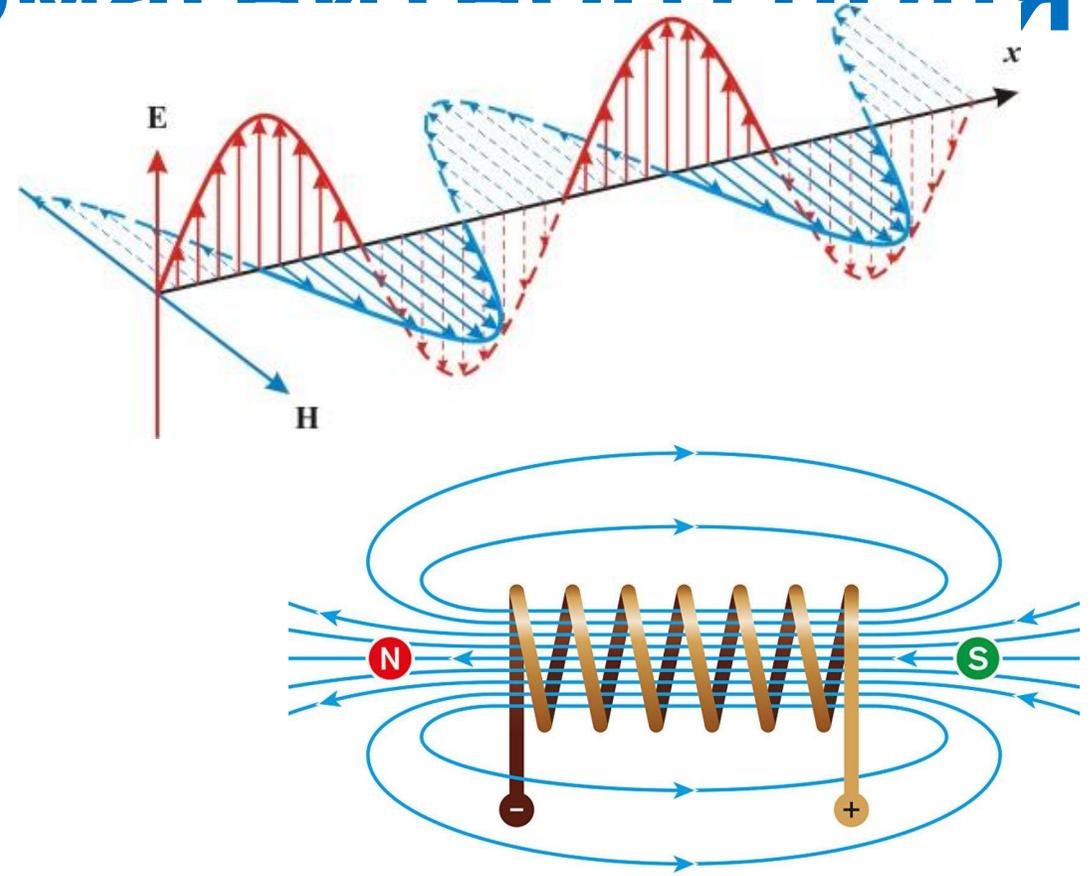


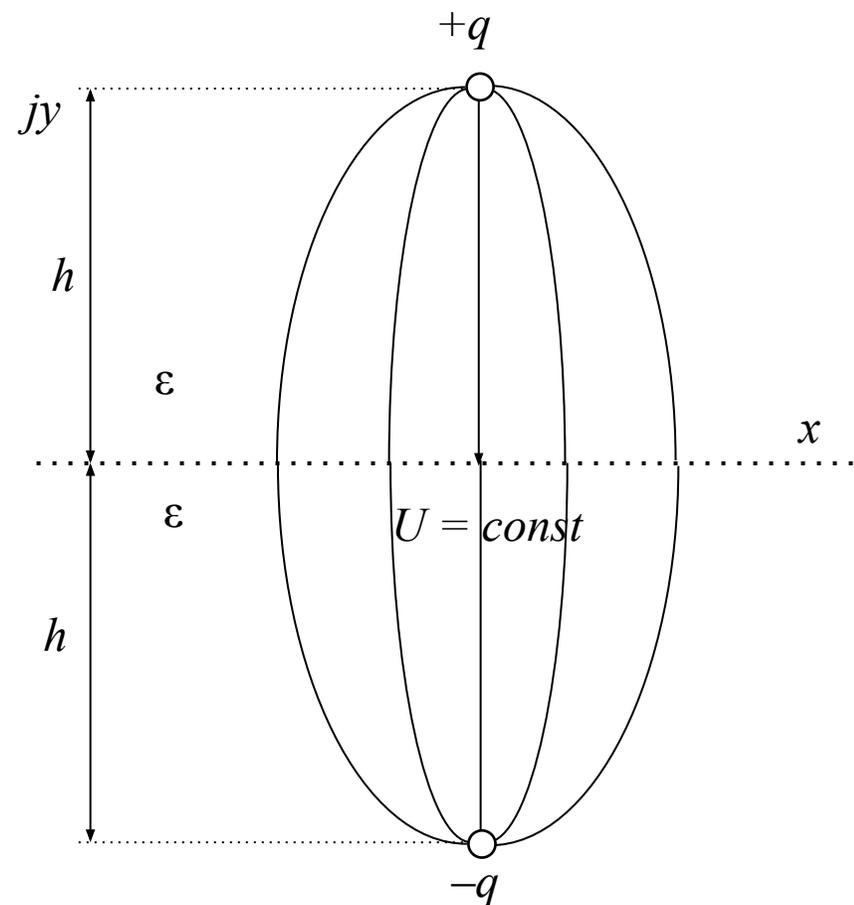
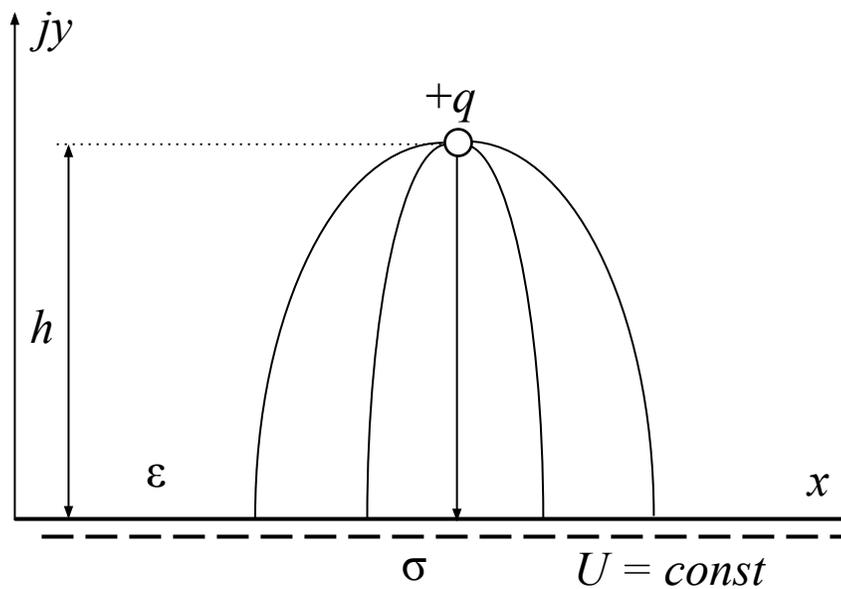
Теоретические основы электротехники

Теория электромагнитного поля



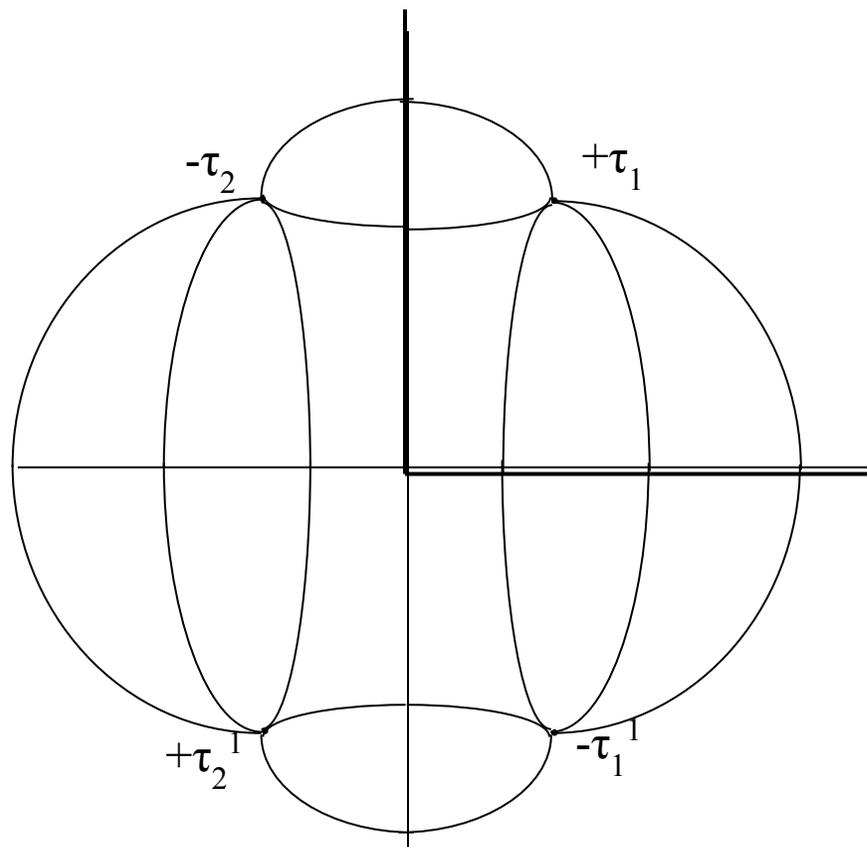
Метод зеркальных изображений

Используется для расчета поля заряженных проводников, расположенных вблизи плоских поверхностей, ограничивающих проводящую среду



Сопоставляя левую и правую картины полей, можем утверждать, что из-за одинаковой геометрии и граничных условий картины поля в верхней полуплоскости идентичны, а, следовательно, все характеристики поля полностью совпадают.

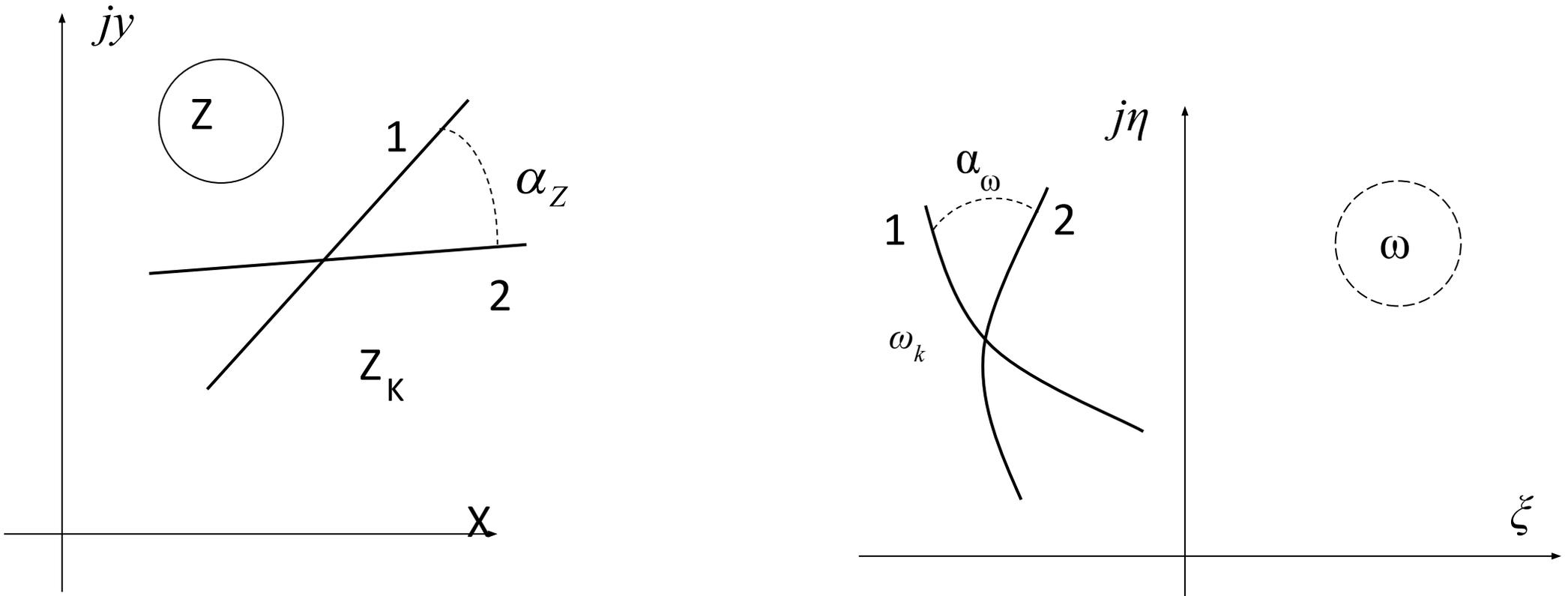
Применение метода зеркальных изображений возможно и в случае, когда заряды находятся внутри диэлектрика между гранями двугранного угла « α », образованного проводящими поверхностями, если



Отразим заряд $+\tau_1$ от вертикальной стенки, вследствие чего появится второй заряд противоположного знака $-\tau_2$, и оба эти заряда оказались расположенными над горизонтальной проводящей плоскостью. Отразим эти заряды в горизонтальной плоскости и получим еще два заряда (τ_2^1 и $-\tau_1^1$). Полная система из четырех зарядов образует картину поля в диэлектрике, часть которой в первом квадранте совпадает с исходной картиной поля.

Метод конформных отображений

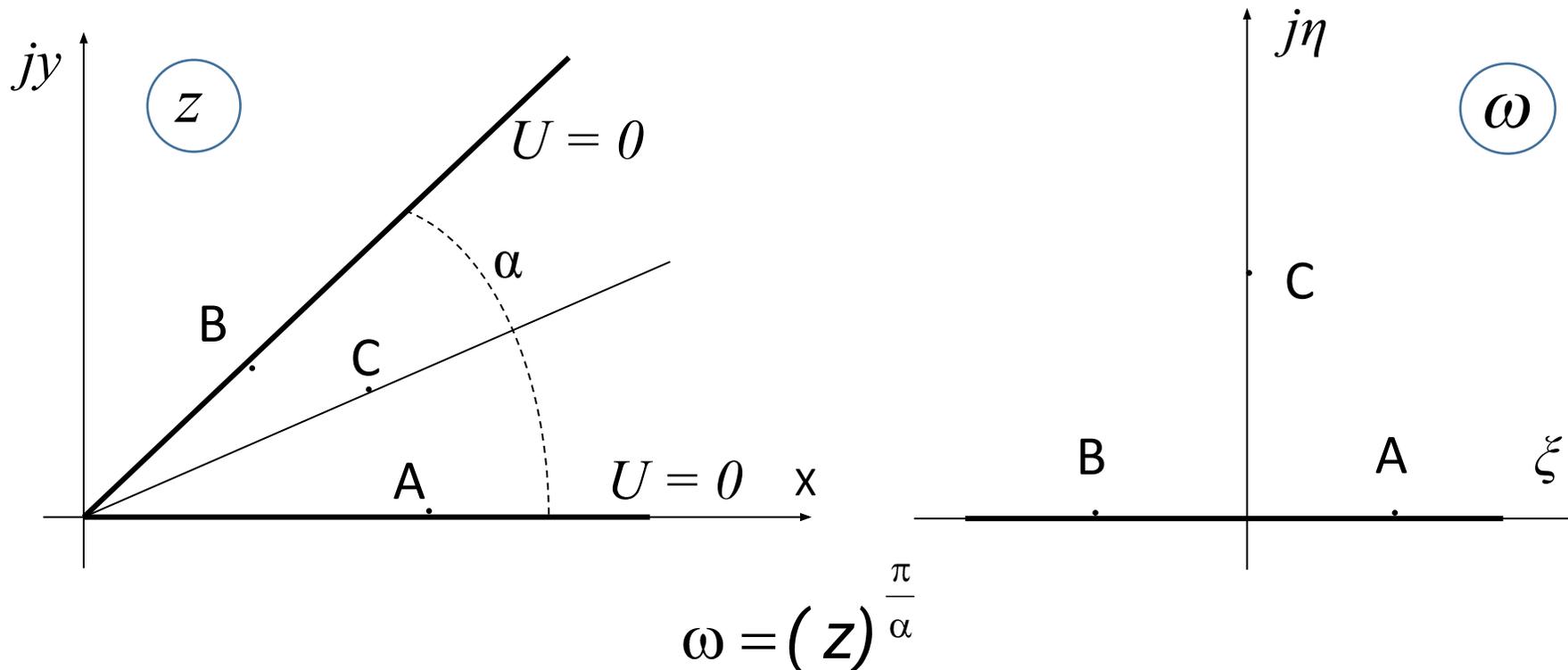
Расчет поля методом конформных отображений основан на том, что **существует возможность отобразить с помощью некоторого математического преобразования заданную область в комплексной плоскости « z » ($x + jy$) на так называемую каноническую область в комплексной плоскости « ω » ($\xi + j\eta$).**



Преобразование называется конформным, так как при переходе от одной области к другой либо обратно сохраняются углы в точках пересечения между любыми линиями в обеих областях $\alpha_z = \alpha_\omega$

Существует общий подход к преобразованию произвольной многоугольной области, ограниченной ломаной линией на верхнюю полуплоскость и обратно с помощью интеграла **Кристоффеля-Шварца**

1. **Двугранный угол (α)** – поле между двумя проводящими плоскостями, сходящимися под углом



Положение точки на первой грани (точка A) :

$$z_A = r_A e^{j0} \quad \text{- в исходной области} \quad \omega_A = r_A^{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{- в области}$$

Z ω

Положение точки на второй грани (точка B) :

$$z_B = r_B e^{j\alpha} \quad \text{- в исходной области} \quad \omega_B = r_B^{\frac{\pi}{\alpha}} e^{j\pi} = -r_B^{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{- в области}$$

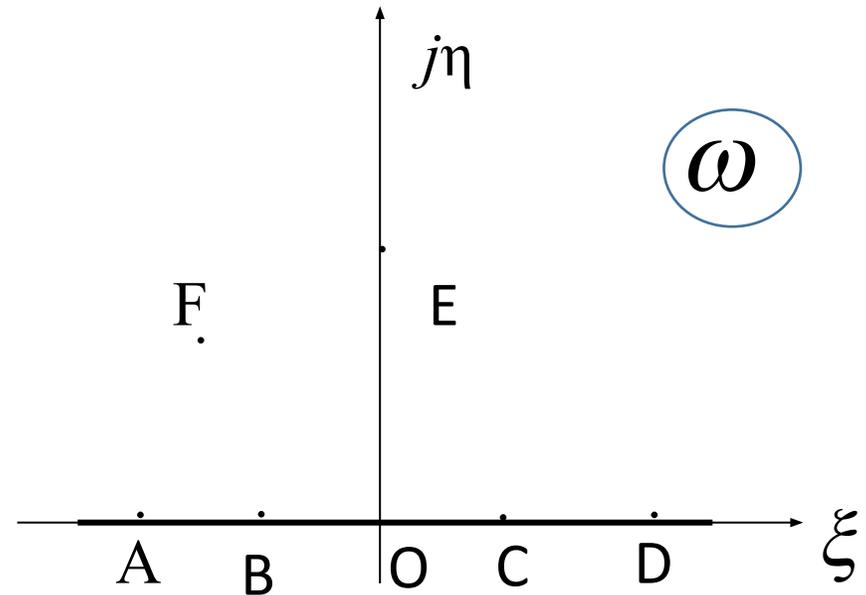
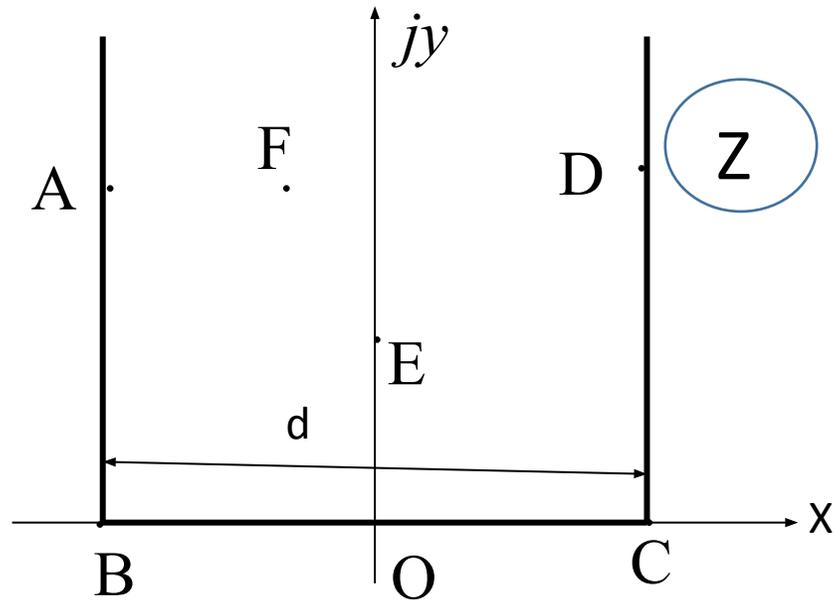
Z ω

Положение любой точки на биссектрисе угла (точка C):

$$z_C = r_C e^{j\frac{\alpha}{2}} \quad \text{- в исходной области} \quad \omega_C = r_C^{\frac{\pi}{\alpha}} e^{j\frac{\pi}{2}} = jr_C^{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{- в области}$$

Z ω

2. Бесконечно глубокий проводящий паз шириной d



$$\omega = \sin \frac{\pi Z}{d}$$

Положение угловых точек В и С

$$z_{C,B} = \pm \frac{d}{2}$$

$$\omega_{C,B} = \sin \frac{\pm \pi \frac{d}{2}}{d} = \pm \sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$$

Положение точек А и D

$$z_{D,A} = \pm \frac{d}{2} + jy$$

$$\omega_{D,A} = \sin \frac{\pi(\pm \frac{d}{2} + jy)}{d} = \sin(\pm \frac{\pi}{2} + j \frac{\pi y}{d}) = \pm 1 \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi y}{d} + j 0 \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y}{d} = \pm \operatorname{ch} \frac{\pi y}{d}$$

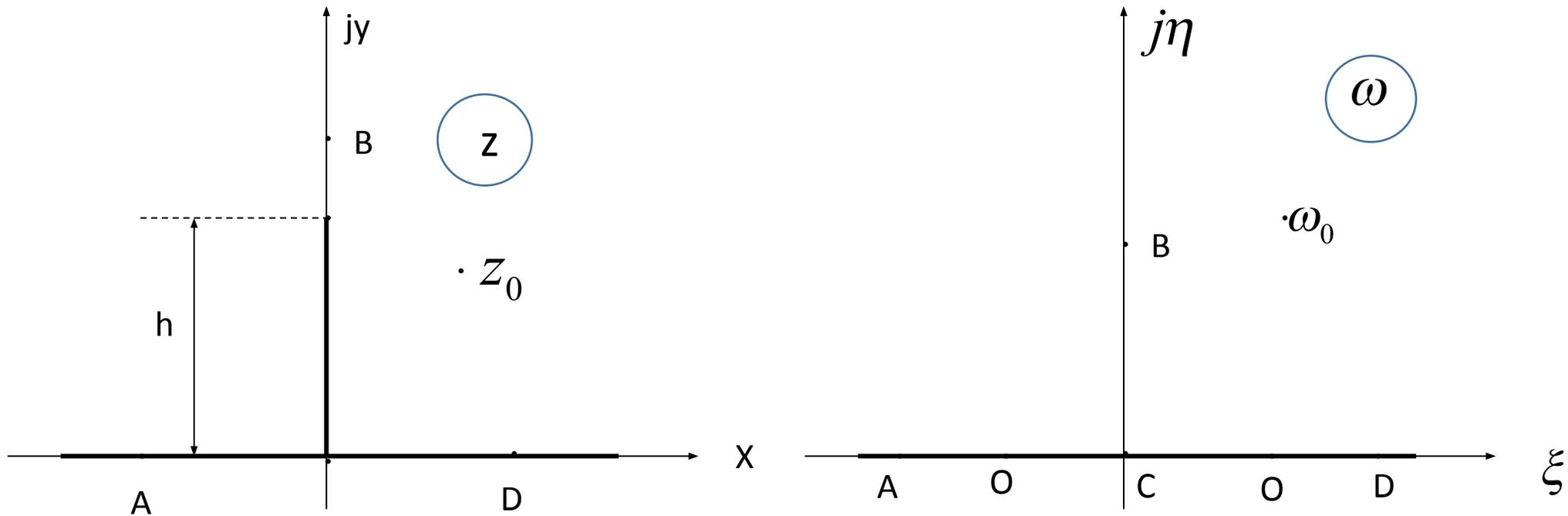
Положение точки

E

$$z_E = jy$$

$$\omega_E = \sin j \frac{\pi y}{d} = j \operatorname{sh} \frac{\pi y}{d}$$

3. Плоскость с вертикальным выступом (стеной), высотой (h)



$$\omega = \sqrt{z^2 + h^2}$$

Положение точки

C

$$z_C = jh$$

$$\omega_C = 0$$

Положение точки

O

$$z_O = 0$$

$$\omega_O = \pm h$$

Положение точек A и

D

$$z_{DA} = \pm X$$

$$\omega_{DA} = \pm \sqrt{X^2 + h^2}$$

Положение точки

B

$$z_B = jy$$

$$(y > h) \quad \omega_B = j\sqrt{y^2 - h^2}$$

Комплексный потенциал и плотность заряда (σ) на примере плоскости с выступом

$z_0 = x_0 + jy_0$ Координата заряженного провода $+T$ в плоскости Z

$\omega_0 = \sqrt{z_0^2 + h^2} = \xi_0 + j\eta_0$ - координата заряженного провода $+T$ в плоскости ω

Используем метод зеркальных изображений

$$\omega_0^* = \xi_0 - j\eta_0$$

Координата зеркально расположенного заряда $-\tau$

Комплексный потенциал в системе двух зарядов

$$W_{(\omega)} = -\frac{j\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\omega - \omega_0}{\omega - \omega_0^*} = \frac{j\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\omega - \omega_0^*}{\omega - \omega_0}$$

Выразим ω через Z для перехода к исходной области.

$$W_{(z)} = \frac{j\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\sqrt{z^2 + h^2} - \omega_0^*}{\sqrt{z^2 + h^2} - \omega_0}$$

Напряженность электрического поля в любой точке:

$$[E] = \frac{dW}{dz} = \frac{j\tau}{2\pi\varepsilon} \left(\frac{\frac{2z}{2\sqrt{z^2 + h^2}}}{\sqrt{z^2 + h^2} - (\xi_0 - j\eta_0)} - \frac{\frac{2z}{2\sqrt{z^2 + h^2}}}{\sqrt{z^2 + h^2} - (\xi_0 + j\eta_0)} \right)$$

После

упрощения:

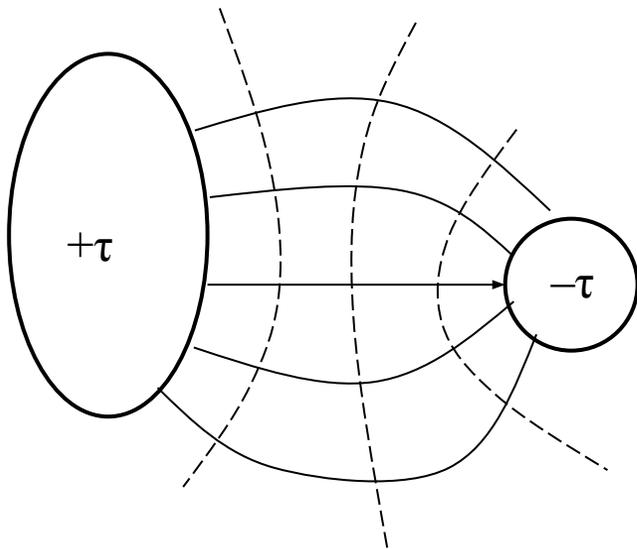
$$[E] = \frac{dW}{dz} = \frac{j\tau}{2\pi\varepsilon} \frac{z}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot \frac{(-2j\eta_0)}{(\sqrt{z^2 + h^2} - \xi_0)^2 + \eta_0^2}$$

$\sigma = D = \varepsilon E$ - плотность заряда на поверхности проводников

Графический метод построения картины плоскопараллельного поля.

При графическом построении необходимо соблюдать одновременно три условия.

1. Ортогональность линий равного потенциала и линий напряженности во всех точках их пересечения
2. Линии напряженности должны подходить перпендикулярно к поверхности проводящих тел.
3. Ячейки ортогональной сетки, образованной линиями $U = const$ и $V = const$ должны быть подобны друг другу.



$$[E] = \left[\frac{\Delta U}{\Delta n} \right] = \left[\frac{\Delta V}{\Delta a} \right]$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta U} = \frac{\Delta a}{\Delta n} = k = const$$

