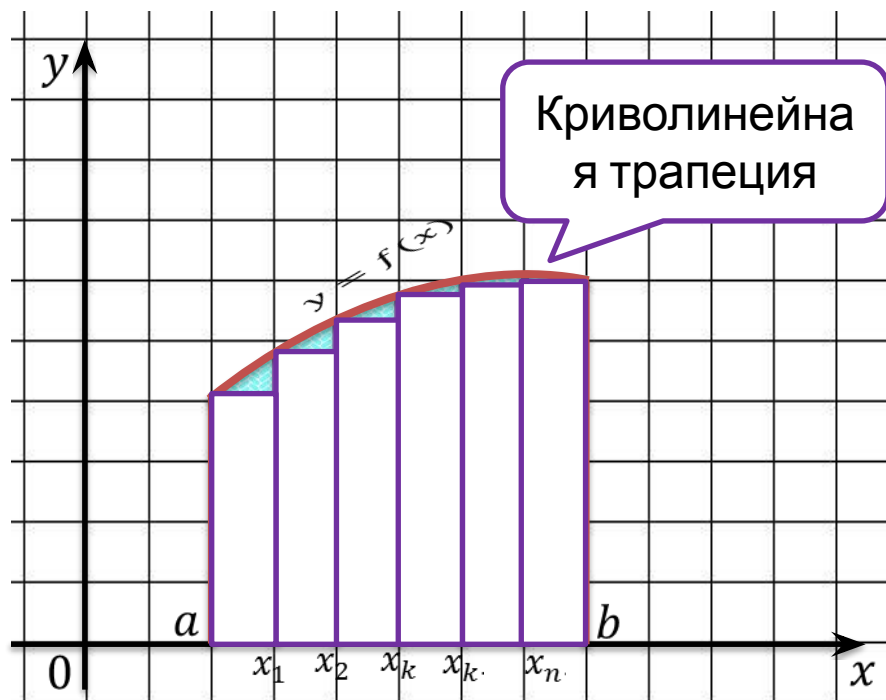


Определенный интеграл. Формула Ньютона - Лейбница



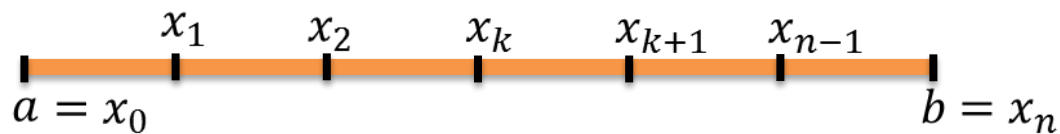
$$S_k = f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

Δx_k – длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$

$$S_n = f_0 \Delta x_0 + f_1 \Delta x_1 + f_2 \Delta x_2 + \dots + f_k \Delta x_k + \dots + f_{n-1} \Delta x_{n-1}$$

$$x_0 = a, x_n = b, \Delta x_0 = \Delta x_1 = \dots = \Delta x_n$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$



$$\rho = \rho(x)$$

$$\rho = \rho(x_k)$$

$$m_k \approx \rho(x_k)\Delta x_k$$

Δx_k – длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$

$$m \approx S_n = m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_k + \dots + m_{n-1} =$$

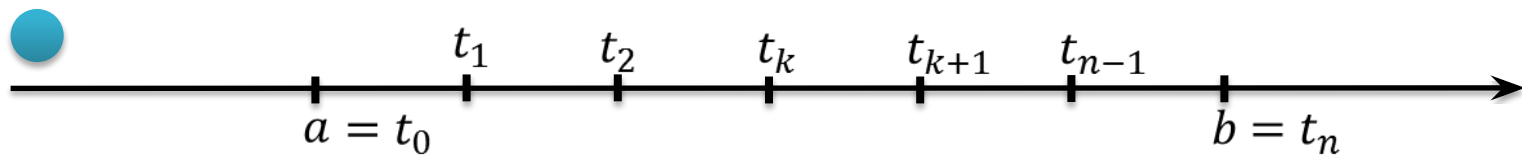
$$= \rho(x_0)\Delta x_0 + \rho(x_1)\Delta x_1 + \dots + \rho(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

$$m = V\rho$$

$$m = S\rho$$

$$m = l\rho$$

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$



$$v = v(t)$$

$$S = vt$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$v = v(t_k)$$

$$s_k \approx v(t_k) \Delta t_k$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Δt_k - длина отрезка $[t_k; t_{k+1}]$

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\begin{aligned} s &\approx S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_k + \dots + s_{n-1} = \\ &= v(t_0) \Delta t_0 + v(t_1) \Delta t_1 + \dots + v(t_{n-1}) \Delta t_{n-1} \end{aligned}$$

Математическая модель:

1. Разбиваем отрезок $[a; b]$ на n равных частей.
2. Составляем сумму S_n .
3. Находим $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

Определенный интеграл
от функции $y = f(x)$ по
отрезку $[a; b]$

Верхний предел
интегрирования

Нижний предел
интегрирования

$$S = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} (S)_n dx$$

Геометрический смысл
определенного интеграла

$$s = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} (s)_n dt$$

$$m = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} (m)_n dx$$

Физический смысл
определенного интеграла



$$\begin{aligned} s &= \int_a^b v(t) dt \\ v(t) = s'(t) \Rightarrow s(t) &\text{ — первообразная для } v(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow s &= s(b) - s(a) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} s &= \int_a^b v(t) dt \\ v(t) = s'(t) \Rightarrow s(t) &\text{ — первообразная для } v(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow s &= s(b) - s(a) \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a)$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Двойная
подстановка

$F(x)$ – первообразная для $f(x)$

Формула
Ньютона-
Лейбница

Пример:

Вычислить $\int_{-1}^3 x^3 dx$.

Решение:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4}$$

$$\int_{-1}^3 x^3 dx = F(x) \Big|_{-1}^3 = F(3) - F(-1) = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$$

Пример:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 8$.

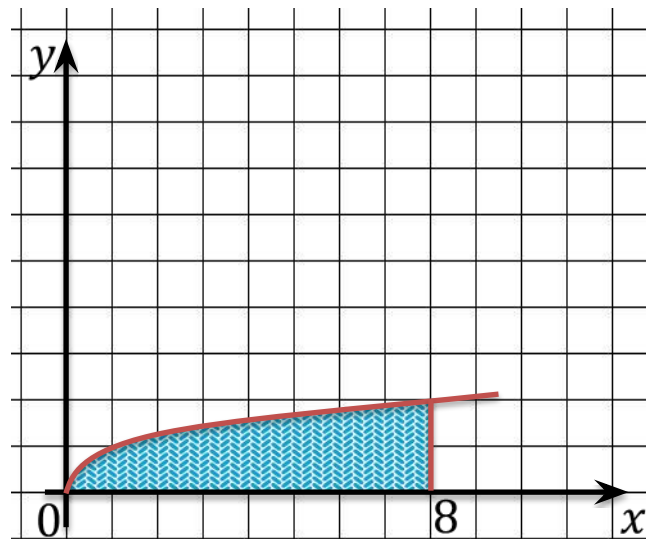
Решение:

$$S = \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \right)' = \sqrt[3]{x} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}$$

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = F(x) \Big|_0^8 = F(8) - F(0) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{8^4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{0^4} = 12$$



Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Доказательство.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ – первообразная для $f(x) + g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= (F(x) + G(x)) \Big|_a^b = \\ &= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Пример:

Вычислить $\int_1^2 \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx$.

Решение:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \qquad \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

$$(e^x)' = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow G(x) = \ln|x|$$

$$\int_1^2 \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^2 e^x dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = F(x) \Big|_1^2 + G(x) \Big|_1^2 = e^2 - e^1 + \ln 2 - \ln 1 =$$

$$= e^2 - e^1 + \ln 2$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Пример:

Вычислить $\int_1^2 \frac{2}{x} dx$.

Решение:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x|$$

$$\int_1^2 \frac{2}{x} dx = 2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 2 \cdot F(x) \Big|_1^2 = 2 \cdot (\ln 2 - \ln 1) = 2 \ln 2 = \ln 4$$