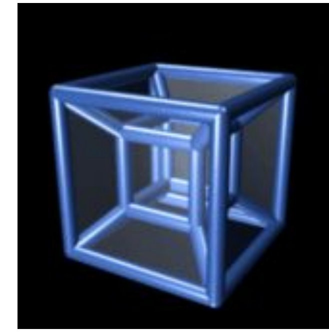
$$p(abc) = ab \vee ac \vee bc$$

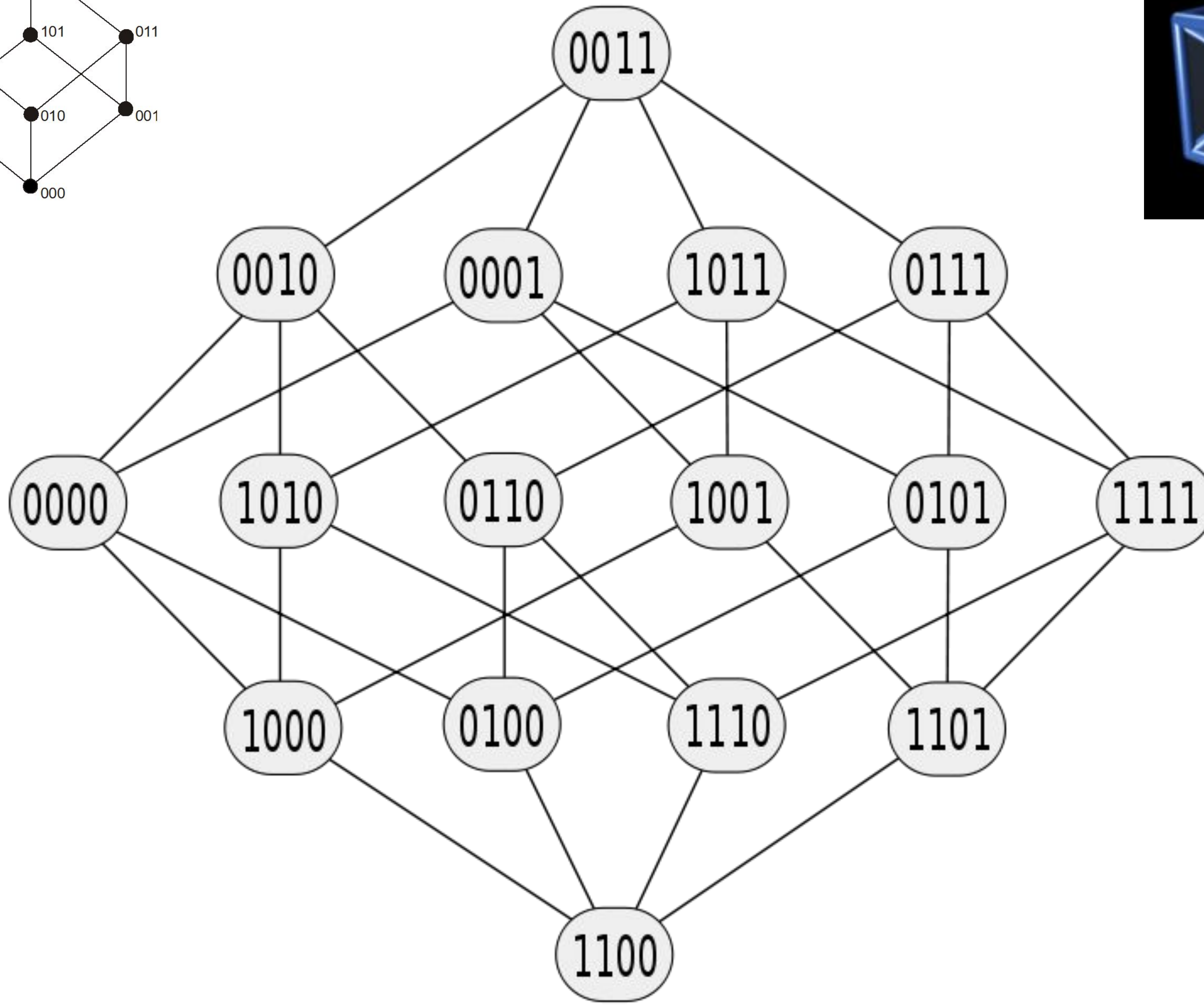


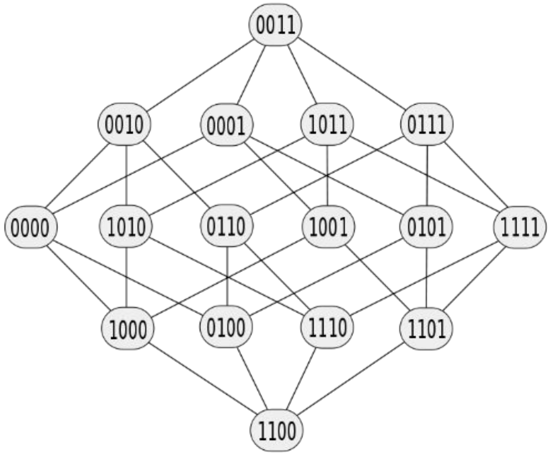
Карта Карно для n=4

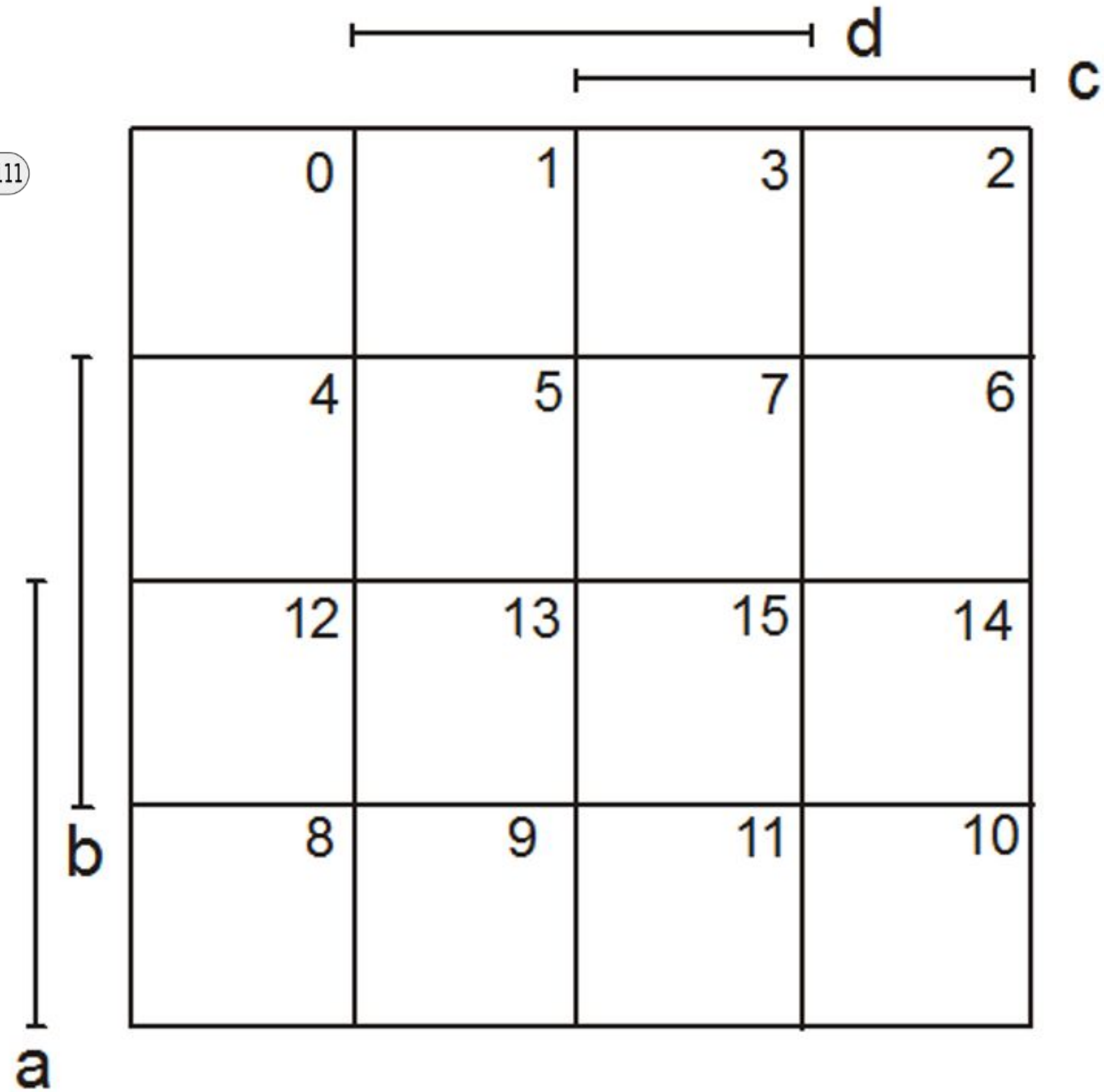


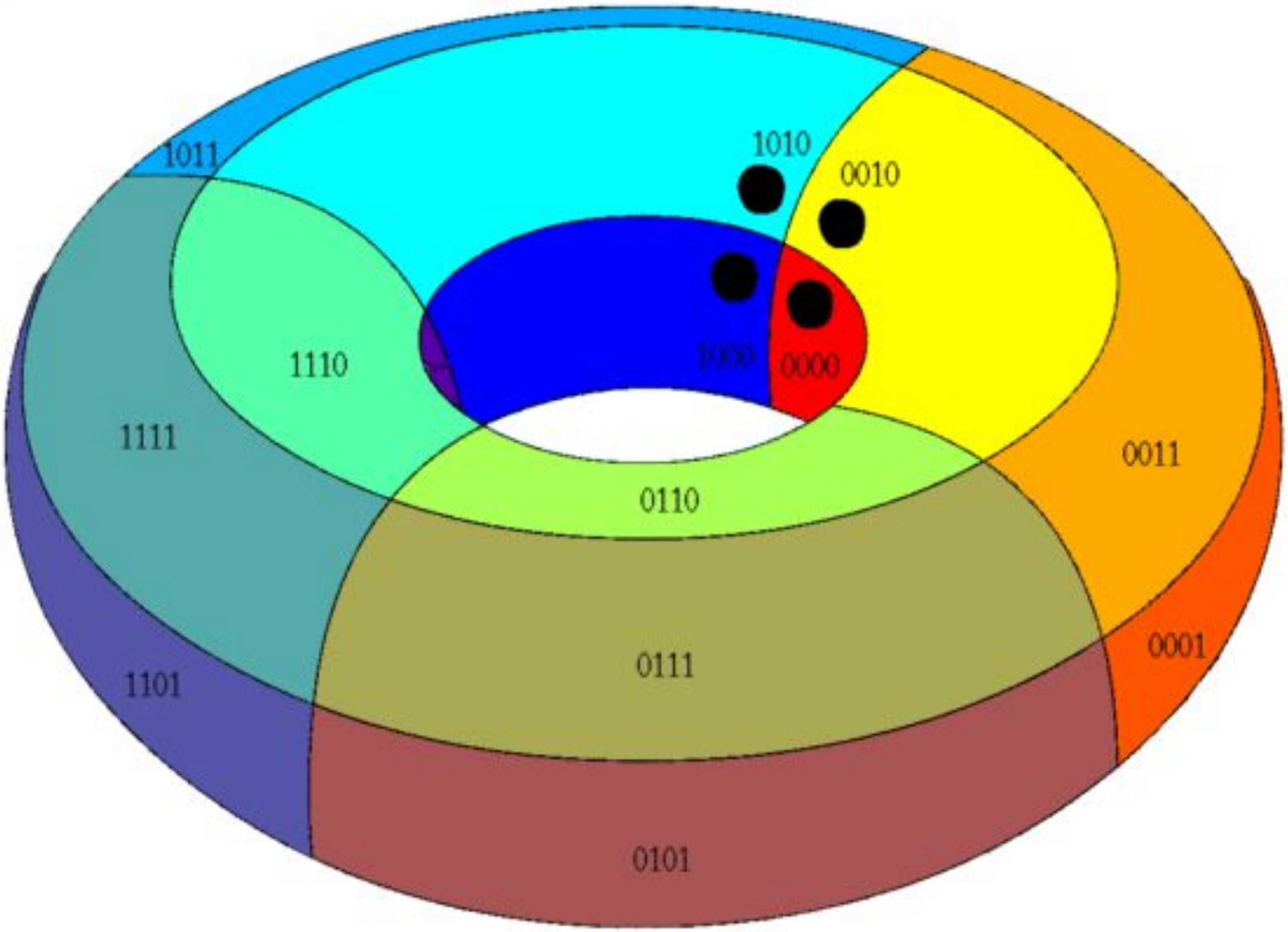

111
110
101
011
100
010
001
000

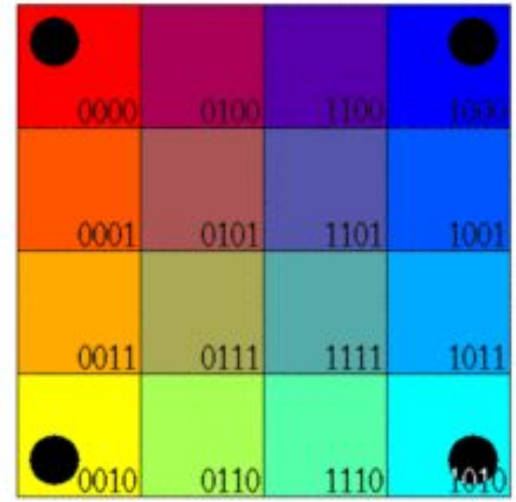


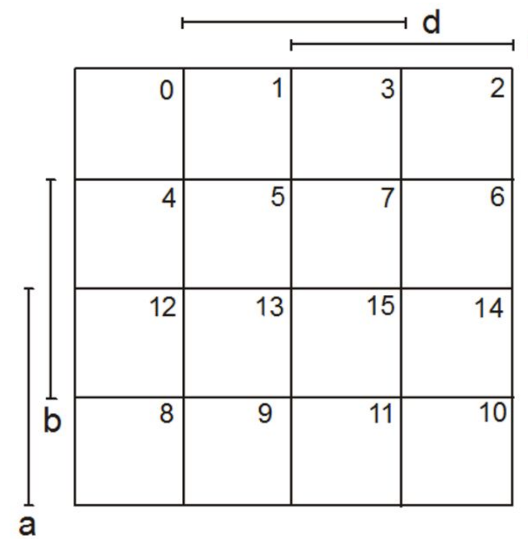

0011
0010
0001
1011
0111
0000
1010
0110
1001
0101
1111
1000
0100
1110
1101
1100

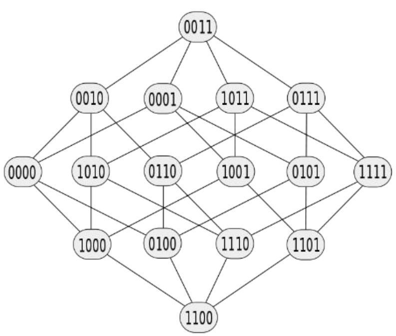

0011
0010
0001
1011
0111
0000
1010
0110
1001
0101
1111
1000
0100
1110
1101
1100


d
c
0
1
3
2
4
5
7
6
12
13
15
14
8
9
11
10
b
a


1011
1010
0010
1110
1000
0000
1111
0110
0011
0001
0111
1101
0101

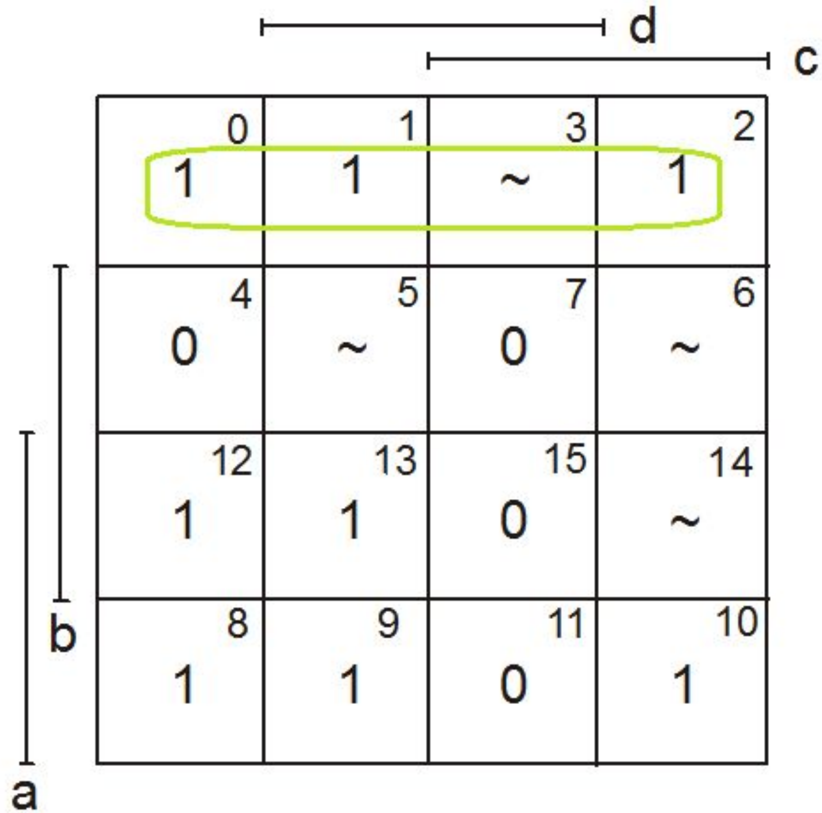

0000
0100
1100
1000
0001
0101
1101
1001
0011
0111
1111
1011
0010
0110
1110
1010


d
c
0
1
3
2
4
5
7
6
12
13
15
14
8
9
11
10
b
a

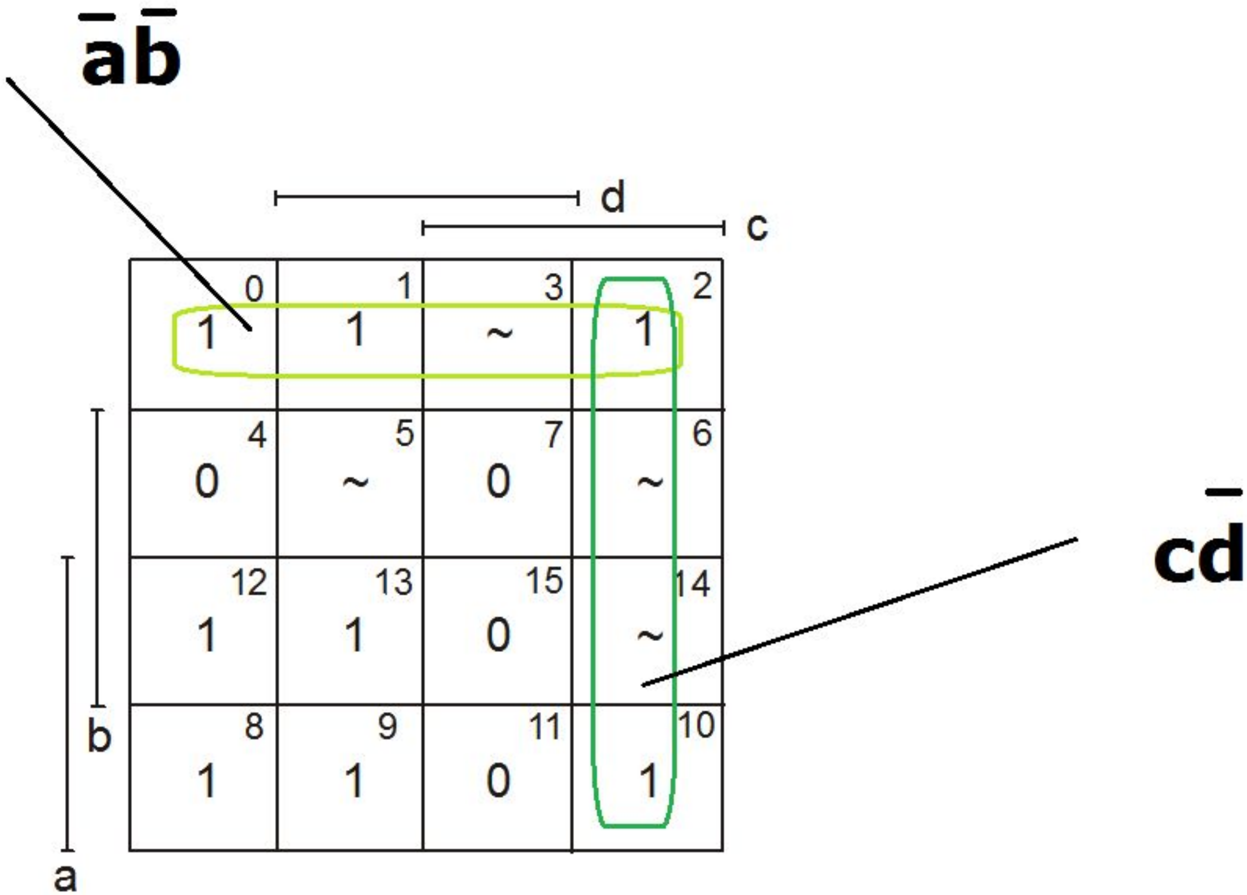

0011
0010
0001
1011
0111
0000
1010
0110
1001
0101
1111
1000
0100
1110
1101
1100

Пример.

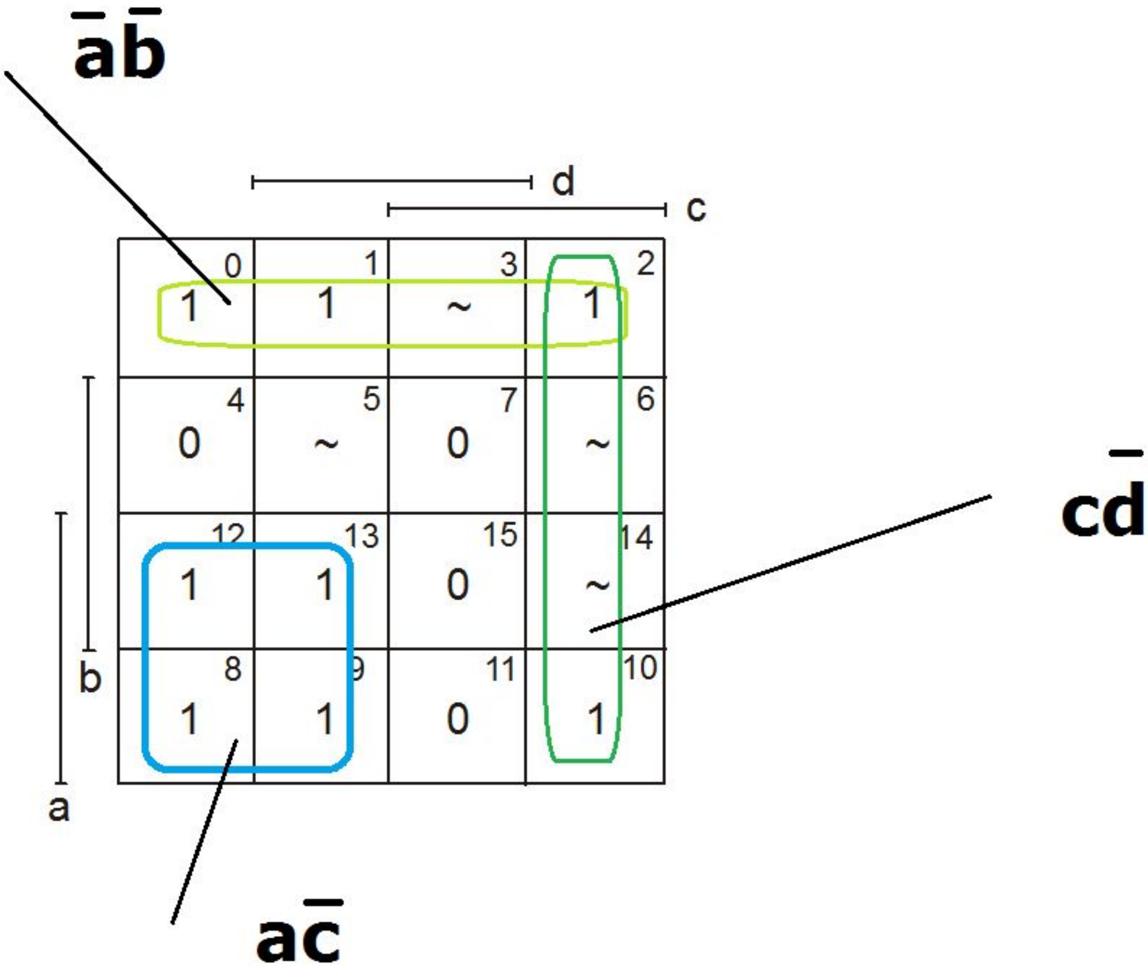
0 1	1 1	3 ~	2 1
4 0	5 ~	7 0	6 ~
12 1	13 1	15 0	14 ~
8 1	9 1	11 0	10 1



d
c
a
b
0 1 1 1 3 ~ 2 1
4 0 5 ~ 7 0 6 ~
12 1 13 1 15 0 14 ~
8 1 9 1 11 0 10 1

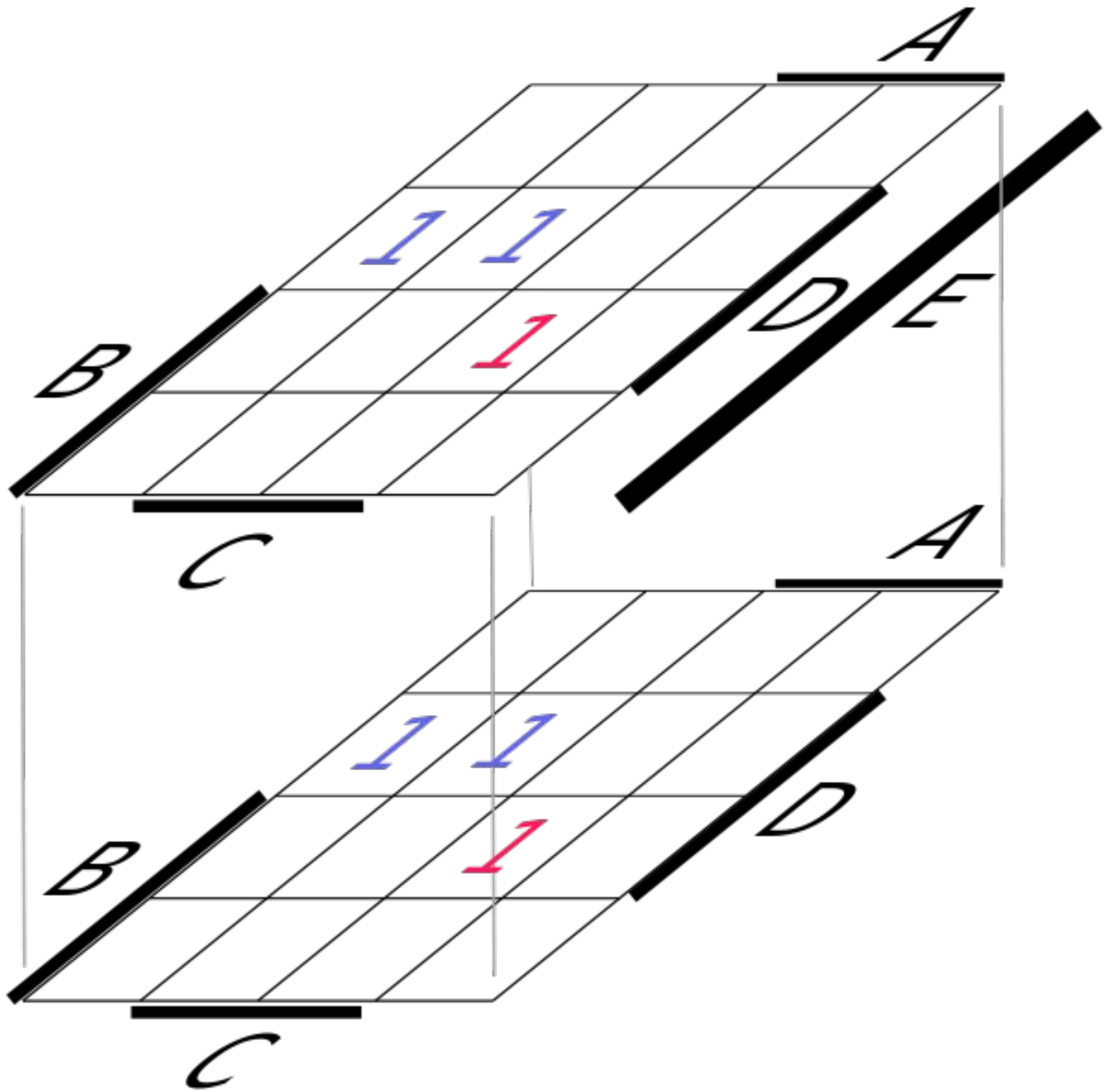


$\bar{a}\bar{b}$
d
c
0
1
1
1
3
~
2
1
4
0
5
~
7
0
6
~
12
1
13
1
15
0
14
~
8
1
9
1
11
0
10
1
b
a
$c\bar{d}$



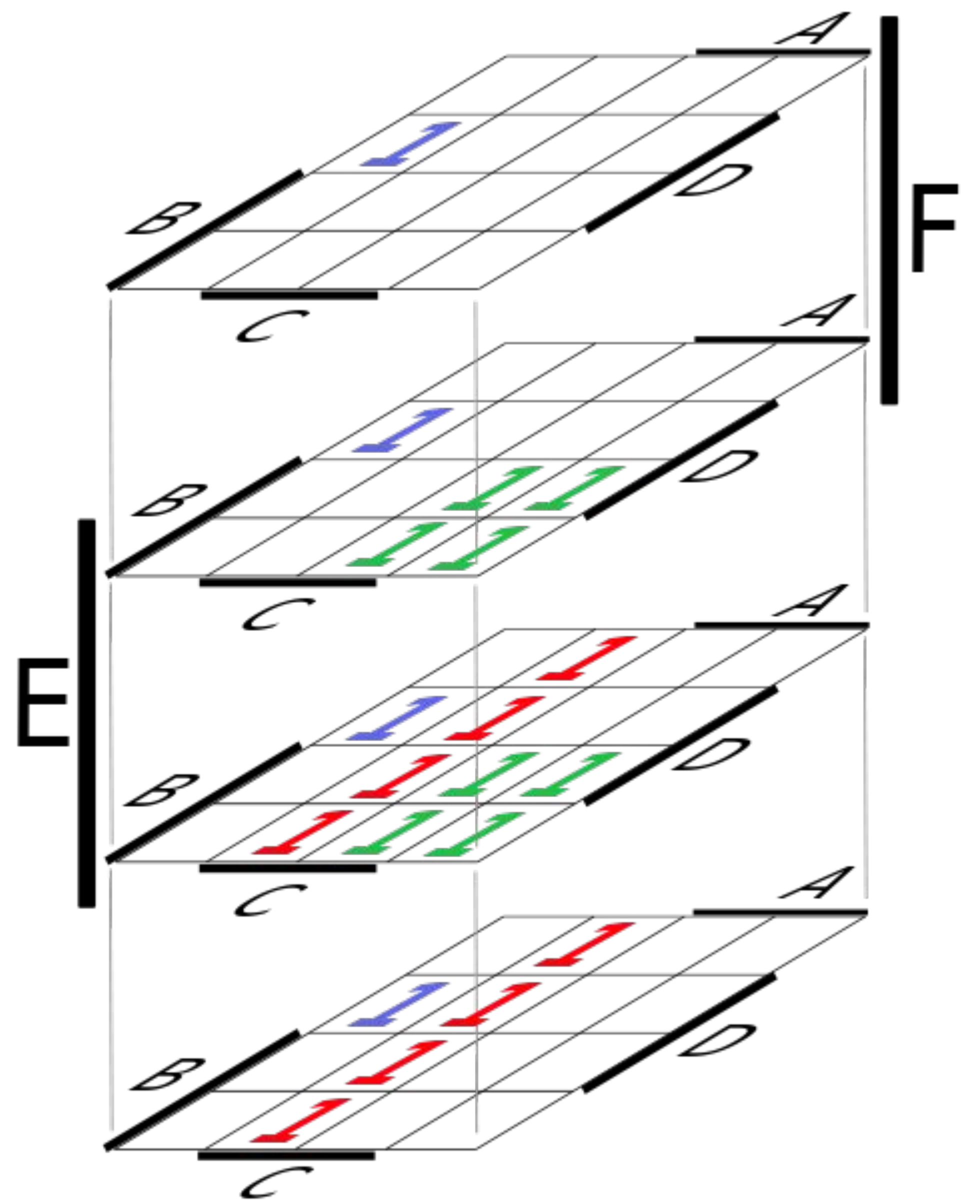
$$f(abcd) = \bar{a}\,\bar{b} \vee c\bar{d} \vee a\bar{c}$$

Карта Карно для n=5?

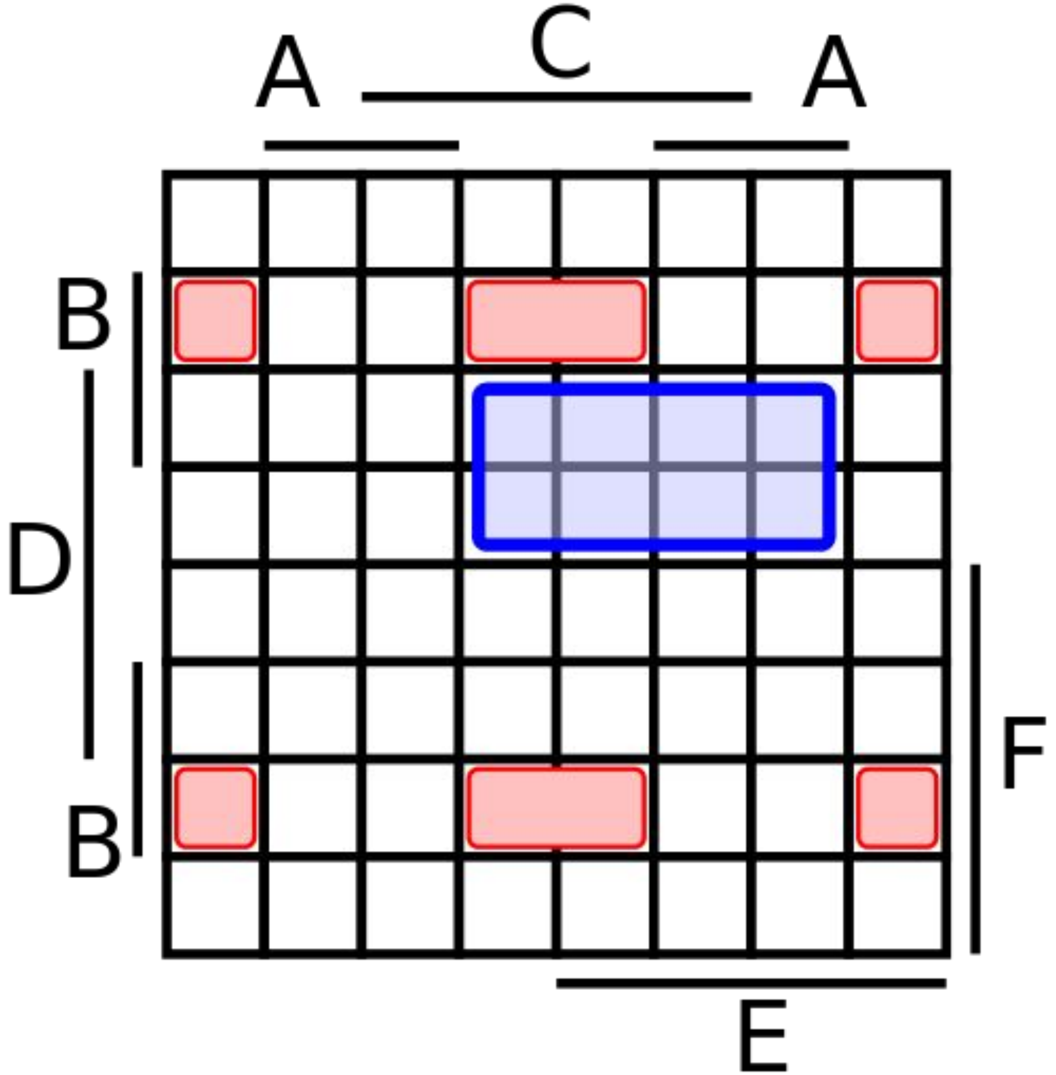


A
1 1
1
B
D
E
C
A
1 1
1
B
D
C

Карта Карно для n=6?



A
B
C
D
F
E


A
C
A
B
D
B
F
E