

Решение неравенств методом интервалов

Вы уже умеете решать:

✓ линейные неравенства

$$ax + b > 0 \quad (ax + b < 0)$$

✓ неравенства второй степени

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (ax^2 + bx + c < 0)$$

Сегодня вы научитесь решать неравенства вида:

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0 \quad (<, \geq, \leq)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — не равные друг другу числа

Решить неравенство $x^2 - 4x - 21 < 0$.

$$x^2 - 4x - 21 < 0$$

$$y = x^2 - 4x - 21$$

$$y = (x + 3)(x - 7)$$

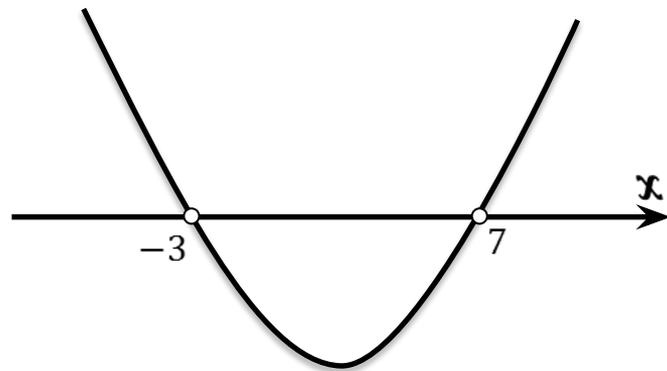
Нули функции:

$$(x + 3)(x - 7) = 0$$

$$x + 3 = 0 \quad x - 7 = 0$$

$$x = -3 \quad x = 7$$

Ответ: $(-3; 7)$.



$$f(x) = x_1(x - x_1)x_2(x - x_2) \dots x_n(x - x_n)$$

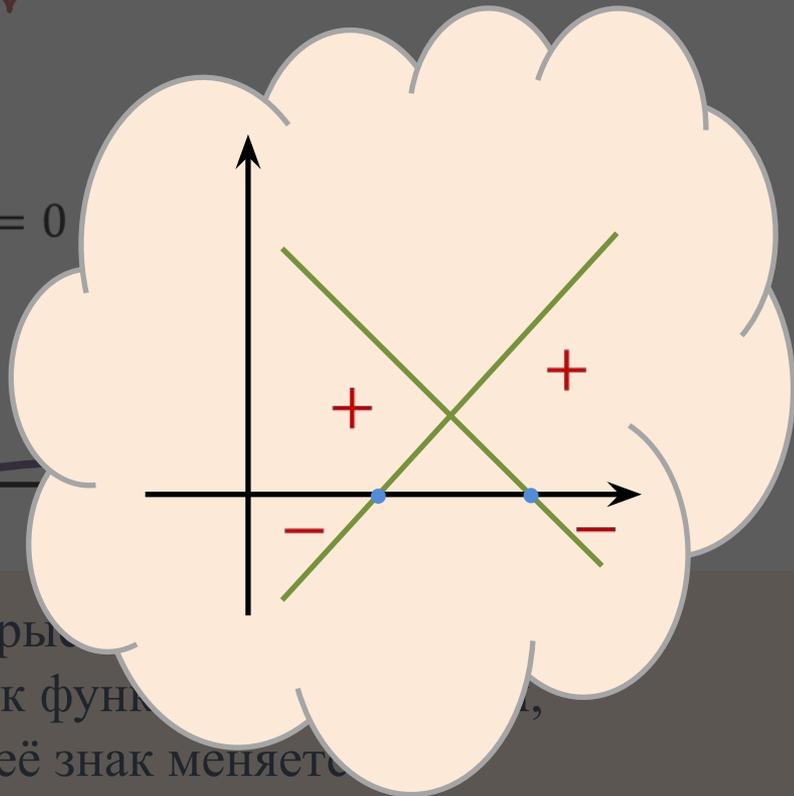
(<, ≥, ≤)

Нули функции:

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0$$

$$x - x_1 = 0 \quad x - x_2 = 0 \quad \dots \quad x - x_n = 0$$

$$x = x_1 \quad x = x_2 \quad \dots \quad x = x_n$$



В каждом из промежутков, на которые разбивается нулями функции, знак функции постоянен, а при переходе через нуль её знак меняется.

Решить неравенство $x(x - 3)(x + 4)(1 - x) > 0$.

$$x(x - 3)(x + 4)(1 - x) > 0$$

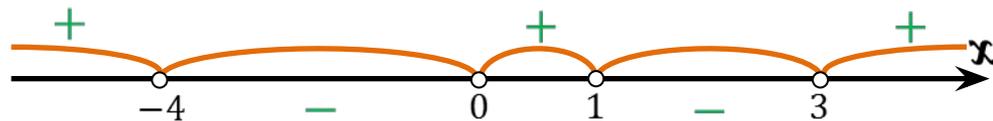
$$x(x - 3)(x + 4)(x - 1) < 0$$

Нули функции $f(x) = x(x - 3)(x + 4)(x - 1)$:

$$x(x - 3)(x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad x - 3 = 0 \quad x + 4 = 0 \quad x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad x = 3 \quad x = -4 \quad x = 1$$



Ответ: $(-4; 0) \cup (1; 3)$.

$(3; +\infty)$:

$$10(10 - 3)(10 + 4)(10 - 1) = 8820 > 0$$

$(1; 3)$:

$$2(2 - 3)(2 + 4)(2 - 1) = -12 < 0$$

$(0; 1)$:

$$0,5(0,5 - 3)(0,5 + 4)(0,5 - 1) = \\ = 2,8125 > 0$$

$(-4; 0)$:

$$-1(-1 - 3)(-1 + 4)(-1 - 1) = -24 < 0$$

$(-\infty; -4)$:

$$-5(-5 - 3)(-5 + 4)(-5 - 1) = 240 > 0$$

Решить неравенство $\left(x - \frac{1}{3}\right)(5x + 6)(x - 8) \geq 0$.

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)(5x + 6)(x - 8) \geq 0$$

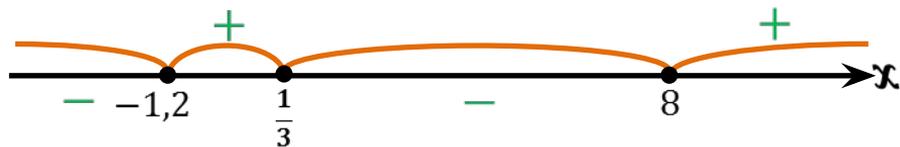
$$5\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1,2)(x - 8) \geq 0$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1,2)(x - 8) \geq 0$$

$$\left(100 - \frac{1}{3}\right)(100 + 1,2)(100 - 8) > 0$$

Нули функции $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1,2)(x - 8)$:

$$x = \frac{1}{3} \quad x = -1,2 \quad x = 8$$



Ответ: $\left[-1,2; \frac{1}{3}\right] \cup [8; +\infty)$.

Решить неравенство $\frac{11-x}{x+6} > 0$.

$$\frac{11-x}{x+6} > 0$$

$$x + 6 \neq 0$$

$$x \neq -6$$

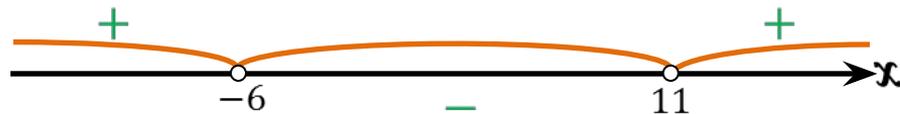
$$(11-x)(x+6) > 0$$

$$(x-11)(x+6) < 0$$

$$(100-11)(100+6) > 0$$

Нули функции $f(x) = (x-11)(x+6)$:

$$x = 11 \quad x = -6$$



Ответ: $(-6; 11)$.

Решить неравенство $\frac{15-x}{10x-3} \leq 0$.

$$\frac{15-x}{10x-3} \leq 0$$

$$(15-x)(10x-3) \leq 0$$

$$-10(x-15)(x-0,3) \leq 0$$

$$10x-3 \neq 0$$

$$x \neq 0,3$$

$$(100-15)(100-0,3) > 0$$

Нули функции $f(x) = (x-15)(x-0,3)$:

$$x = 15 \quad x = 0,3$$



Ответ: $(-\infty; 0,3) \cup [15; +\infty)$.

Решить неравенство $(x^2 - 4x + 4)(x - 1)(x + 5) > 0$.

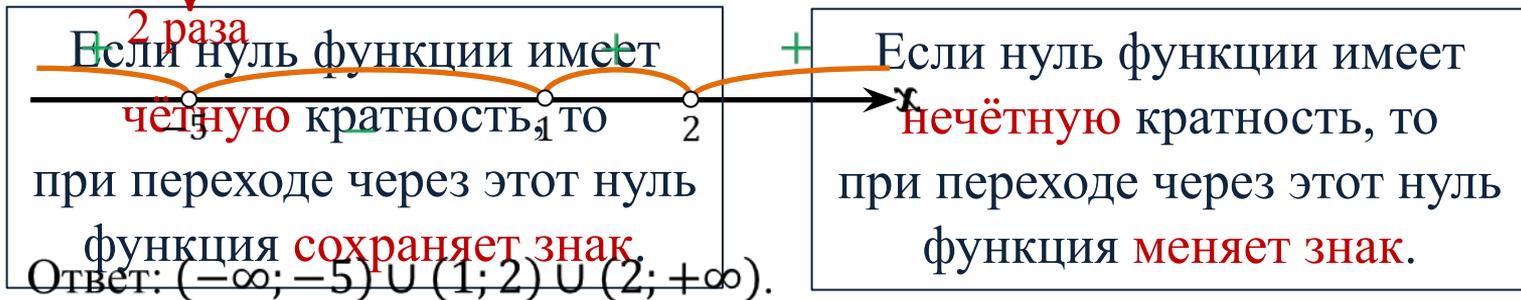
$$(x^2 - 4x + 4)(x - 1)(x + 5) > 0$$

$$(x - 2)^2(x - 1)(x + 5) > 0$$

$$(x - 2)(x - 2)(x - 1)(x + 5) > 0$$

Нули функции $f(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 1)(x + 5)$:

$$x = 2 \quad x = 2 \quad x = 1 \quad x = -5$$



Метод интервалов

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0$$

(<, ≥, ≤)

Если нуль функции имеет **чётную** кратность, то при переходе через этот нуль функция **сохраняет знак**.



Если нуль функции имеет **нечётную** кратность, то при переходе через этот нуль функция **меняет знак**.

