ЛК-4: Решение систем линейных уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса. Матричный метод.

Преподаватель Райлян М.Н.

Правило Крамера

- **Правило Крамера** непригодно в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

На первом шаге вычисляется определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, его называют ***главным определителем системы***.

• Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать **метод Гаусса**.

• Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, и для нахождения корней необходимо вычислить еще два определителя:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Корни уравнения находятся по формулам: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ - формулы Крамера

Пример 1

- Решить систему линейных уравнений по правилам Крамера (самостоятельно)

$$\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ x + 11y = 6 \end{cases}$$

Пример 1

- Решить систему линейных уравнений по правилам Крамера

$$\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ x + 11y = 6 \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

Правило Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными

- Рассмотрим систему: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \\ a_3\text{x} + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

Находим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.
- Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение и для нахождения корней необходимо вычислить еще три определителя:
- $\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$
- И, наконец, корни уравнения рассчитываются по формулам:
- $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

Правило Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными

- $\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

корни уравнения рассчитываются по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Пример 2(ДЗ).

- Решить систему линейных уравнений по правилам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

- $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3\mathrm{x} + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

С помощью алгебраических преобразований приведем систему к треугольному виду

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \quad 0 + b_2y + c_2z = d_2 \\ \quad\quad 0 + 0 + c_3z = d_3 \end{cases}$$

и решим полученную систему.

Пример 3

- Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$

Переставим третье уравнение на место первого, чтобы $a_{11} = 1$.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Пример 3

- Чтобы в 1-ом столбце получить $a_{21} = a_{31} = 0$, нужно
- Первую строку умножить на 3 и из 2-ой строки вычесть первую;
- Первую строку умножить на 2 и из 3-ей строки вычесть первую.
- Получим матрицу, у которой первая строка не изменилась, а на месте второй и третьей строки стоят новые числа.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Разделим 2-ую строку на 8, чтобы получить $a_{22} = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 3

Чтобы в 2-ом столбце получить $a_{32} = 0$, нужно вторую строку умножить на 3 и из 2-ой строки вычесть третью.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Получим матрицу, у которой первая и вторая строки не изменились, а на месте третьей строки стоя новые числа.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{39}{8} \end{pmatrix}$$

Запишем новую эквивалентную систему, которой соответствует расширенная матрица:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ y - \frac{7}{8}z = -\frac{5}{8} \\ \frac{13}{8}z = \frac{39}{8} \end{cases}$$

Пример 3

- Выполняя обратный ход, с помощью последовательных подставок находим неизвестные:

$$\frac{13}{8}z = \frac{39}{8}, z = 3.$$

$$y - \frac{7}{8} * 3 = -\frac{5}{8}, y = 2.$$

$$x - 2 * 2 + 2 * 3 = 3, x = 1.$$

Итак, получаем ответ: x=1, y=2, z=3.

Решение систем линейных уравнений матричным методом

- Метод обратной матрицы – это, по существу, частный случай матричного уравнения. Для применения данного способа необходимо уметь раскрывать определители, находить обратную матрицу и выполнять матричное умножение.

Матричный метод непригоден в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Рассмотрим систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Представим систему в матричном виде $A \times X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$

Если в уравнениях отсутствуют некоторые переменные, то на соответствующих местах в матрице нужно поставить нули.

Решение системы находится по формуле $X = A^{-1} \times B$.

- **Пример 4**

Решить систему матричным методом $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad X = A^{-1} \times B \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 25$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$ $\quad A_{31} = (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 11$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -16$

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 11 \\ 7 & -1 & -16 \end{pmatrix}$$

- $$X = \frac{1}{25} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 11 \\ 7 & -1 & -16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \times \begin{pmatrix} 4 \times 3 + 3 \times 3 + 2 \times 2 \\ 3 \times 3 - 4 \times 3 - 11 \times 2 \\ 7 \times 3 - 1 \times 3 + 16 \times 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \times \begin{pmatrix} 25 \\ -25 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^{25}/_{25} \\ {}^{-25}/_{25} \\ {}^{50}/_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = -1, x_3 = 2$

Домашнее задание

Изучить и записать конспект по теме.

Решить пример 2 тремя способами.