

# Построение графика

## II. Постановка проблемы

Ещё раз напомним, что к настоящему моменту мы изучили следующие математические модели:  $y = b$ ,  $y = kx$ ,  $y = kx + m$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -x^2$ . Есть ли у этих математических моделей что-либо общее?

## II. Постановка проблемы

Есть! Их структура одинакова:

$$y = f(x).$$

Эту запись («игрек равен эф от икс») следует понимать так: имеется выражение  $f(x)$  с переменной  $x$ , с помощью которого мы находим значения переменной  $y$ .

Математики предпочитают запись  $y = f(x)$  не случайно. Пусть, например,  $f(x) = x^2$ , т. е. речь идёт о функции  $y = x^2$ . Пусть нам надо выделить несколько значений аргумента и соответствующих значений функции. До сих пор мы писали так:

если  $x = 1$ , то  $y = 1^2 = 1$ ;

если  $x = -3$ , то  $y = (-3)^2 = 9$  и т. д.

# III. Изучение нового материала

Если же использовать обозначение  $f(x) = x^2$ , то запись становится более экономной:

$$\begin{aligned}f(1) &= 1^2 = 1; \\f(-3) &= (-3)^2 = 9.\end{aligned}$$

Итак, мы познакомились ещё с одним фрагментом математического языка: фраза «значение функции  $y = x^2$  в точке  $x = 2$  равно 4» записывается короче: «если  $f(x) = x^2$ , то  $f(2) = 4$ ».

А вот образец обратного перевода.

Если  $f(x) = x^2$ , то  $f(-3) = 9$ . По-другому — значение функции  $y = x^2$  в точке  $x = -3$  равно 9.

# III. Изучение нового материала

**Пример 1.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x^3$ . Вычислить:

а)  $f(1)$ ;                      д)  $f(a - 1)$ ;

б)  $f(-4)$ ;                      е)  $f(3x)$ ;

в)  $f(a)$ ;                        ж)  $f(-x)$ .

г)  $f(2a)$ ;

# III. Изучение нового материала

**Решение.** Во всех случаях план действий один и тот же: нужно в выражении  $f(x)$  подставить вместо  $x$  то значение аргумента, которое указано в скобках, и выполнить соответствующие вычисления и преобразования.

а)  $f(1) = 1^3 = 1;$

б)  $f(-4) = (-4)^3 = -64;$

в)  $f(a) = a^3;$

г)  $f(2a) = (2a)^3 = 8a^3;$

д)  $f(a - 1) = (a - 1)^3;$

е)  $f(3x) = (3x)^3 = 27x^3;$

ж)  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3.$



**Замечание.** Разумеется, вместо буквы  $f$  можно использовать любую другую букву (в основном из латинского алфавита):  $g(x)$ ,  $h(x)$ ,  $s(x)$  и т. д.

# Функция $y = f(x)$ .

$y = f(x)$  - зависимость  $y$  от  $x$  по правилу  $f$ .

$x$  – независимая переменная (аргумент)

$y$  – зависимая переменная (функция)

$f$  – правило зависимости (уравнение, график и т.д.)

1) Область определения функции – допустимые значения аргумента ( $x$ ).

ширина по  $Ox$

$D(y)$

2) Множество значений функции – соответствующие значения функции ( $y$ ).

высота по  $Oy$

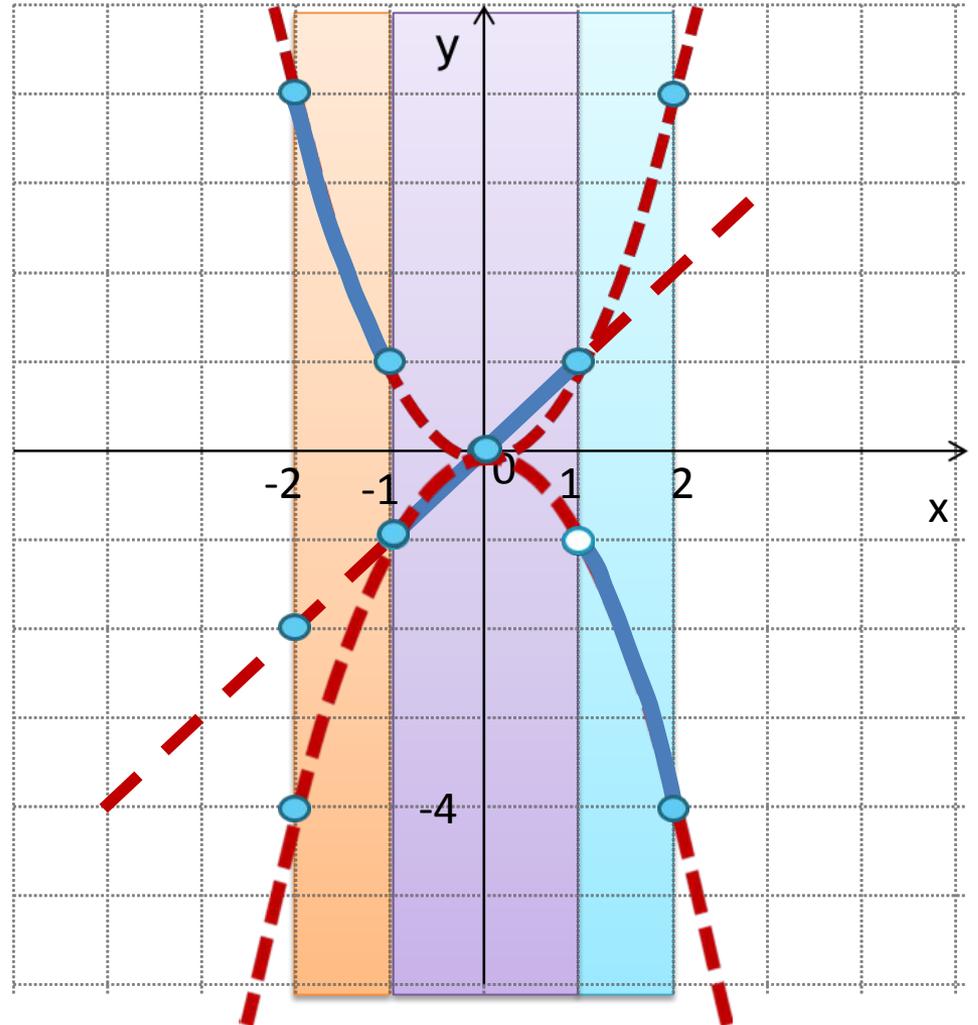
$E(y)$

Для каждого значения  $x$  – единственное значение  $y$ .

## Задание 1.

Построить график функции  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq -1, \\ x, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ -x^2, & \text{если } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

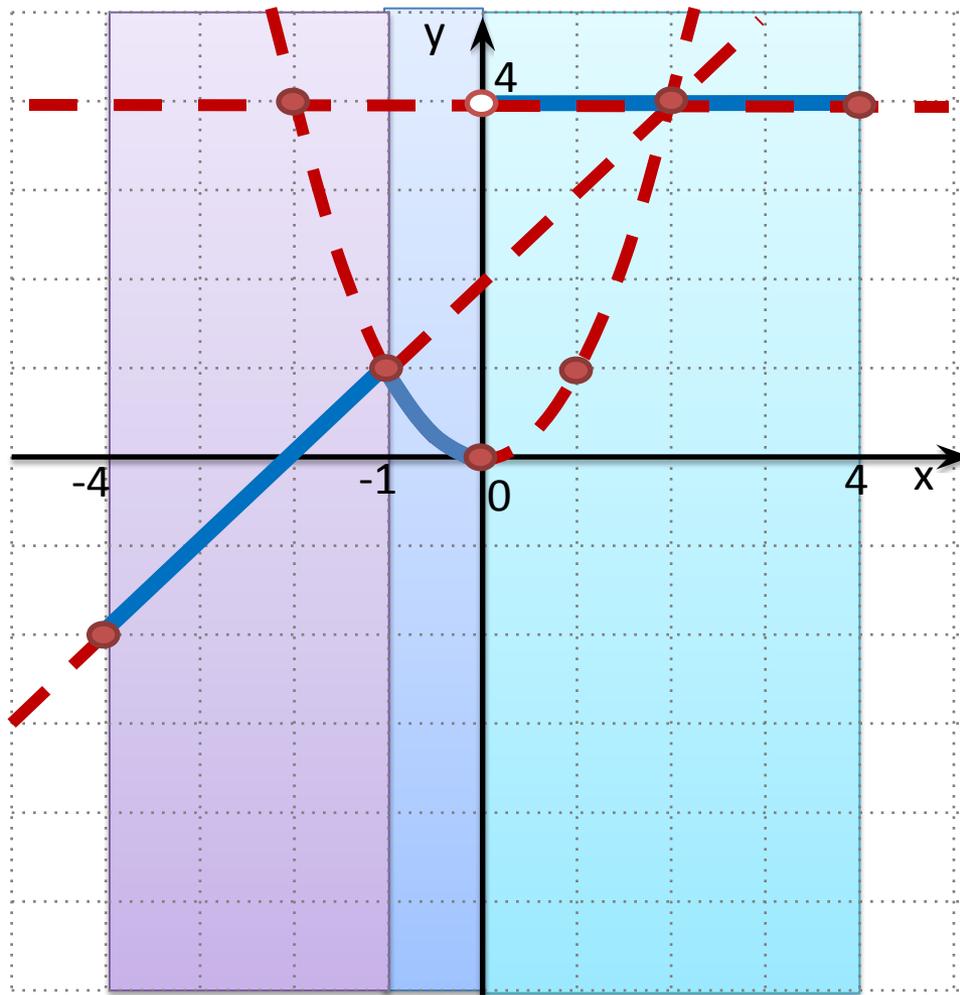
1. Построить график функции  $y = x^2$
2.  $-2 \leq x \leq -1$
3. Построить график функции  $y = x$
4.  $-1 < x \leq 1$
5. Построить график функции  $y = -x^2$
6.  $1 < x \leq 2$



## Задание

Построить график функции  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } -4 \leq x \leq -1; \\ x^2, & \text{если } -1 < x \leq 0; \\ 4, & \text{если } 0 < x \leq 4. \end{cases}$

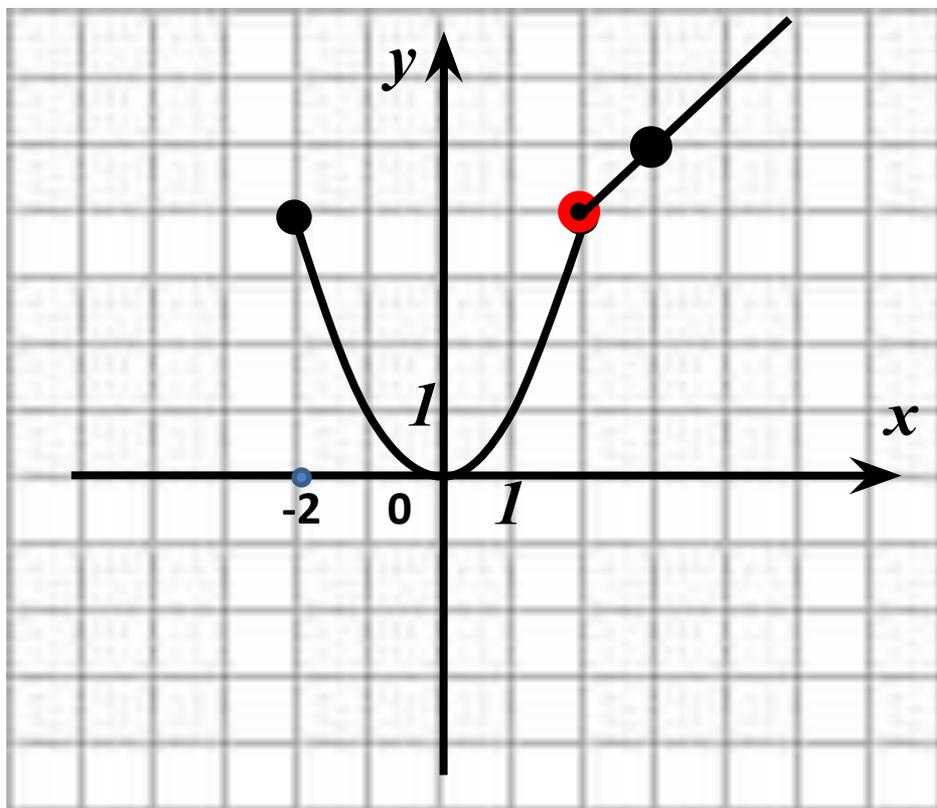
1. Построить график функции  $y = x + 2$ .
2.  $-4 \leq x \leq -1$
3. Построить график функции  $y = x^2$ .
4.  $-1 < x \leq 0$
5. Построить график функции  $y = 4$
6.  $0 < x \leq 4$



## Примеры

Построить график функции

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2 \\ x + 2, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$



1)  $D(y) = [-2; +\infty) \leq 2$

2)  $E(y) = [0; +\infty)$

3)  $y_{\text{наим}} = 0$ ,  $y_{\text{наиб}}$  — не существует

$y = x + 2$  если  $x > 2$

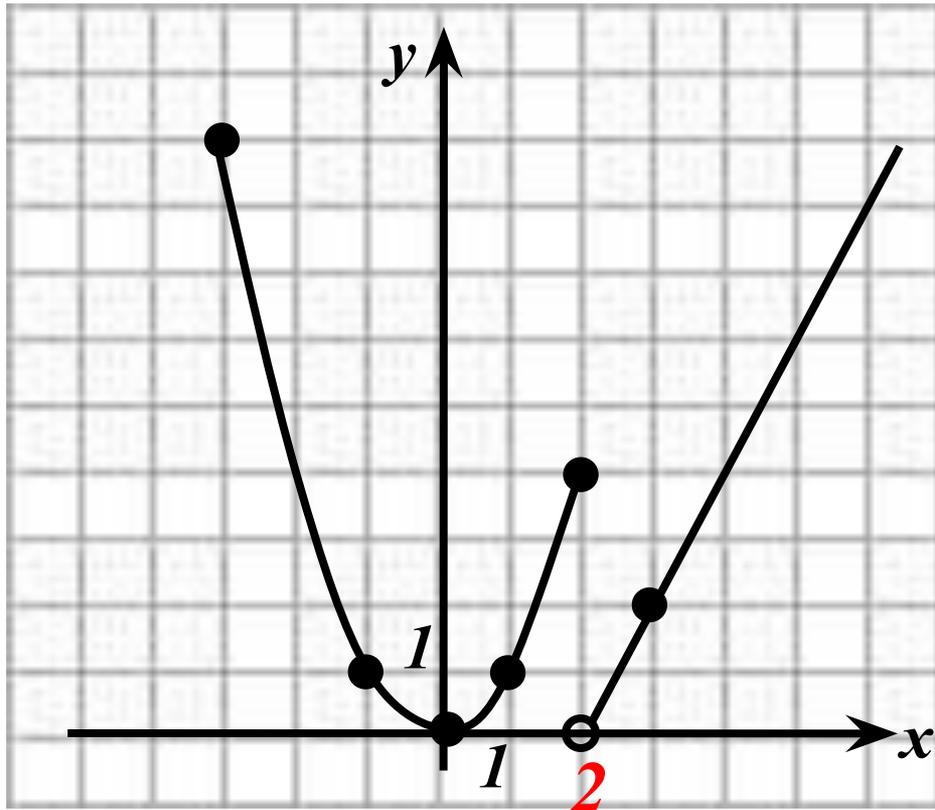
4) возрастает на  $[0; +\infty)$

убывает на  $[-2; 0]$

5) непрерывна

# Построить график и прочитать свойства

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } -3 \leq x \leq 2; \\ 2x - 4, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$



$$1) D(y) = [-3; 2] \cup (2; +\infty)$$

$$2) E(y) = [0; +\infty)$$

$$3) y_{\text{наим}} = 0,$$

$$4, x > 2$$

$y_{\text{наиб}} = \text{не существует}$

4) возрастает на  $[0; 2]$  и на  $(2; +\infty)$ ;

убывает на  $[-3; 0]$

5) разрывна в точке  $x = 2$

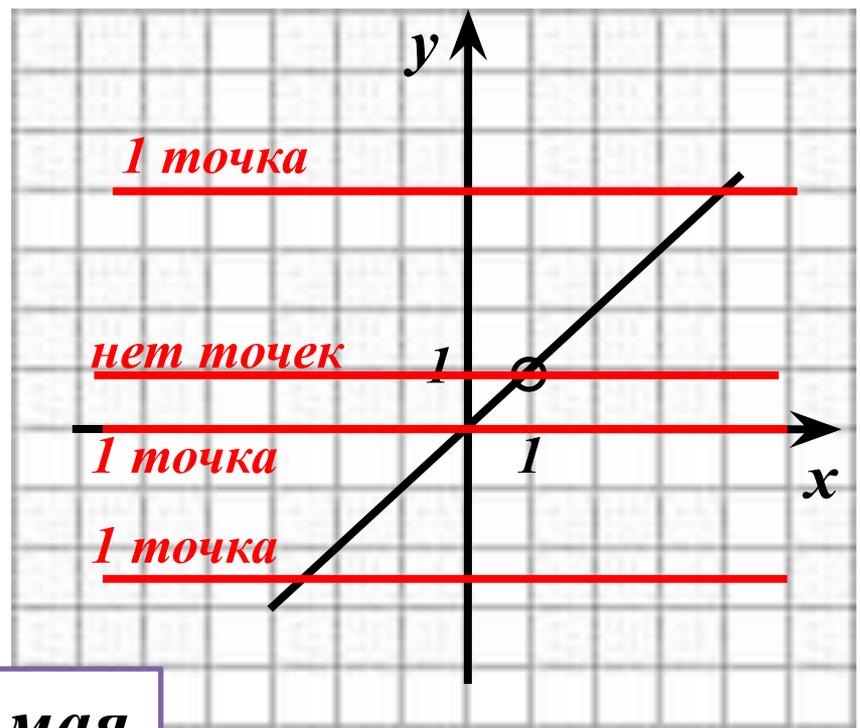
Постройте график функции  $y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$  и определите, при каких значениях  $p$  прямая  $y = p$  не имеет с этим графиком точек пересечения.

$$y = \frac{x(x - 1)}{x - 1}$$

$$y = x, \text{ при } x \neq 1$$

*прямая*

$x$	$0$	$2$
$y$	$0$	$2$



$y = p$  – горизонтальная прямая

Ответ: при  $p = 1$ .



***Постройте график функции***

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{если } 1 < x \leq 6 \end{cases}$$

***и опишите её свойства.***



$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{если } 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$y = 2x^2$$

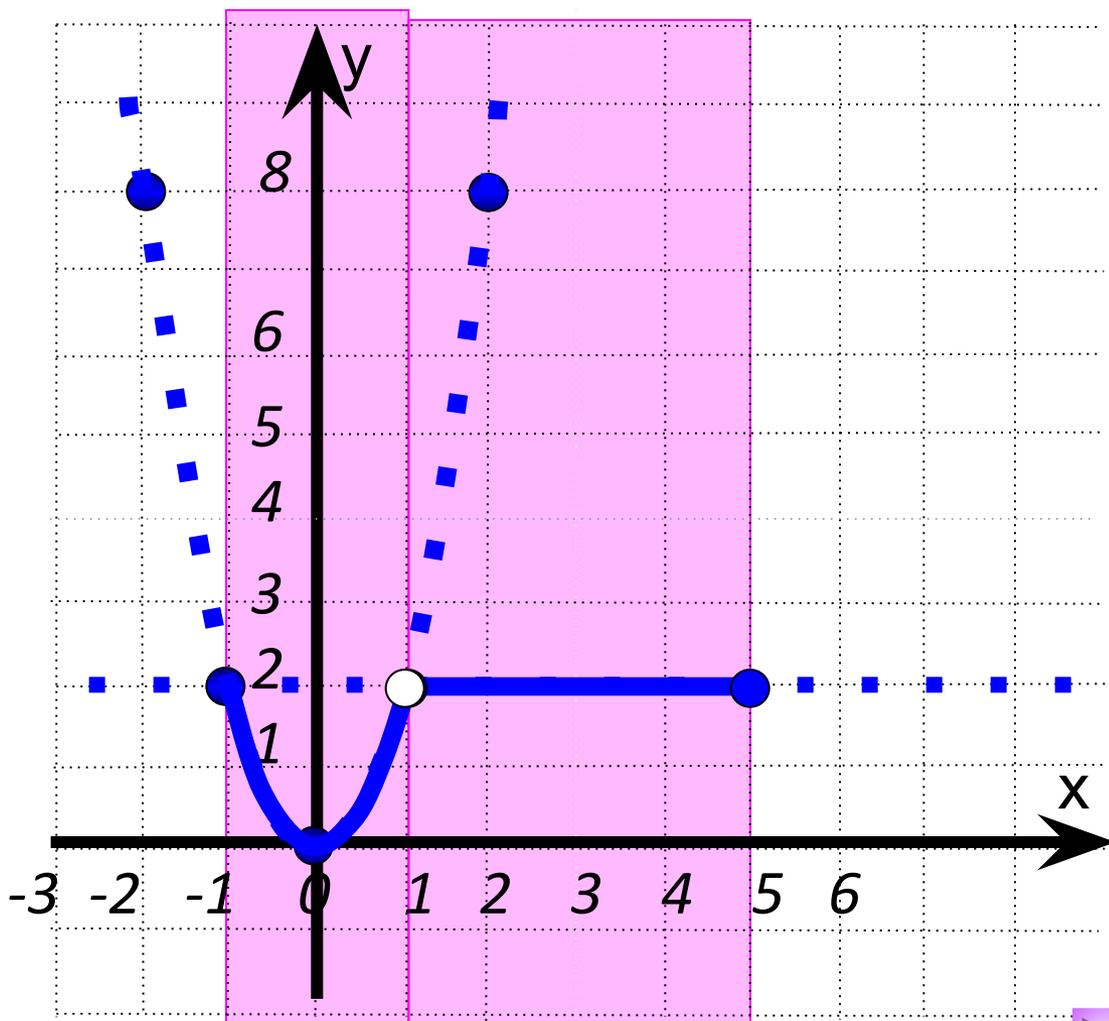
$x$	0	$\pm 1$	$\pm 2$
$y$	0	2	8

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$y = 2$$

$x$	1	6
$y$	2	2

$$1 < x \leq 5$$



# Свойства функции:

1. Область определения  $D(f) = [-1; 5]$

2. Область значений  $E(f) = [0; 2]$

3.  $y_{\text{наим.}} = 0$ , если  $x = 0$   
 $y > 0$ , если

$$x \in [-1; 0) \cup (0; 5]$$

4. Функция убывает

при  $x \in [0; 1]$

Функция возрастает

при  $x \in [-1; 0]$

Функция постоянна

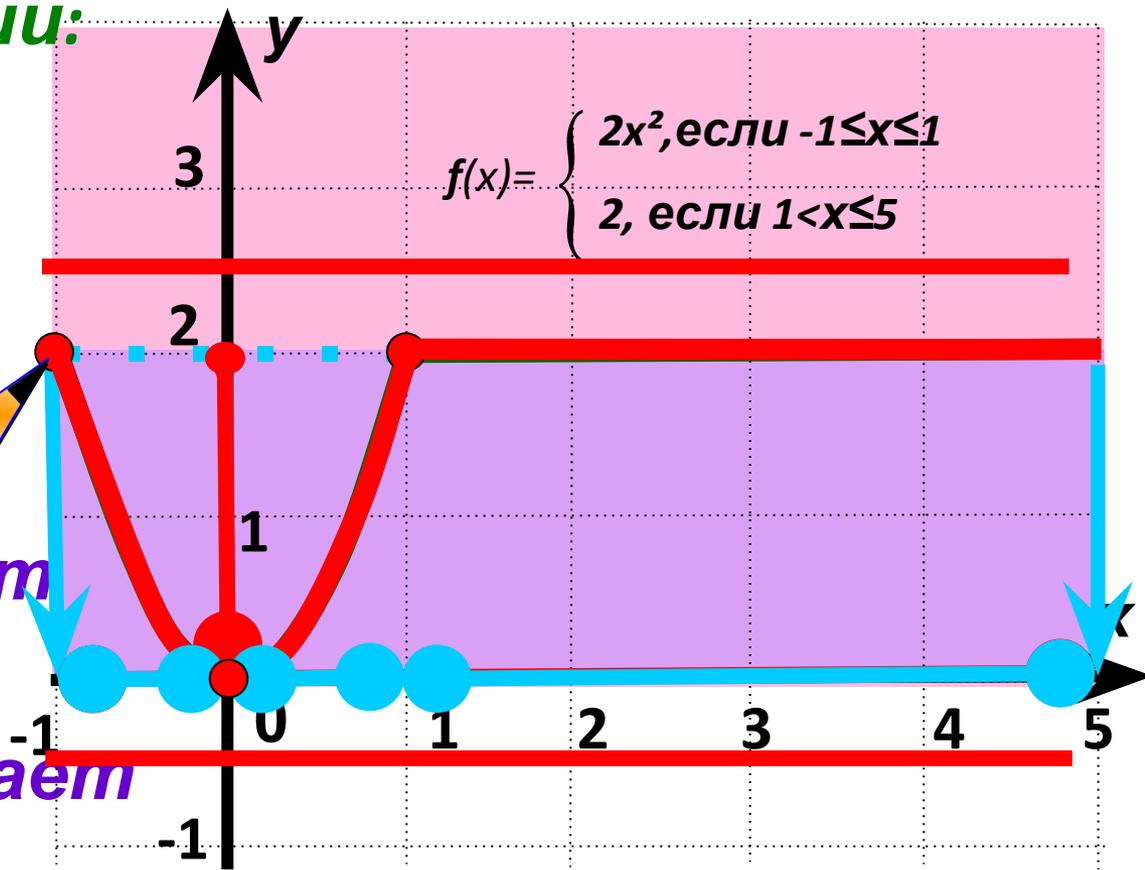
при  $x \in [1; 5]$

5. Функция чёткая и нечёткая сверху и снизу.

6.  $y_{\text{наим.}} = 0$

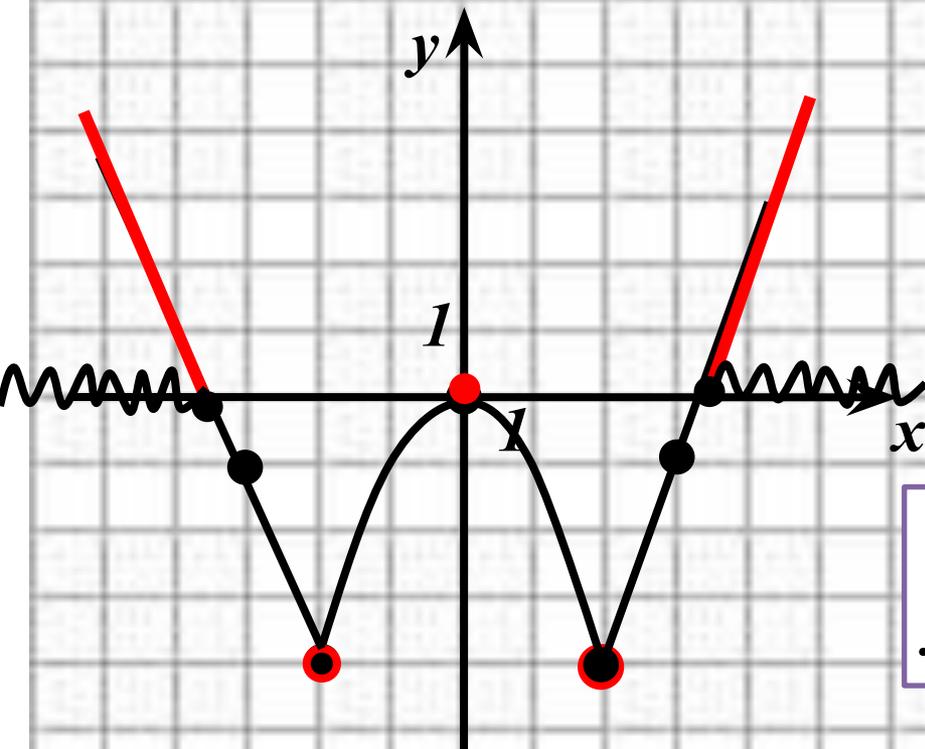
$y_{\text{наиб.}} = 2$

7. Непрерывность



Постройте график функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ 3x - 10, & \text{если } x > 2, \\ -3x - 10, & \text{если } x < -2. \end{cases}$

При каких значениях  $x$  значения функции неотрицательны?



*Найти: при каких  $x$   $y \geq 0$ ?*

$$3x - 10 = 0 \quad \text{и} \quad -3x - 10 = 0$$
$$x = 10/3 \quad \quad \quad x = -10/3$$

$$y \geq 0 \text{ при}$$
$$x \in (-\infty; -10/3] \cup \{0\} \cup [10/3; +\infty)$$

**Ответ:**  $(-\infty; -10/3] \cup \{0\} \cup [10/3; +\infty)$