

Построение графика

II. Постановка проблемы

Ещё раз напомним, что к настоящему моменту мы изучили следующие математические модели: $y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$. Есть ли у этих математических моделей что-либо общее?

II. Постановка проблемы

Есть! Их структура одинакова:

$$y = f(x).$$

Эту запись («игрек равен эф от икс») следует понимать так: имеется выражение $f(x)$ с переменной x , с помощью которого мы находим значения переменной y .

Математики предпочитают запись $y = f(x)$ не случайно. Пусть, например, $f(x) = x^2$, т. е. речь идёт о функции $y = x^2$. Пусть нам надо выделить несколько значений аргумента и соответствующих значений функции. До сих пор мы писали так:

если $x = 1$, то $y = 1^2 = 1$;

если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$ и т. д.

III. Изучение нового материала

Если же использовать обозначение $f(x) = x^2$, то запись становится более экономной:

$$\begin{aligned}f(1) &= 1^2 = 1; \\f(-3) &= (-3)^2 = 9.\end{aligned}$$

Итак, мы познакомились ещё с одним фрагментом математического языка: фраза «значение функции $y = x^2$ в точке $x = 2$ равно 4» записывается короче: «если $f(x) = x^2$, то $f(2) = 4$ ».

А вот образец обратного перевода.

Если $f(x) = x^2$, то $f(-3) = 9$. По-другому — значение функции $y = x^2$ в точке $x = -3$ равно 9.

III. Изучение нового материала

Пример 1. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^3$. Вычислить:

- а) $f(1)$;
- б) $f(-4)$;
- в) $f(a)$;
- г) $f(2a)$;
- д) $f(a - 1)$;
- е) $f(3x)$;
- ж) $f(-x)$.

III. Изучение нового материала

Решение. Во всех случаях план действий один и тот же: нужно в выражении $f(x)$ подставить вместо x то значение аргумента, которое указано в скобках, и выполнить соответствующие вычисления и преобразования.

а) $f(1) = 1^3 = 1;$

б) $f(-4) = (-4)^3 = -64;$

в) $f(a) = a^3;$

г) $f(2a) = (2a)^3 = 8a^3;$

д) $f(a - 1) = (a - 1)^3;$

е) $f(3x) = (3x)^3 = 27x^3;$

ж) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3.$



Замечание. Разумеется, вместо буквы f можно использовать любую другую букву (в основном из латинского алфавита): $g(x)$, $h(x)$, $s(x)$ и т. д.

Функция $y = f(x)$.

$y = f(x)$ - зависимость y от x по правилу f .

x – независимая переменная (аргумент)

y – зависимая переменная (функция)

f – правило зависимости (уравнение, график и т.д.)

1) Область определения функции – допустимые значения аргумента (x).

ширина по Ox

$D(y)$

2) Множество значений функции – соответствующие значения функции (y).

высота по Oy

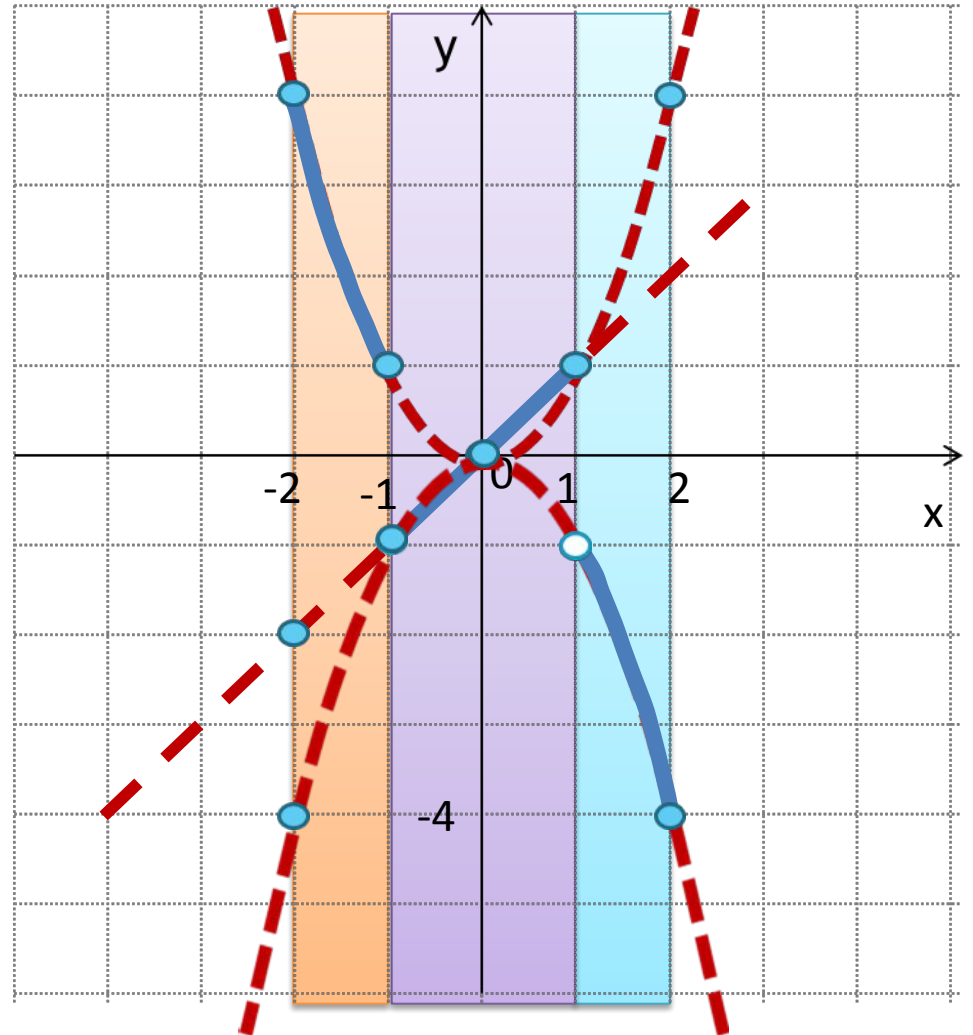
$E(y)$

Для каждого значения x – единственное значение y .

Задание 1.

Построить график функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq -1, \\ x, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ -x^2, & \text{если } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

1. Построить график функции $y = x^2$
2. $-2 \leq x \leq -1$
3. Построить график функции $y = x$
4. $-1 < x \leq 1$
5. Построить график функции $y = -x^2$
6. $1 < x \leq 2$



Задание

Построить график функции $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } -4 \leq x \leq -1; \\ x^2, & \text{если } -1 < x \leq 0; \\ 4, & \text{если } 0 < x \leq 4. \end{cases}$

1. Построить график функции $y = x + 2$.

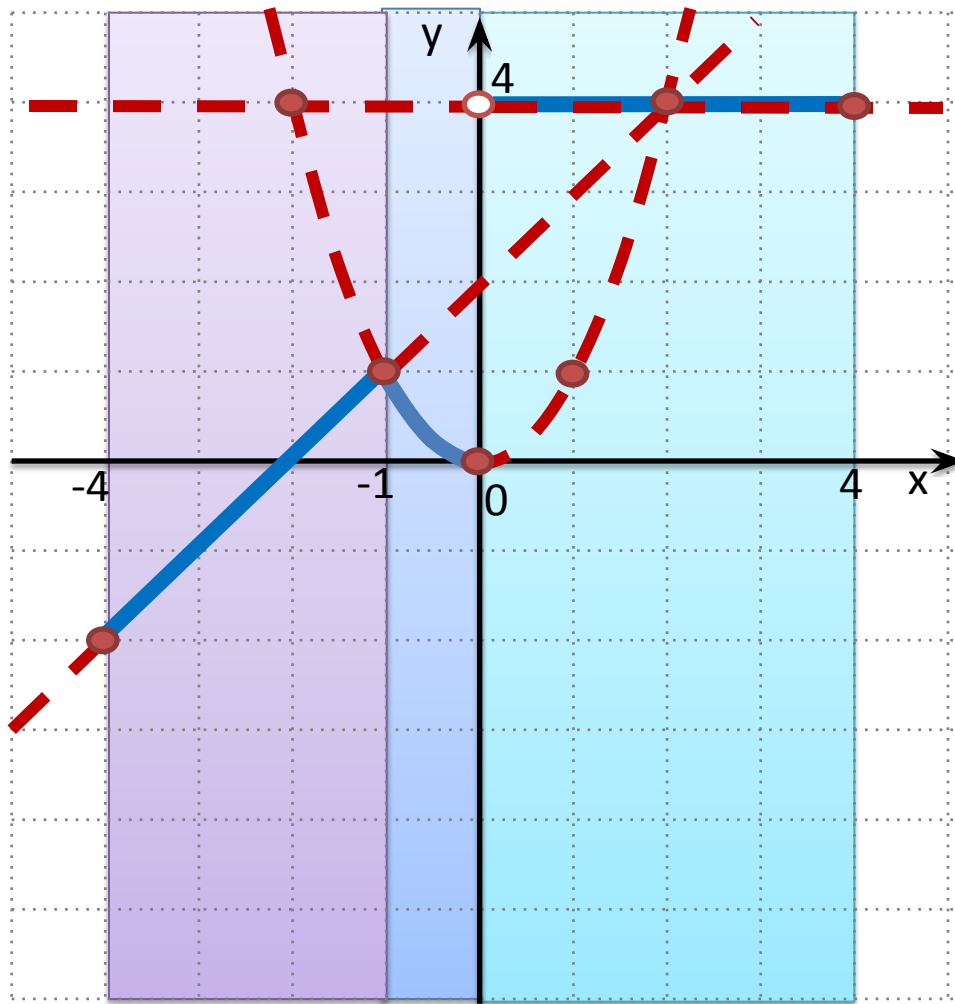
2. $-4 \leq x \leq -1$

3. Построить график функции $y = x^2$.

4. $-1 < x \leq 0$

5. Построить график функции $y = 4$

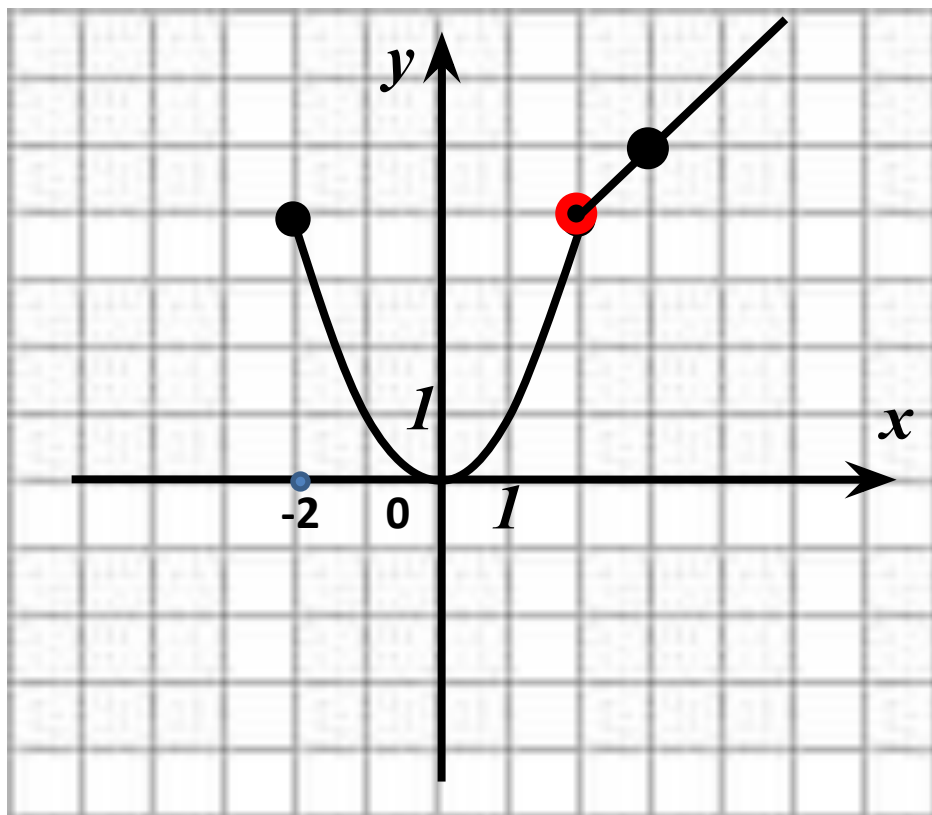
6. $0 < x \leq 4$



Примеры

Построить график функции

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2 \\ x + 2, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$



1) $D(y) = [-2; +\infty) \leq 2$

2) $E(y) = [0; +\infty)$

3) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ — не существует

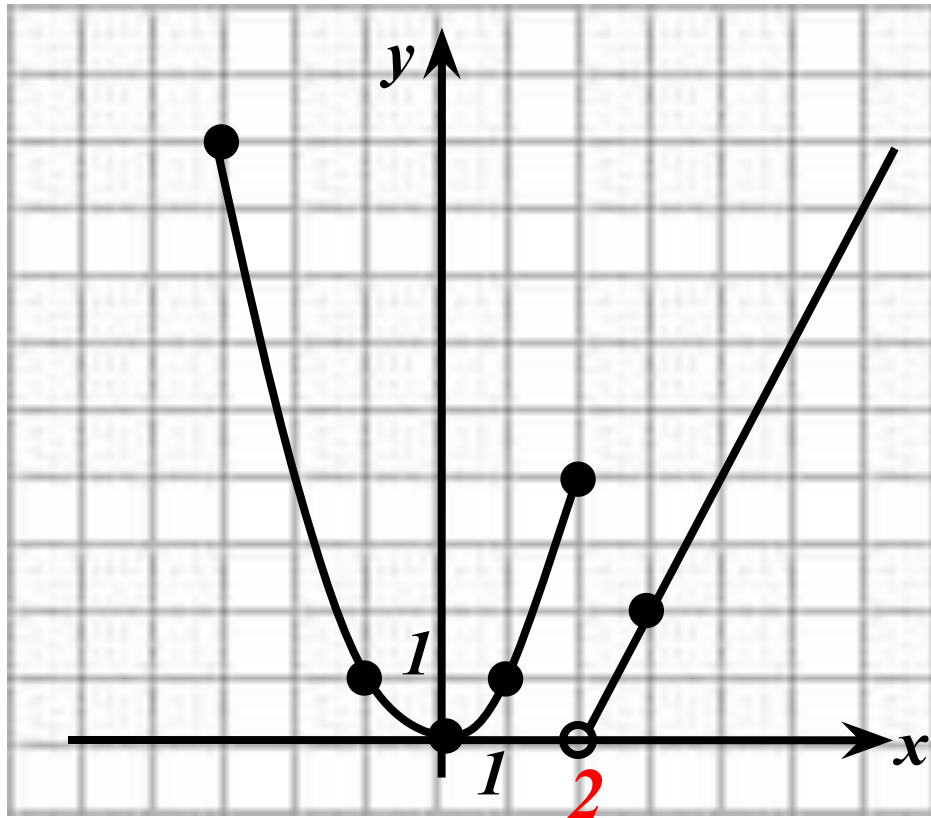
4) возрастает на $[0; +\infty)$

убывает на $[-2; 0]$

5) непрерывна

Построить график и прочитать свойства

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } -3 \leq x \leq 2; \\ 2x - 4, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$



$$1) D(y) = [-3; 2] \cup (2; +\infty)$$

$$2) E(y) = [0; +\infty)$$

$$3) y_{\text{наим}} = 0,$$

$$4, x > 2$$

$y_{\text{наиб}} = \text{не существует}$

4) возрастает на $[0; 2]$ и на $(2; +\infty)$;

убывает на $[-3; 0]$

5) разрывна в точке $x = 2$

Постройте график функции $y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ и определите, при каких значениях p прямая $y = p$ не имеет с этим графиком точек пересечения.

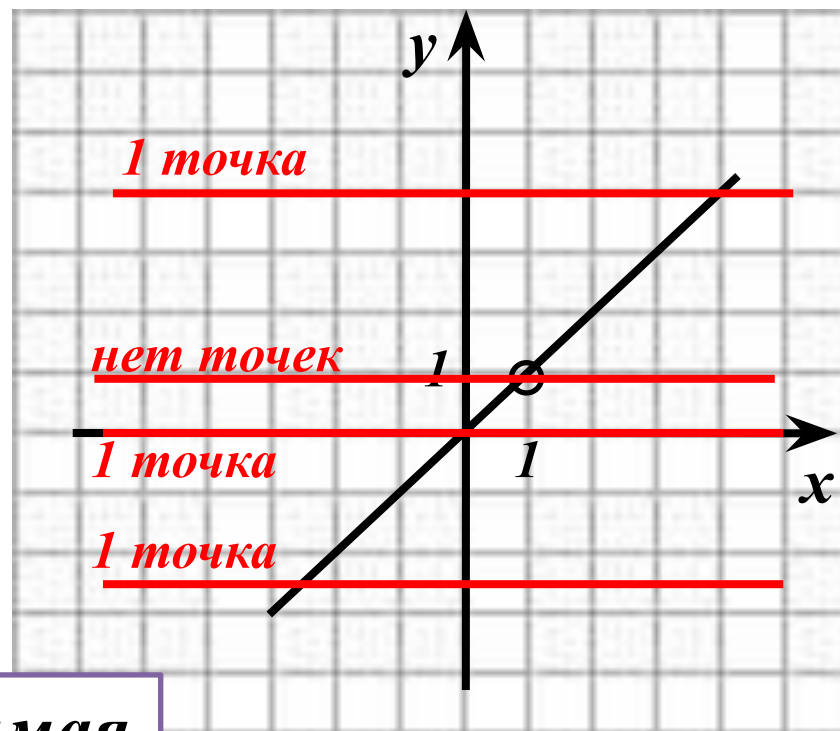
$$y = \frac{x(x - 1)}{x - 1}$$

$$y = x, \text{ при } x \neq 1$$

прямая

x	0	2
y	0	2

$y = p$ – горизонтальная прямая



Ответ: *при $p = 1$.*



Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{если } 1 < x \leq 6 \end{cases}$$

и опишите её свойства.



$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{если } 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$y = 2x^2$$

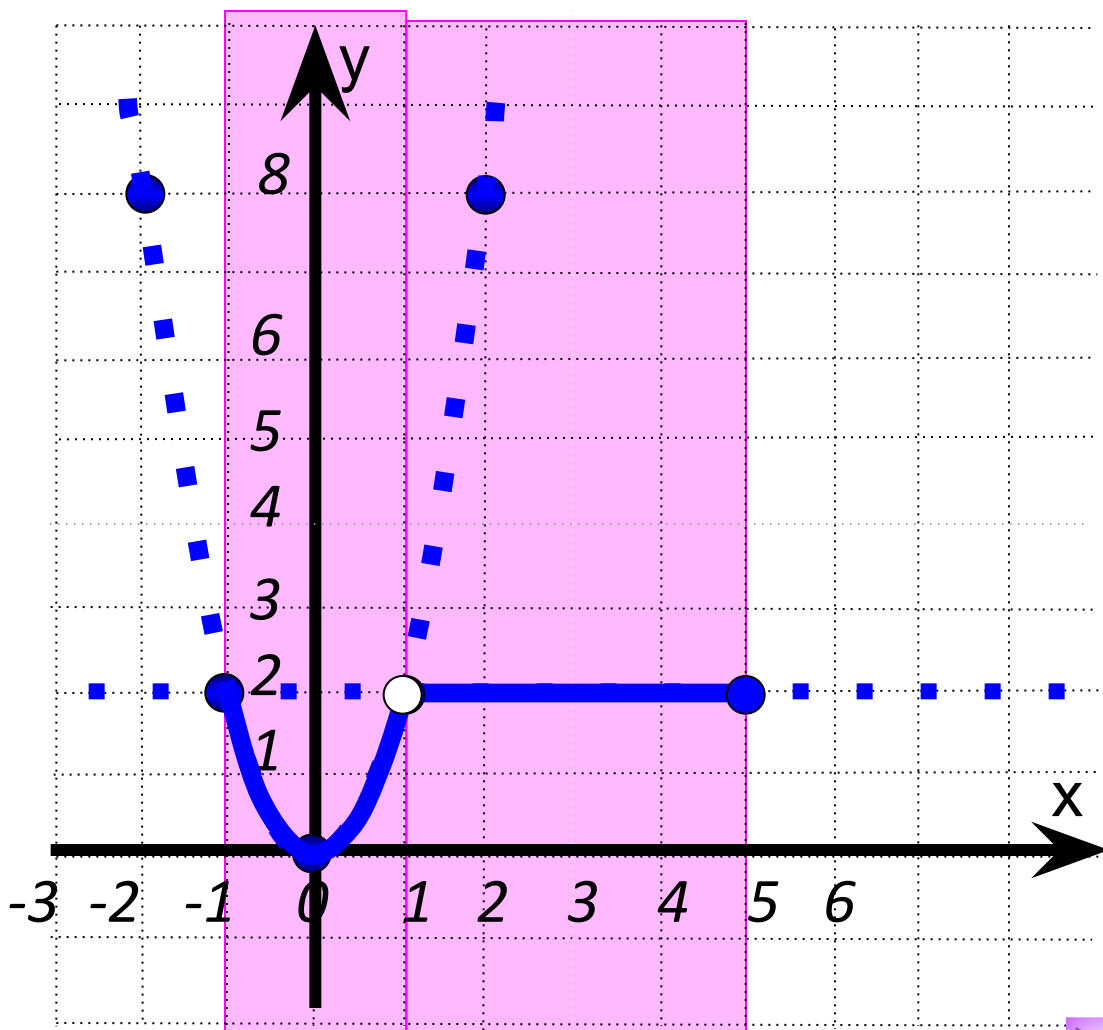
x	0	± 1	± 2
y	0	2	8

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$y = 2$$

x	1	6
y	2	2

$$1 < x \leq 5$$



Свойства функции:

1. Область определения $D(f) = [-1; 5]$

2. Область значений $E(f) = [0; 2]$

3. $y_{\text{наиб.}} = 2$, если $x = 0$
 $y > 0$, если

$$x \in [-1; 0) \cup (0; 5]$$

4. Функция убывает при $x \in [0; 1]$

Функция возрастает

при $x \in [-1; 0]$

Функция постоянна

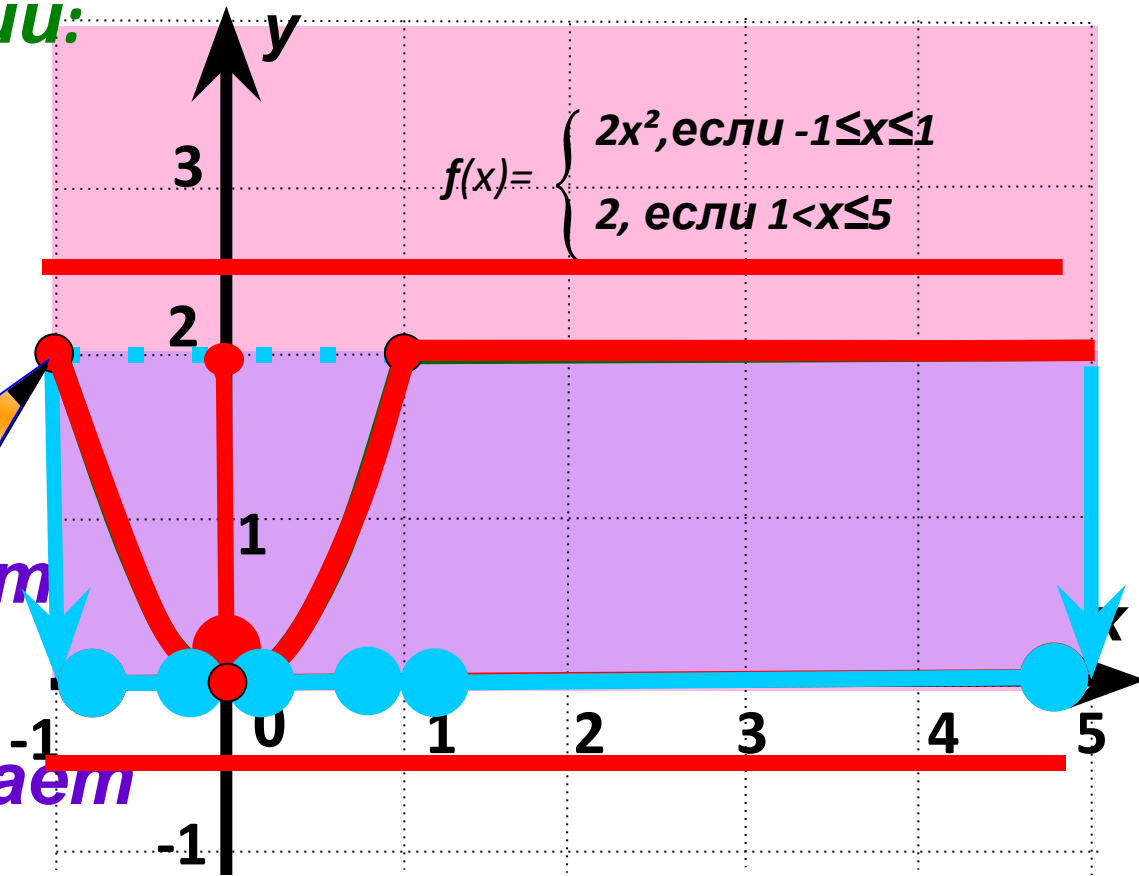
при $x \in [1; 5]$

5. Функция чётная/нечётная сверху и снизу.

6. $y_{\text{наим.}} = 0$

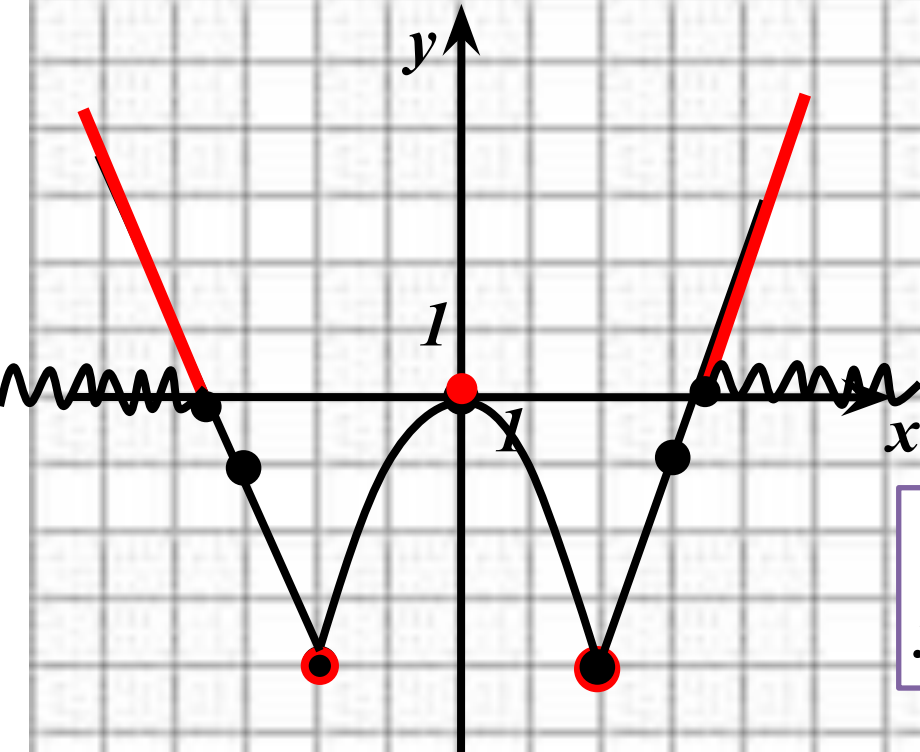
$y_{\text{наиб.}} = 2$

7. Непрерывность



Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ 3x - 10, & \text{если } x > 2, \\ -3x - 10, & \text{если } x < -2. \end{cases}$

При каких значениях x значения функции неотрицательны?



Найти: при каких x $y \geq 0$?

$$3x - 10 = 0 \quad \text{и} \quad -3x - 10 = 0$$
$$x = 10/3 \quad \quad \quad x = -10/3$$

$$y \geq 0 \text{ при}$$
$$x \in (-\infty; -10/3] \cup \{0\} \cup [10/3; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -10/3] \cup \{0\} \cup [10/3; +\infty)$