Построение графика

II. Постановка проблемы

Ещё раз напомним, что к настоящему моменту мы изучили следующие математические модели: $y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$. Есть ли у этих математических моделей что-либо общее?

II. Постановка проблемы

Есть! Их структура одинакова:

$$y = f(x).$$

Эту запись («игрек равен эф от икс») следует понимать так: имеется выражение $f(x)$ с переменной x, с помощью которого мы находим значения переменной y.

Математики предпочитают запись $y = f(x)$ не случайно. Пусть, например, $f(x) = x^2$, т. е. речь идёт о функции $y = x^2$. Пусть нам надо выделить несколько значений аргумента и соответствующих значений функции. До сих пор мы писали так:

если $x = 1$, то $y = 1^2 = 1$;

если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$ и т. д.

III. Изучение нового материала

Если же использовать обозначение $f(x) = x^2$, то запись становится более экономной:

$$f(1) = 1^2 = 1;$$
$$f(-3) = (-3)^2 = 9.$$

Итак, мы познакомились ещё с одним фрагментом математического языка: фраза «значение функции $y = x^2$ в точке $x = 2$ равно 4» записывается короче: «если $f(x) = x^2$, то $f(2) = 4$».

А вот образец обратного перевода.

Если $f(x) = x^2$, то $f(-3) = 9$. По-другому — значение функции $y = x^2$ в точке $x = -3$ равно 9.

III. Изучение нового материала

Пример 1. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^3$. Вычислить:

а) $f(1)$;
б) $f(-4)$;
в) $f(a)$;
г) $f(2a)$;
д) $f(a - 1)$;
е) $f(3x)$;
ж) $f(-x)$.

III. Изучение нового материала

Решение. Во всех случаях план действий один и тот же: нужно в выражении $f(x)$ подставить вместо x то значение аргумента, которое указано в скобках, и выполнить соответствующие вычисления и преобразования.

а) $f(1) = 1^3 = 1$;
б) $f(-4) = (-4)^3 = -64$;
в) $f(a) = a^3$;
г) $f(2a) = (2a)^3 = 8a^3$;
д) $f(a - 1) = (a - 1)^3$;
е) $f(3x) = (3x)^3 = 27x^3$;
ж) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$.

Замечание. Разумеется, вместо буквы f можно использовать любую другую букву (в основном из латинского алфавита): $g(x)$, $h(x)$, $s(x)$ и т. д.

Функция $y = f(x)$.

$y = f(x)$ - зависимость y от x по правилу f .

x – независимая переменная (аргумент)

y – зависимая переменная (функция)

f – правило зависимости (уравнение, график и т.д.)

1)Область определения функции – допустимые значения аргумента (x).

ширина по Ox

$D(y)$

2)Множество значений функции – соответствующие значения функции (y).

высота по Oy

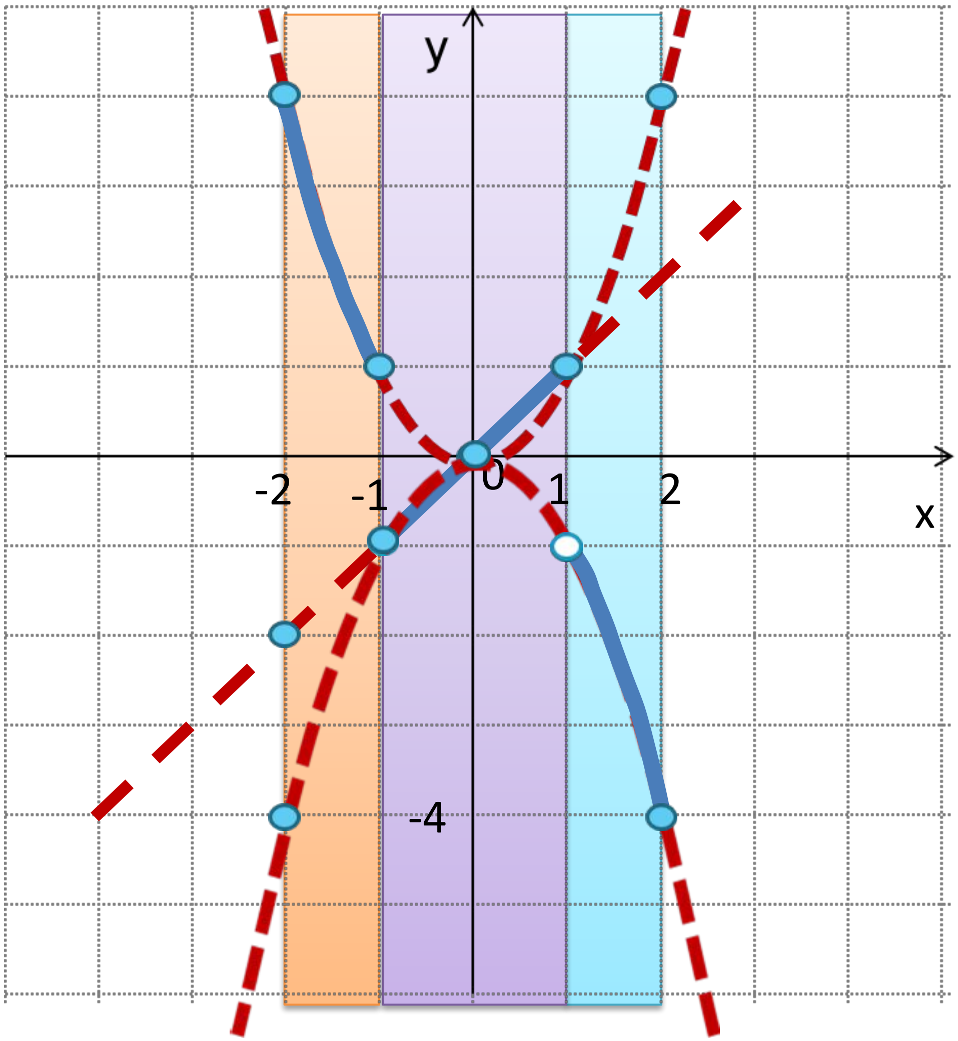
$E(y)$

Для каждого значения x – единственное значение y.

Задание1.

Построить график функции $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{если } -2 \le x \le -1, \\ x, \text{если } -1 < x \le 1, \\ -x^2, \text{если } 1 < x \le 2 \end{cases}$

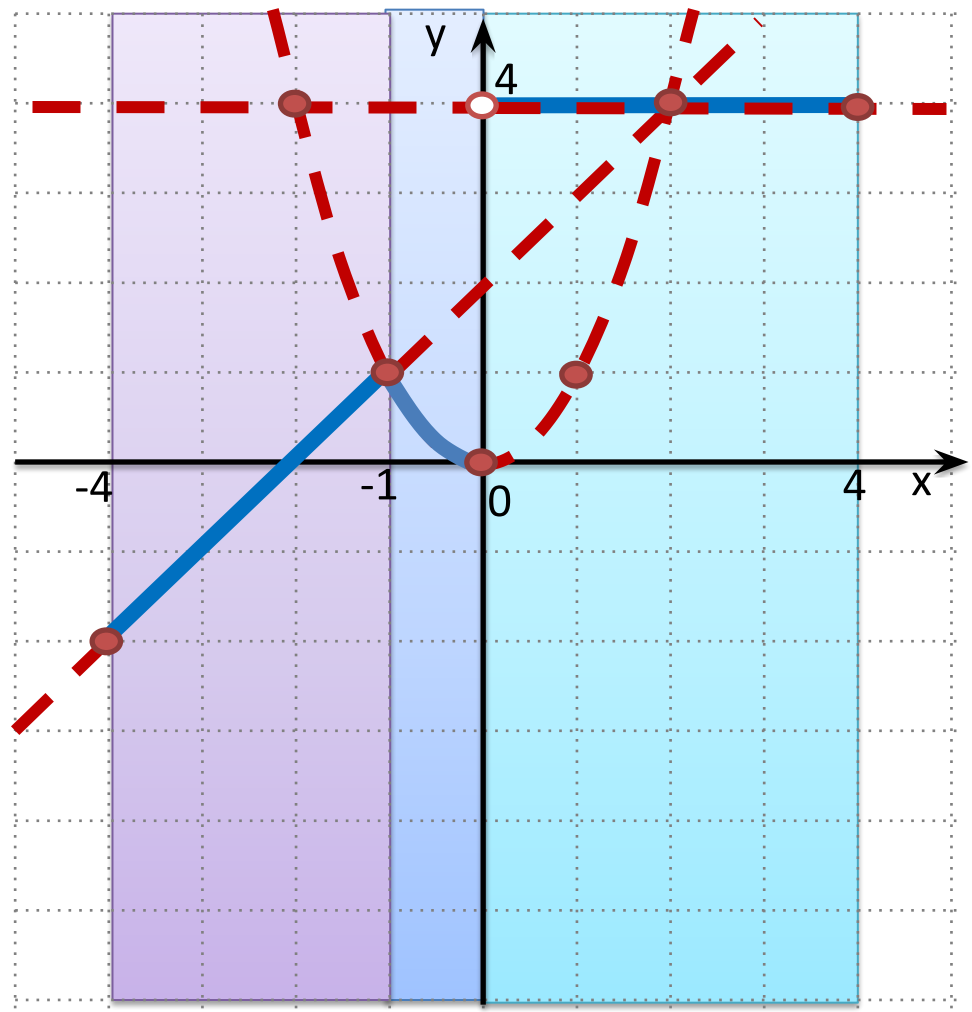
1. Построить график функции $y = x^2$
2. $-2 \le x \le -1$
3. Построить график функции $y = x$
4. $-1 < x \le 1$
5. Построить график функции $y = -x^2$
6. $1 < x \le 2$



Задание 2.

Построить график функции $f(x) = \begin{cases} x+2, \text{если } -4 \le x \le -1; \\ x^2, \text{если } -1 < x \le 0; \\ 4, \text{если } 0 < x \le 4. \end{cases}$

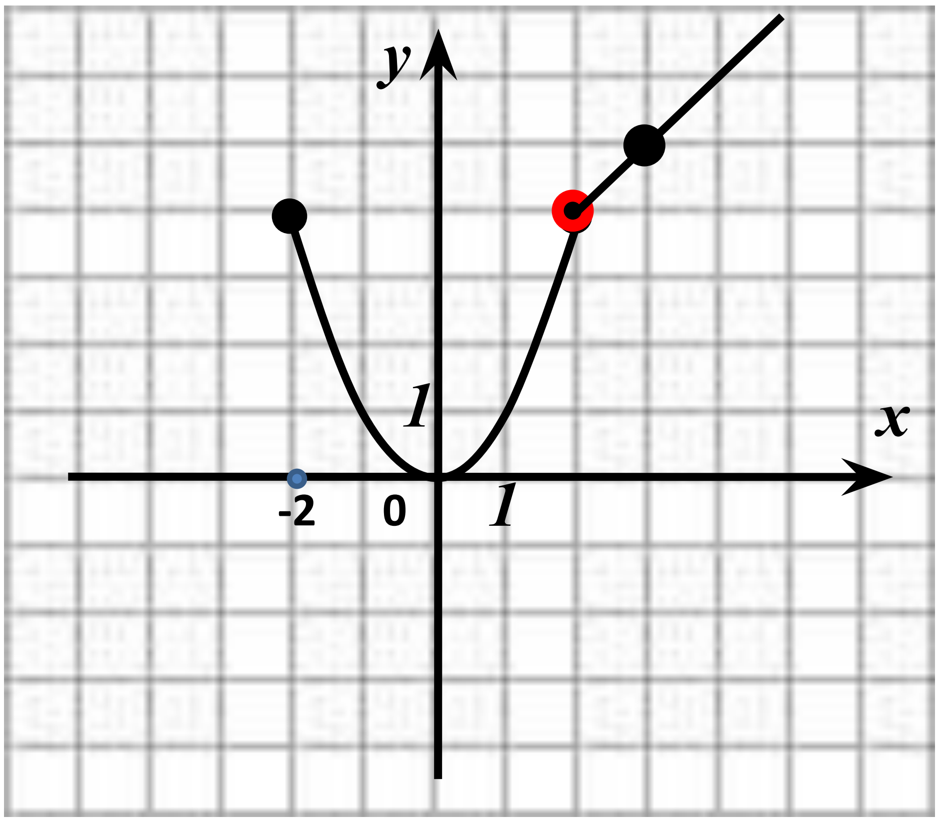
1. Построить график функции $y = x + 2$.
2. $-4 \le x \le -1$
3. Построить график функции $y = x^2$.
4. $-1 < x \le 0$
5. Построить график функции $y = 4$
6. $0 < x \le 4$



Примеры

Построить график функции

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } -2 \le x \le 2 \\ x + 2, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$



1) $D(y) = [-2; +\infty)$

2) $E(y) = [0; +\infty)$

3) $y_{наим} = 0$, $y_{наиб}$ – не сущ-т

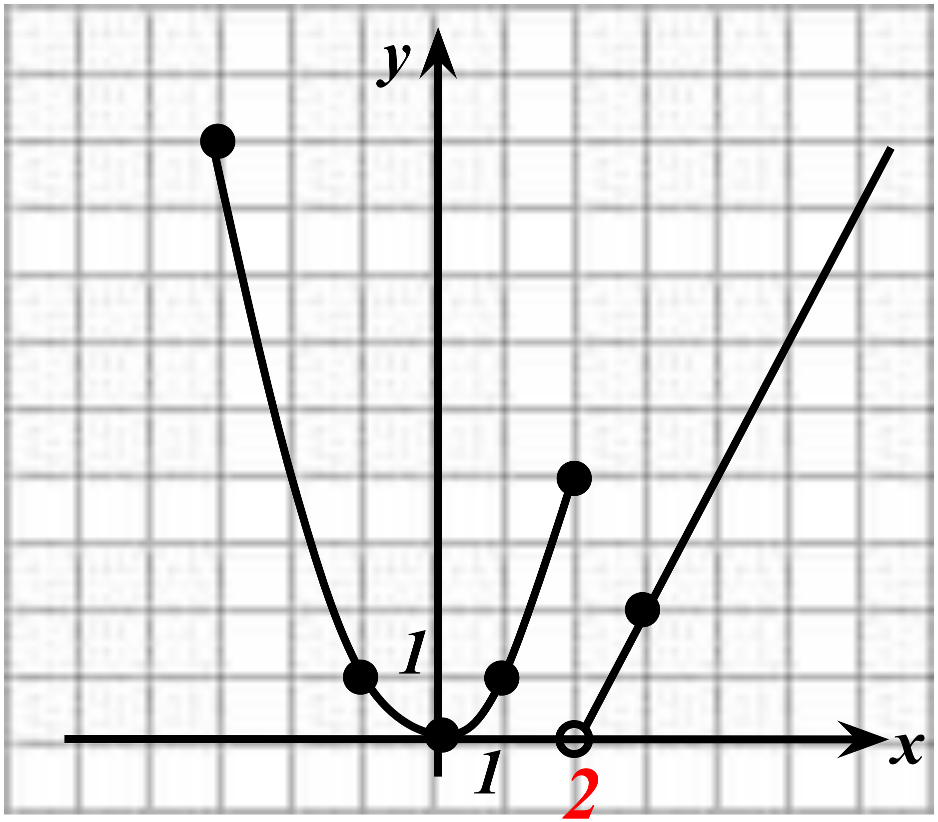
4) возрастает на $[0; +\infty)$

убывает на $[-2; 0]$

5) непрерывна

Построить график и прочитать свойства

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2x - 4, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$



			2
y	- 9	0	- 4

4 , x >2

1)D(y) = [-3;2]∪(2;+∞)

2)E(y) = [0;+∞)

3)$y_{наим}$ = 0,

$y_{наиб}$ = не существует

4)возрастает на [0;2] и на (2;+∞);

убывает на [-3;0]

5)разрывна в точке x = 2

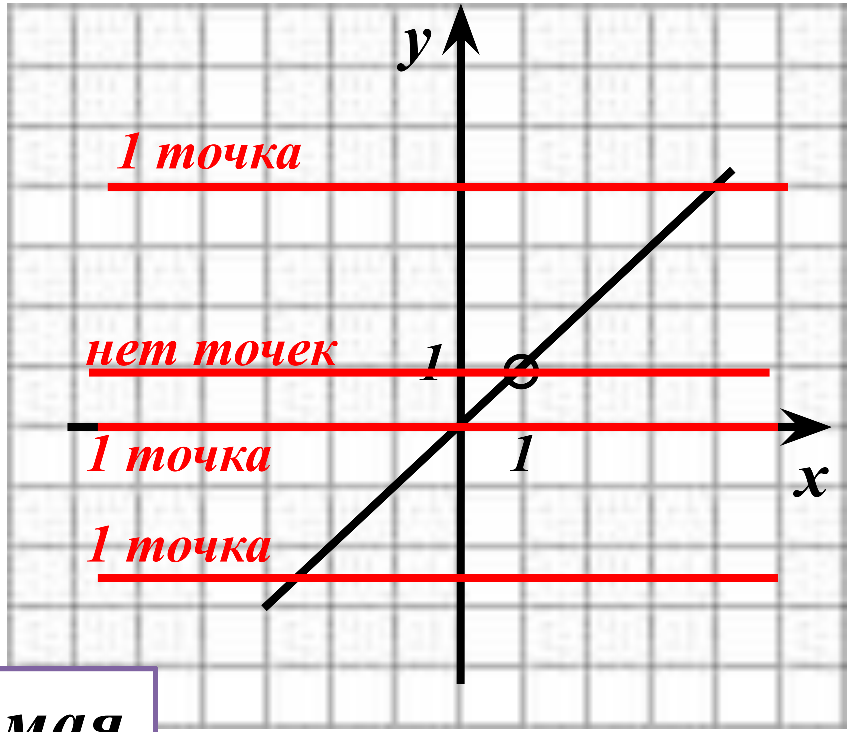
Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ и определите, при каких значениях p прямая $y = p$ не имеет с этим графиком точек пересечения.

$$y = \frac{x(x-1)}{x-1}$$

$$y = x, \text{при } x \neq 1$$

прямая

x	*0*	*2*
y	*0*	*2*



y = p – горизонтальная прямая

Ответ: ***при p = 1.***

Постройте график функции

$$f(x)=\begin{cases}2x^2, \text{если } -1\le x\le 1\\ 2, \text{если } 1<x\le 6\end{cases}$$

и опишите её свойства.

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2, \text{если } -1\le x\le 1 \\ 2, \text{если } 1<x\le 5 \end{cases}$$

$y=2x^2$

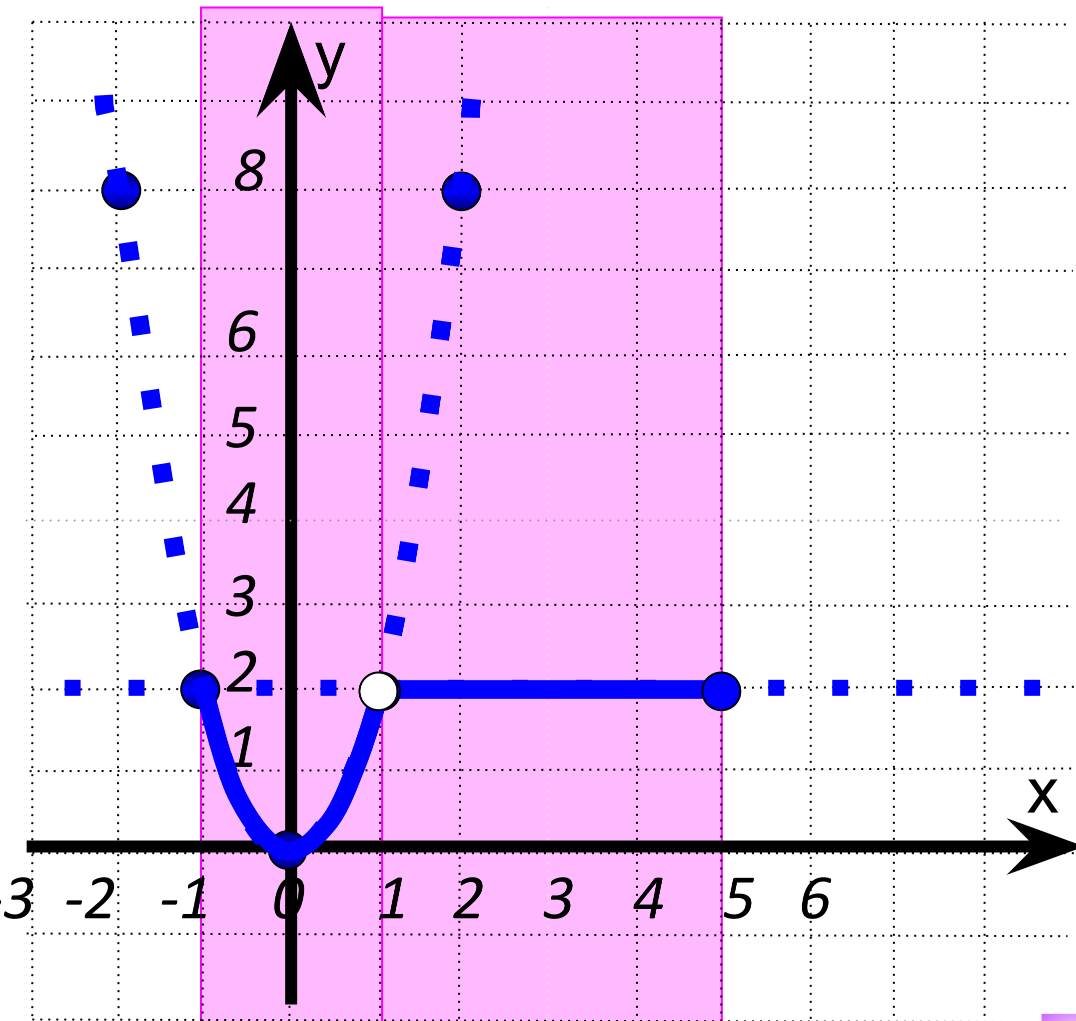
X	0	±1	±2
y	0	2	8

$-1 \le x \le 1$

$y=2$

X	1	6
y	2	2

$1 < x \le 5$



Свойства функции:

1. Область определения

1. $D(f)=[-1;5]$

2. Область значений

2. $E(f)=[0;2]$

3. у=0, если х= 0

у>0, если

х $\in[-1;0)\cup(0;5]$

4. Функция убывает при х $\in[0;1]$

Функция возрастает при х $\in[-1;0]$

Функция постоянна при х $\in[1;5]$

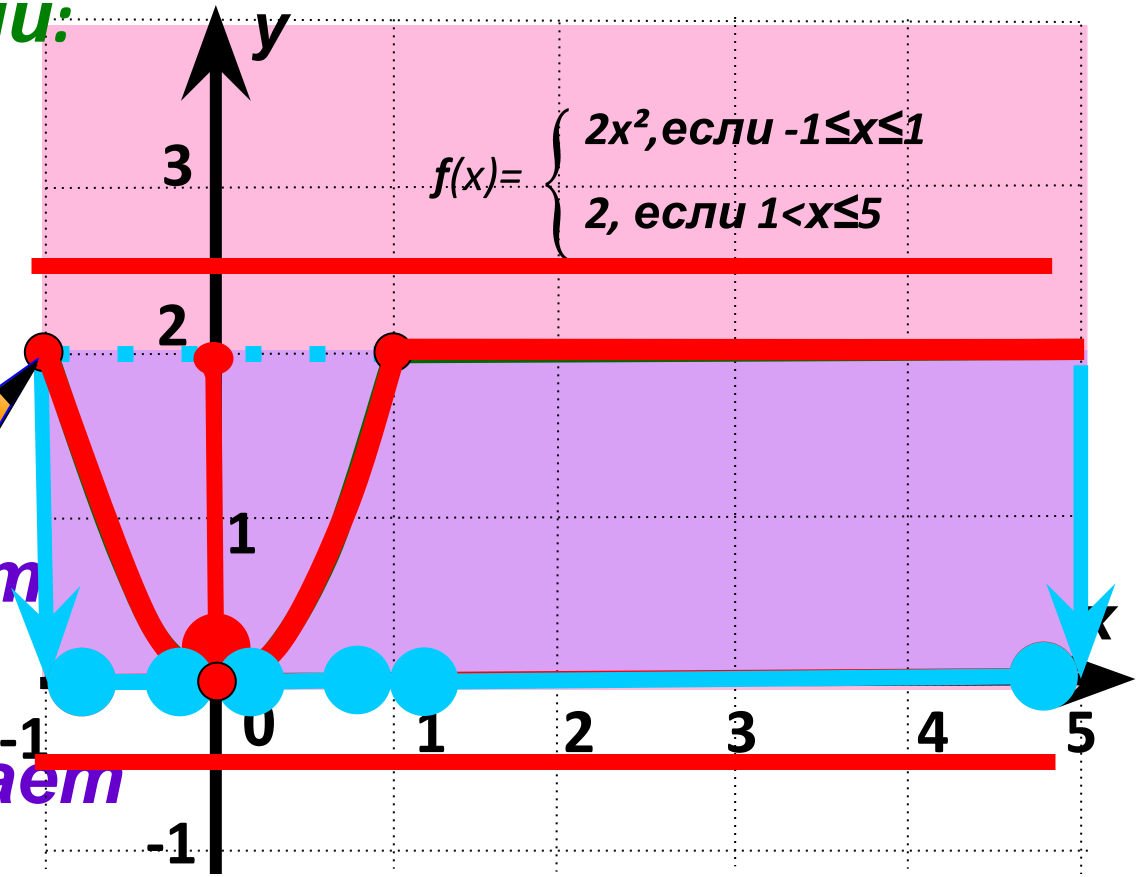
5. Ограниченность

5. Функция ограничена сверху и снизу.

6. $y_{наим.}= 0$ $y_{наиб.}= 2$

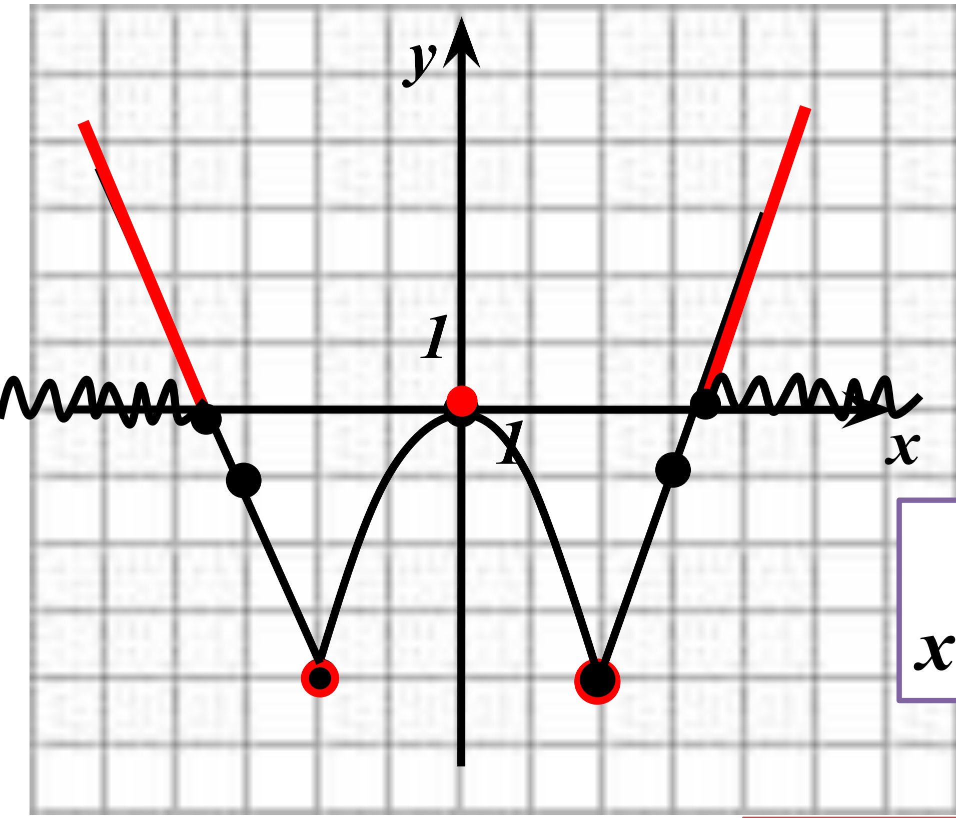
7. Непрерывность

7. Непрерывна.



Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x - 10, \text{ если } x > 2, \\ -3x - 10, \text{ если } x < -2. \end{cases}$

При каких значениях x значения функции неотрицательны?



Найти: при каких x $y \geq 0$?

$3x - 10 = 0$ и $-3x - 10 = 0$

$x = 10/3$ $x = -10/3$

$y \geq 0$ при

$x \in (-\infty; -10/3] \cup \{0\} \cup [10/3; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -10/3] \cup \{0\} \cup [10/3; +\infty)$