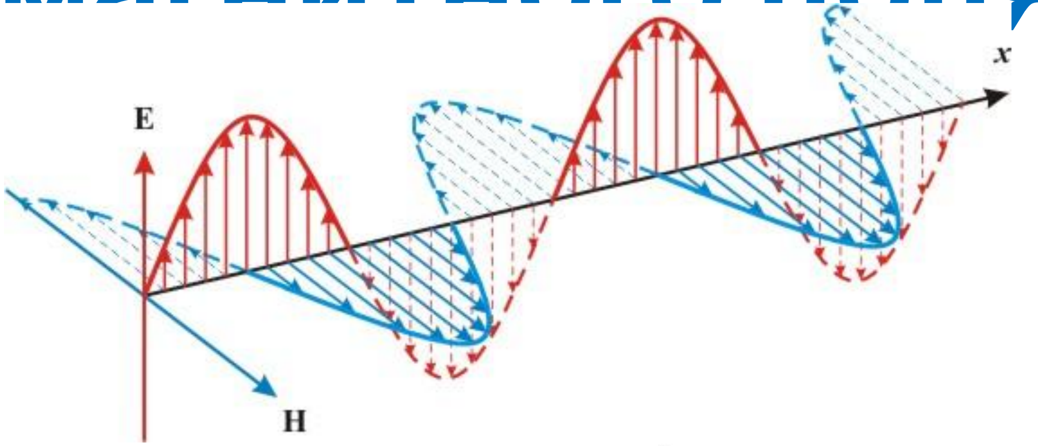
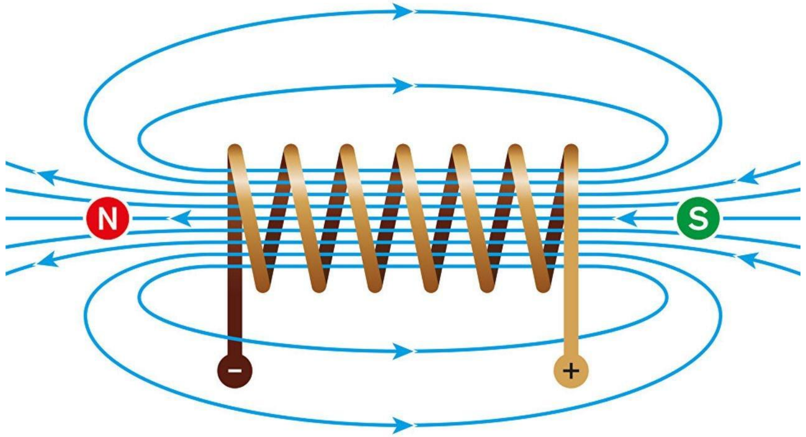
Теоретические основы электротехники

Теория электромагнитного поля

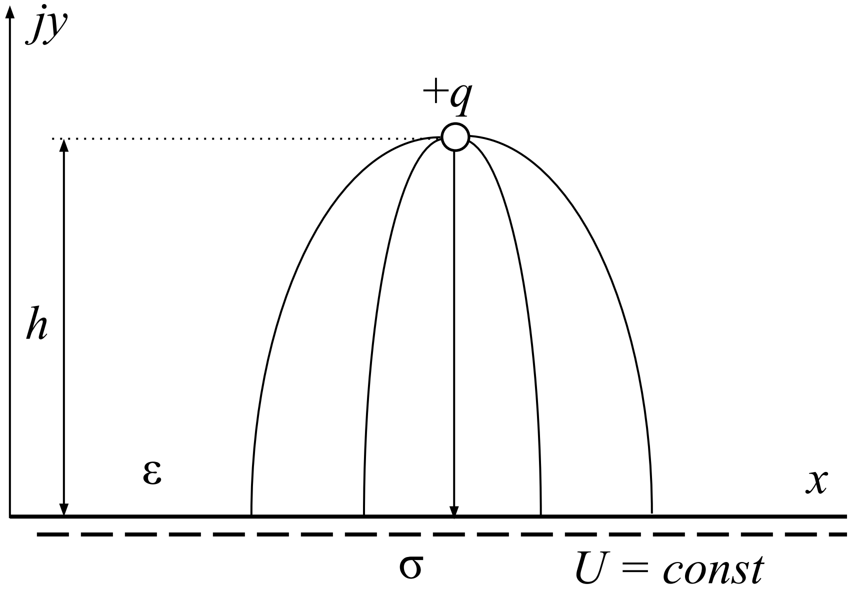


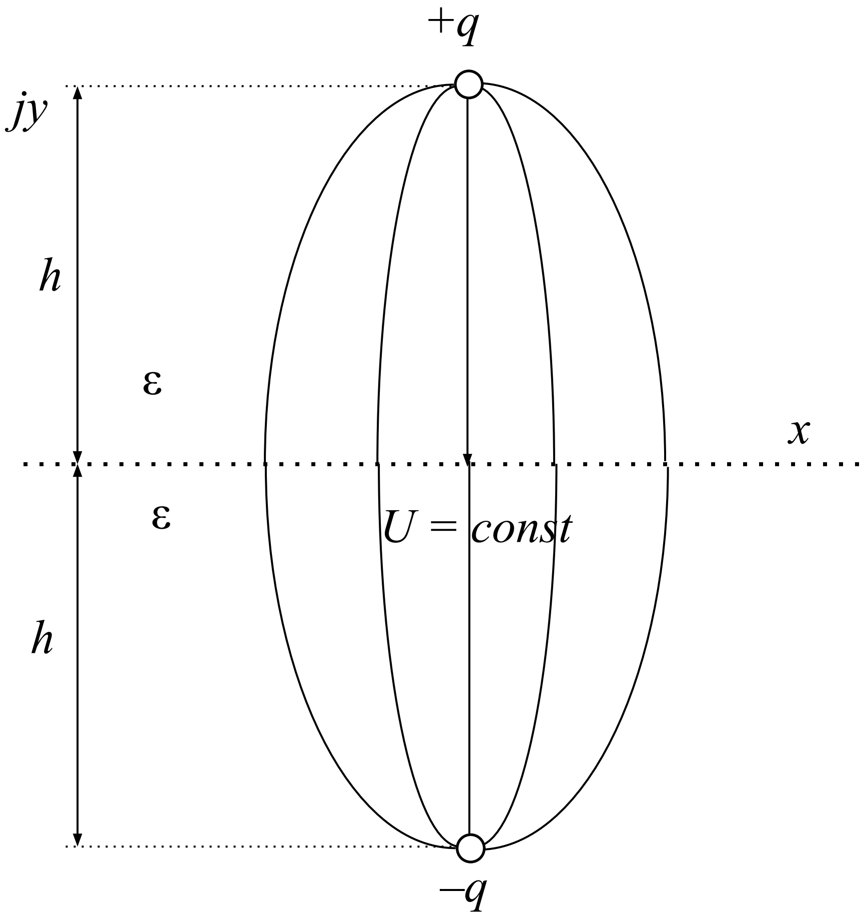


ВШВЭ, проф. Л. И. Сахно
2021

Метод зеркальных изображений

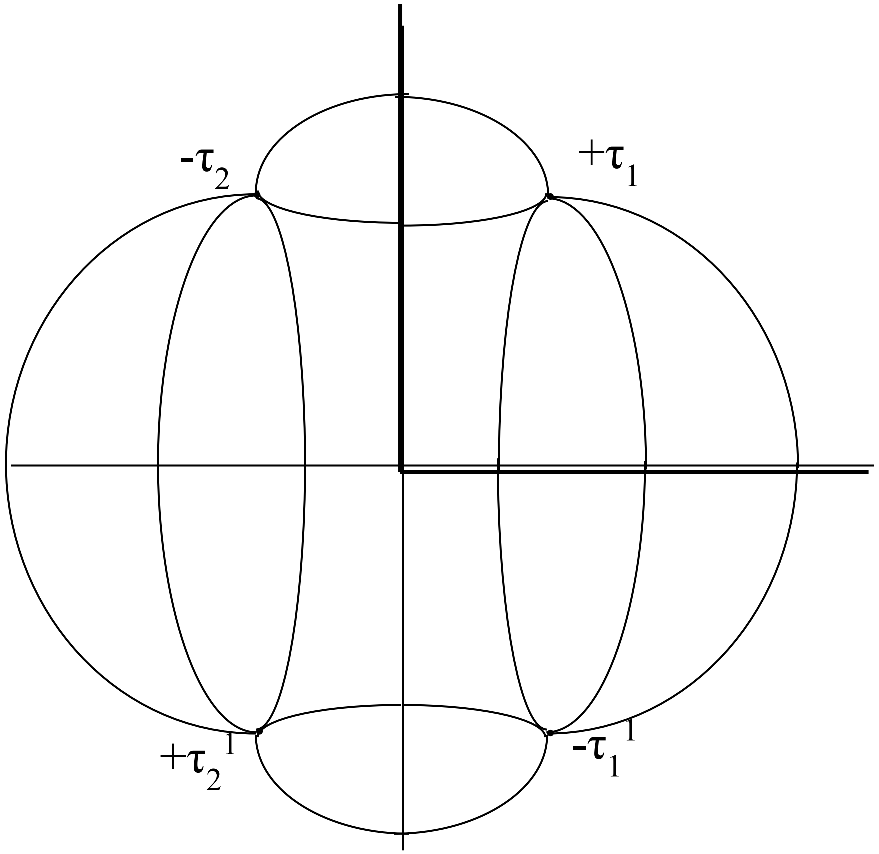
Используется для расчета поля заряженных проводников , расположенных вблизи плоских поверхностей, ограничивающих проводящую среду





Сопоставляя левую и правую картины полей , можем утверждать, что из-за одинаковой геометрии и граничных условий картины поля в верхней полуплоскости идентичны, а, следовательно, все характеристики поля полностью совпадают.

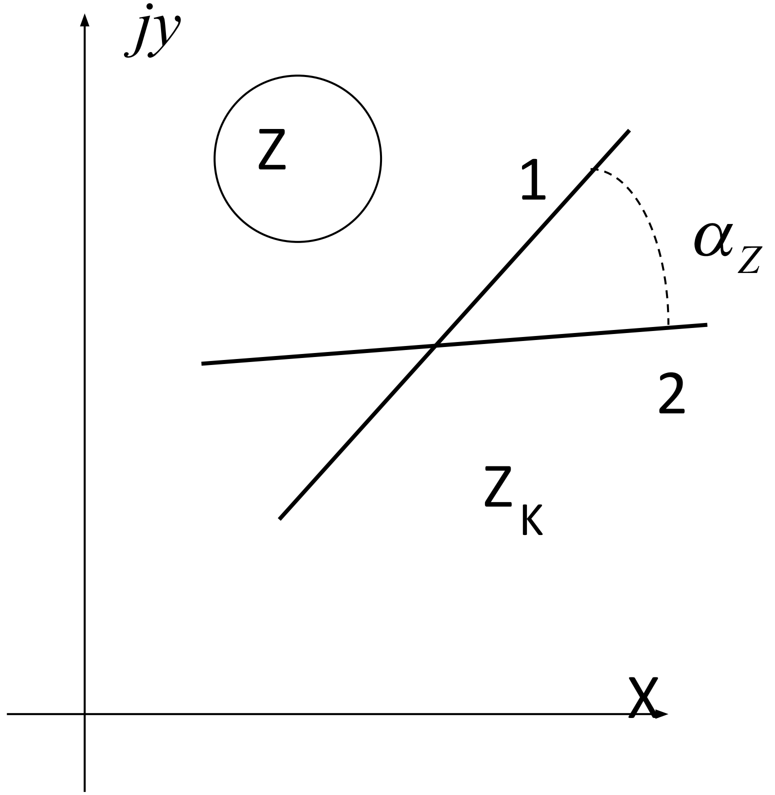
Применение метода зеркальных изображений возможно и в случае, когда заряды находятся внутри диэлектрика между гранями двугранного угла «α», образованного проводящими поверхностями, если

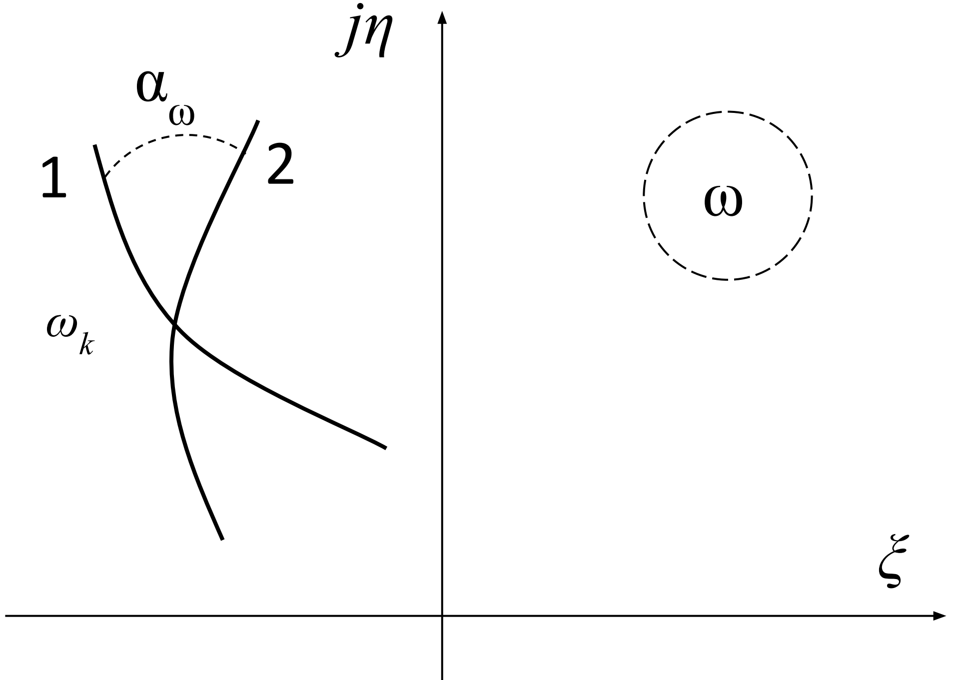


Отразим заряд $+\tau_1$ от вертикальной стенки, вследствие чего появится второй заряд противоположного знака $-\tau_2$, и оба эти заряда оказались расположенными над горизонтальной проводящей плоскостью. Отразим эти заряды в горизонтальной плоскости и получим еще два заряда (τ_2^1 и $-\tau_1^1$). Полная система из четырех зарядов образует картину поля в диэлектрике, часть которой в первом квадранте совпадает с исходной картиной поля.

Метод конформных отображений

Расчет поля методом конформных отображений основан на том, что **существует возможность отобразить с помощью некоторого математического преобразования заданную область в комплексной плоскости « *z* » (*x* + *jy*) на так называемую каноническую область в комплексной плоскости « ω » (ξ+*jη*).**

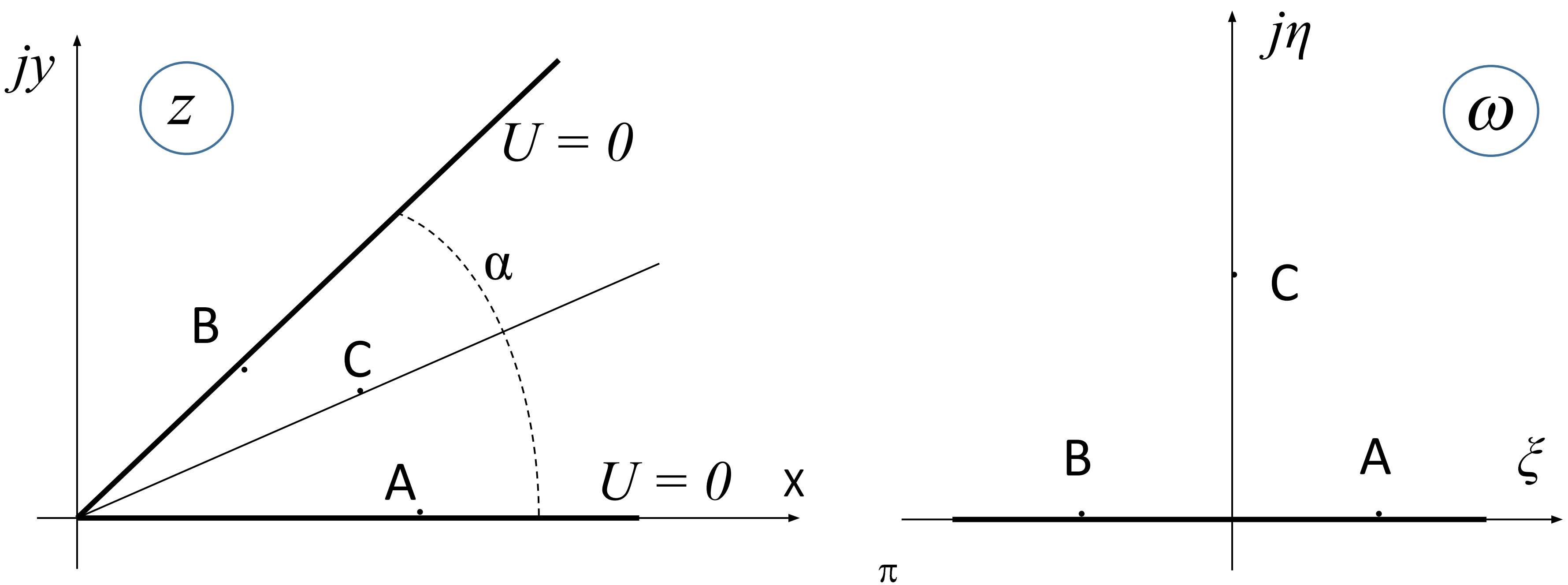




Преобразование называется конформным, так как при переходе от одной области к другой либо обратно сохраняются углы в точках пересечения между любыми линиями в обеих областях $\alpha_z = \alpha_\omega$

Существует общий подход к **преобразованию произвольной многоугольной области**, ограниченной ломаной линией **на верхнюю полуплоскость и обратно** с помощью интеграла **Кристоффеля-Шварца**

1. **Двугранный угол (α)** – поле между двумя проводящими плоскостями, сходящимися под углом



$$\omega = (z)^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Положение точки на первой грани (точка A) :

$z_A = r_A e^{j0}$ - в исходной области Z

$\omega_A = r_A^{\frac{\pi}{\alpha}}$ - в области ω

Положение точки на второй грани (точка B) :

$z_B = r_B e^{j\alpha}$ - в исходной области Z

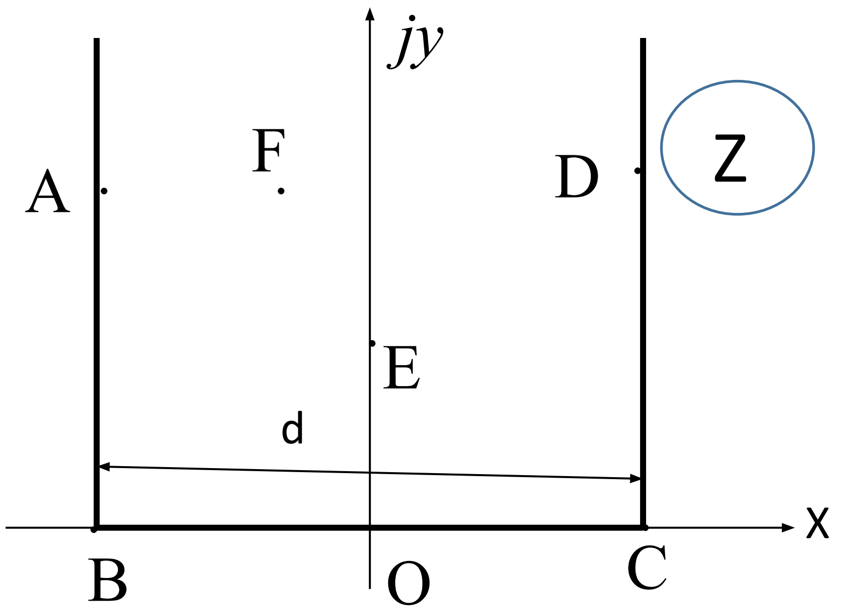
$\omega_B = r_B^{\frac{\pi}{\alpha}} e^{j\pi} = -r_B^{\frac{\pi}{\alpha}}$ - в области ω

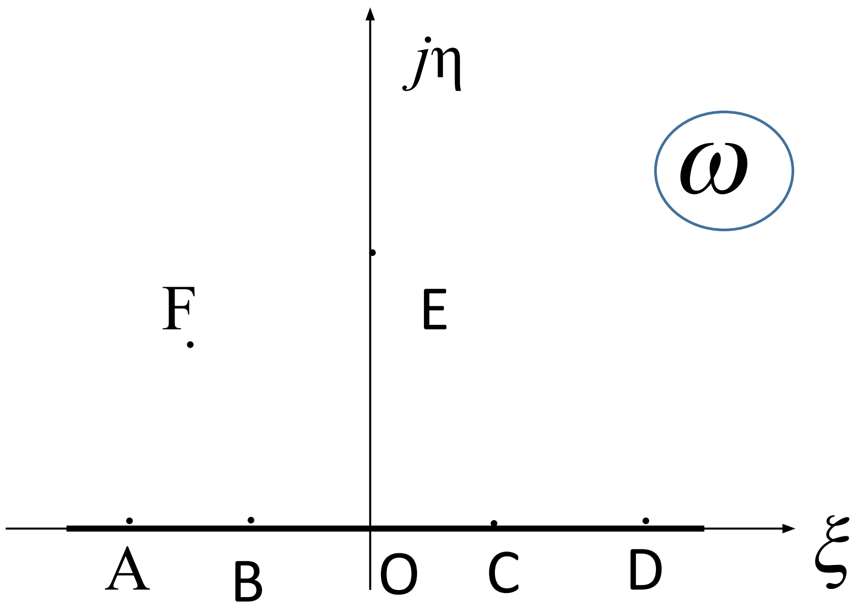
Положение любой точки на биссектрисе угла (точка C):

$z_C = r_C\ e^{j\frac{\alpha}{2}}$ - в исходной области Z

$\omega_C = r_C^{\frac{\pi}{\alpha}} e^{j\frac{\pi}{2}} = j r_C^{\frac{\pi}{\alpha}}$ - в области ω

2. Бесконечно глубокий проводящий паз шириной *d*





$$\omega = \sin\frac{\pi z}{d}$$

Положение угловых точек B и C

$$z_{C,B} = \pm\frac{d}{2}$$

$$\omega_{C,B} = \sin\frac{\pm\pi\frac{d}{2}}{d} = \pm\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$$

Положение точек A и D

$$z_{D,A} = \pm\frac{d}{2} + jy$$

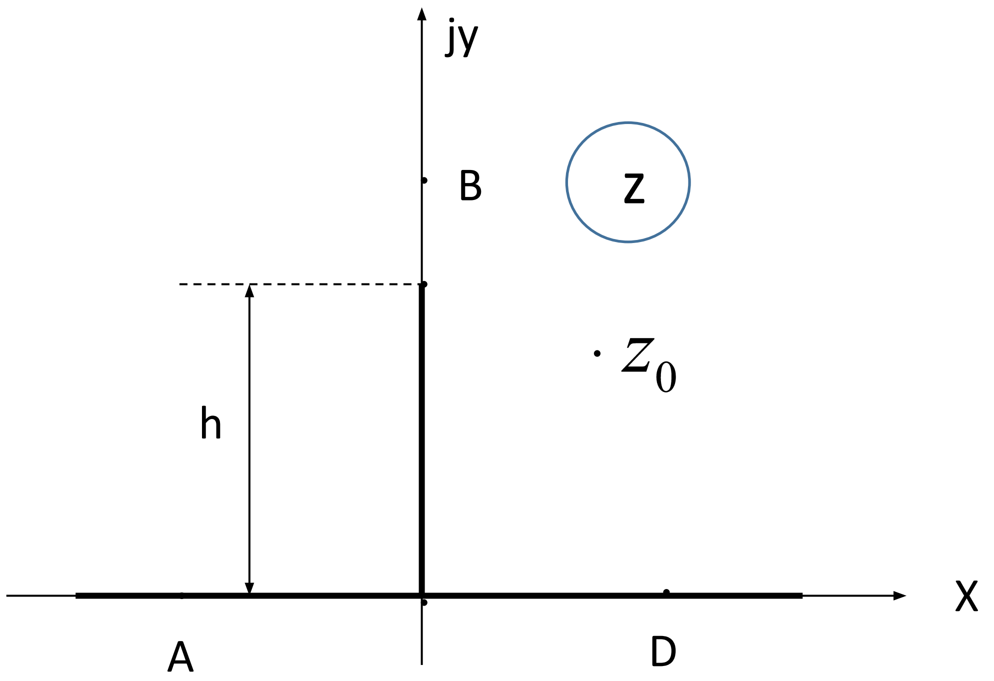
$$\omega_{D,A} = \sin\frac{\pi(\pm\frac{d}{2} + jy)}{d} = \sin(\pm\frac{\pi}{2} + j\frac{\pi y}{d}) = \pm 1\cdot\mathrm{ch}\frac{\pi y}{d} + j0\cdot\mathrm{sh}\frac{\pi y}{d} = \pm\mathrm{ch}\frac{\pi y}{d}$$

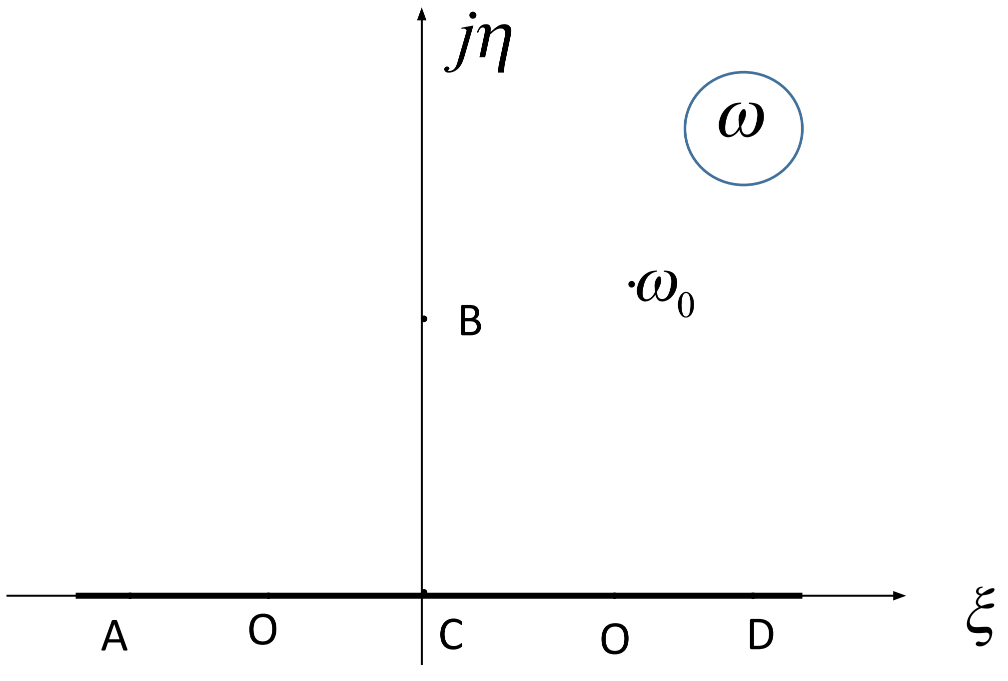
Положение точки E

$$z_E = jy$$

$$\omega_E = \sin j\frac{\pi y}{d} = j\,\mathrm{sh}\frac{\pi y}{d}$$

3. Плоскость с вертикальным выступом (стеной), высотой (*h*)





$$\omega = \sqrt{z^2 + h^2}$$

Положение точки С

$$z_C = jh \qquad \omega_c = 0$$

Положение точки О

$$z_0 = 0 \qquad \omega_0 = \pm h$$

Положение точек А и D

$$z_{DA} = \pm x \qquad \omega_{DA} = \pm\sqrt{x^2 + h^2}$$

Положение точки В

$$z_B = jy \qquad (y>h) \qquad \omega_B = j\sqrt{y^2 - h^2}$$

Комплексный потенциал и плотность заряда (σ) на примере плоскости с выступом

$z_0 = x_0 + jy_0$ Координата заряженного провода **+Т** в плоскости Z

$\omega_0 = \sqrt{z_0{}^2 + h^2} = \xi_0 + j\eta_0$ - координата заряженного провода **+Т** в ω плоскости

Используем метод зеркальных изображений

$\omega_0{}^* = \xi_0 - j\eta_0$

Координата зеркально расположенного заряда $-\tau$

Комплексный потенциал в системе двух зарядов

$$W_{(\omega)} = -\frac{j\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\omega - \omega_0}{\omega - \omega_0{}^*} = \frac{j\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\omega - \omega_0{}^*}{\omega - \omega_0}$$

Выразим ω через z для перехода к исходной области.

$$W_{(z)} = \frac{j\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\sqrt{z^2+h^2} - \omega_0^{\,*}}{\sqrt{z^2+h^2} - \omega_0}$$

Напряженность электрического поля в любой точке:

$$[E] = \frac{dW}{dz} = \frac{j\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{\dfrac{2z}{2\sqrt{z^2+h^2}}}{\sqrt{z^2+h^2} - (\xi_0 - j\eta_0)} - \frac{\dfrac{2z}{2\sqrt{z^2+h^2}}}{\sqrt{z^2+h^2} - (\xi_0 + j\eta_0)} \right)$$

После упрощения:

$$[E] = \frac{dW}{dz} = \frac{j\tau}{2\pi\varepsilon} \frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}} \cdot \frac{(-2j\eta_0)}{(\sqrt{z^2+h^2} - \xi_0)^2 + \eta^2{}_0)}$$

$\boldsymbol{\sigma = D = \varepsilon E}$ **- плотность заряда на поверхности проводников**

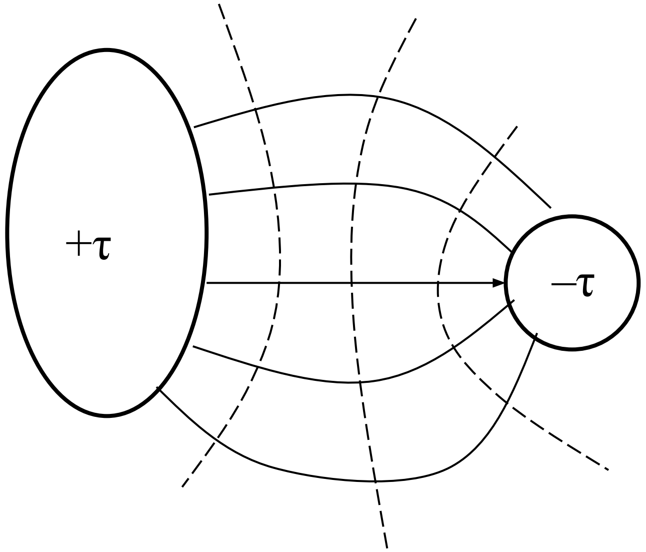
Графический метод построения картины плоскопараллельного поля.

При графическом построении **необходимо соблюдать одновременно три условия**.

1. Ортогональность линий равного потенциала и линий напряженности во всех точках их пересечения

2. Линии напряженности должны подходить перпендикулярно к поверхности проводящих тел.

3. Ячейки ортогональной сетки, образованной линиями $U = const$ и $V = const$ должны быть подобны друг другу.



$$[E]=\left[\frac{\Delta U}{\Delta n}\right]=\left[\frac{\Delta V}{\Delta a}\right]$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta U}=\frac{\Delta a}{\Delta n}=k=\mathrm{const}$$