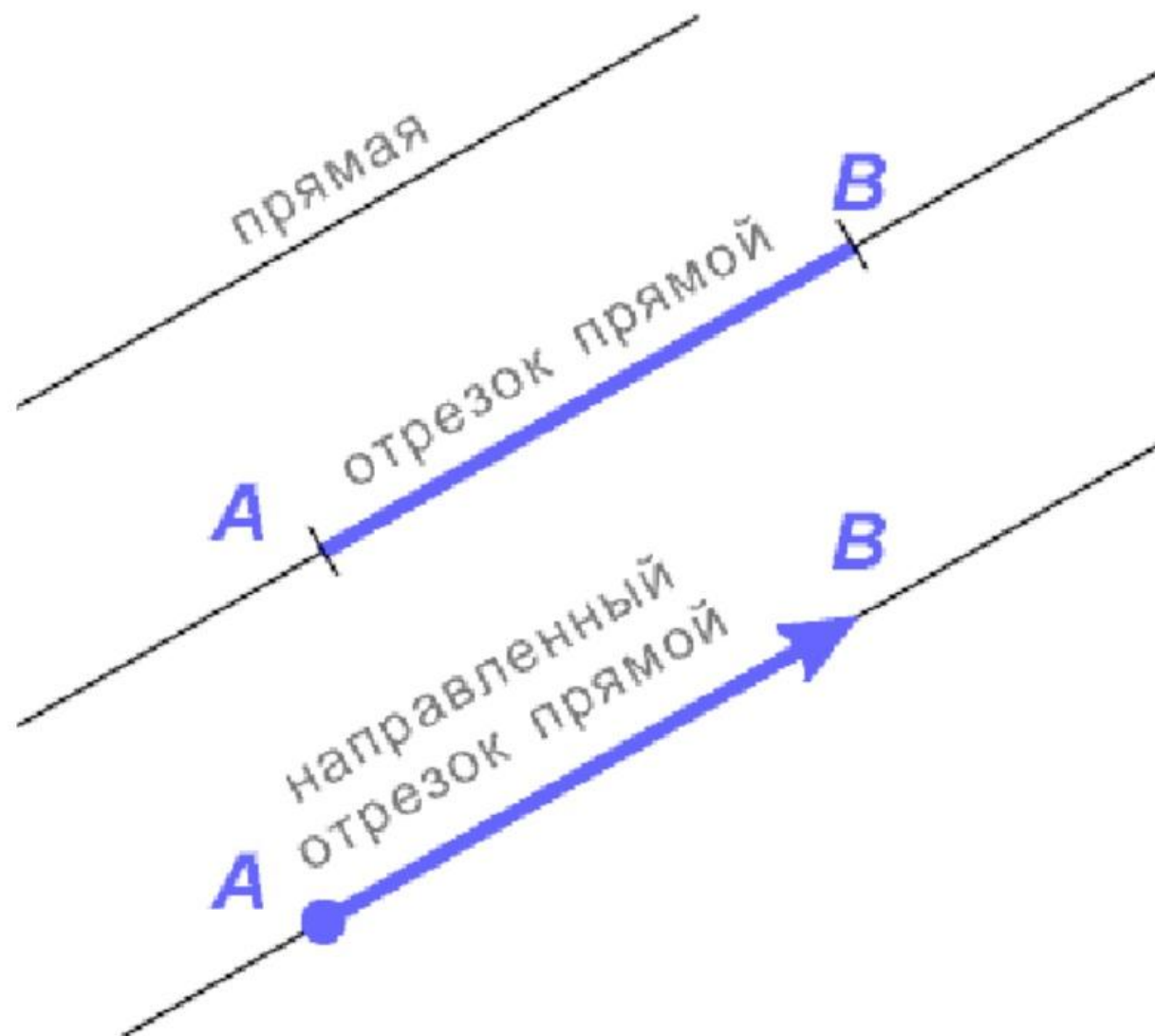


ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА



Взаимное расположение векторов. Векторы.

Коллинеарные



$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

Взаимное расположение векторов. Векторы.

Сонаправленные



$\vec{a} \parallel \vec{b}$

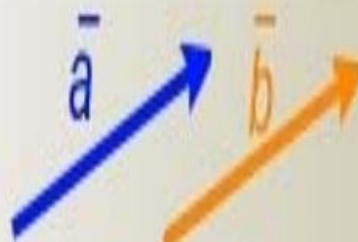
Взаимное расположение векторов. Векторы.

Противоположно
направленные



Взаимное расположение векторов. Векторы.

Равные



$$\bar{a} = \bar{b}$$

Взаимное расположение векторов. Векторы.

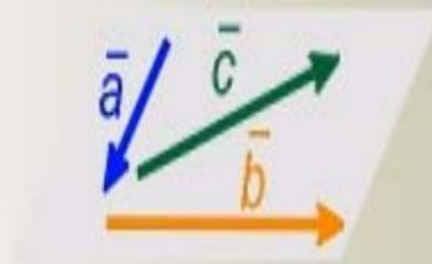
Противоположные



$$\vec{a} = -\vec{b}$$

Взаимное расположение векторов. Векторы.

Компланарные



Взаимное расположение векторов. Векторы.

Нулевой

$\bullet A$

$\bar{0}$

Взаимное расположение векторов. Векторы.

Орт
(единичный вектор)



$$\vec{a}_0 (|\vec{a}_0| = 1)$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

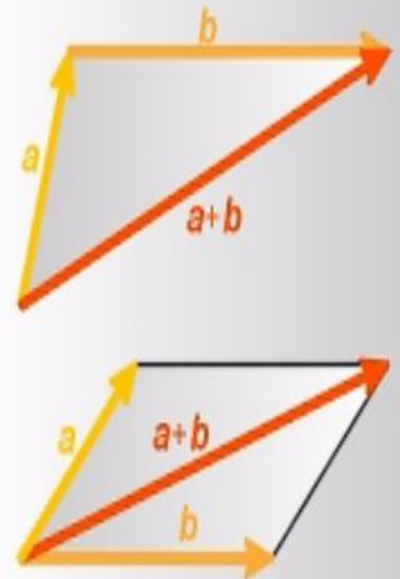
СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

а) Правило треугольника

Расположить векторы последовательно, соединив начало второго вектора с концом первого. Вектор суммы направлен от начала вектора a к концу вектора b .

б) Правило параллелограмма

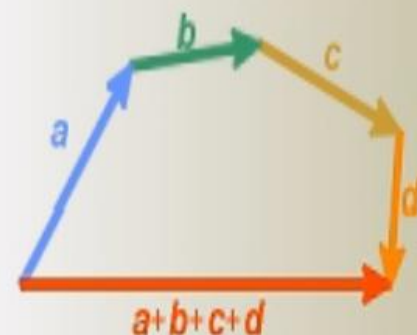
Отложить векторы от общего начала. Построить на векторах, как на сторонах параллелограмма. Вектор суммы направлен от общего начала по диагонали параллелограмма.



ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

СЛОЖЕНИЕ
БОЛЬШЕГО, ЧЕМ
ДВА, ЧИСЛА
ВЕКТОРОВ

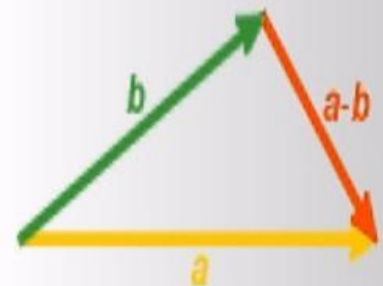
Расположить слагаемые векторы последовательно так, чтобы начало каждого следующего вектора совпадало с концом предыдущего. Вектор суммы направлен от начала первого вектора к концу последнего.



ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

РАЗНОСТЬ
ДВУХ
ВЕКТОРОВ

Привести векторы к общему началу. Вектор разности направлен от конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого.

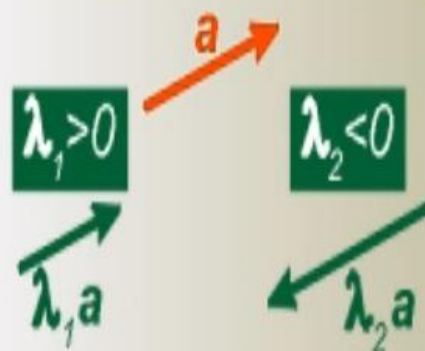


ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

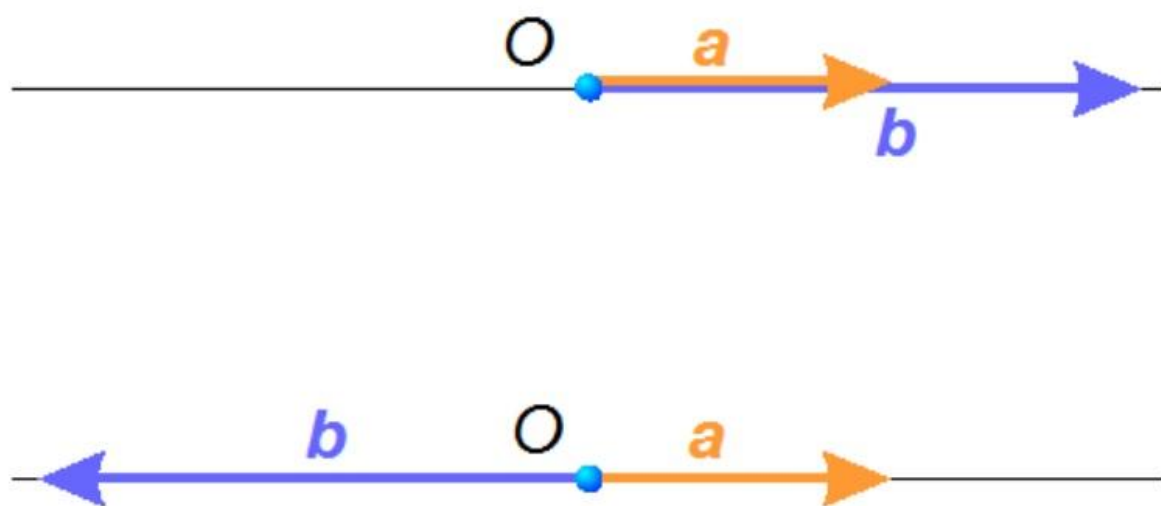
ПРОИЗВЕДЕНИЕ
ВЕКТОРА
НА ЧИСЛО

Вектор λa обладает свойствами:

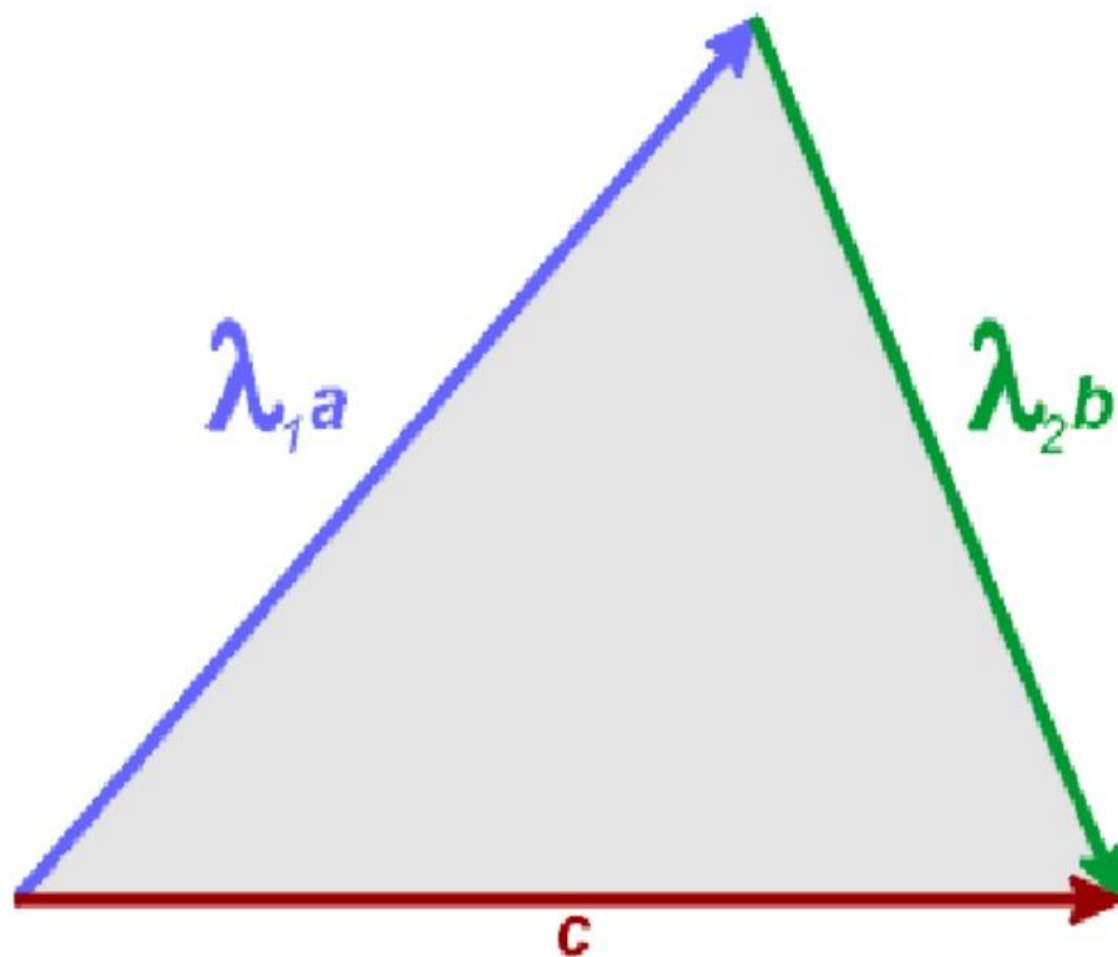
- а) $\lambda a \parallel a$;
- б) λa в $|\lambda|$ раз длиннее (короче) вектора a ;
- в) $\lambda a \uparrow\uparrow a$, если $\lambda > 0$,
 $\lambda a \uparrow\downarrow a$, если $\lambda < 0$.



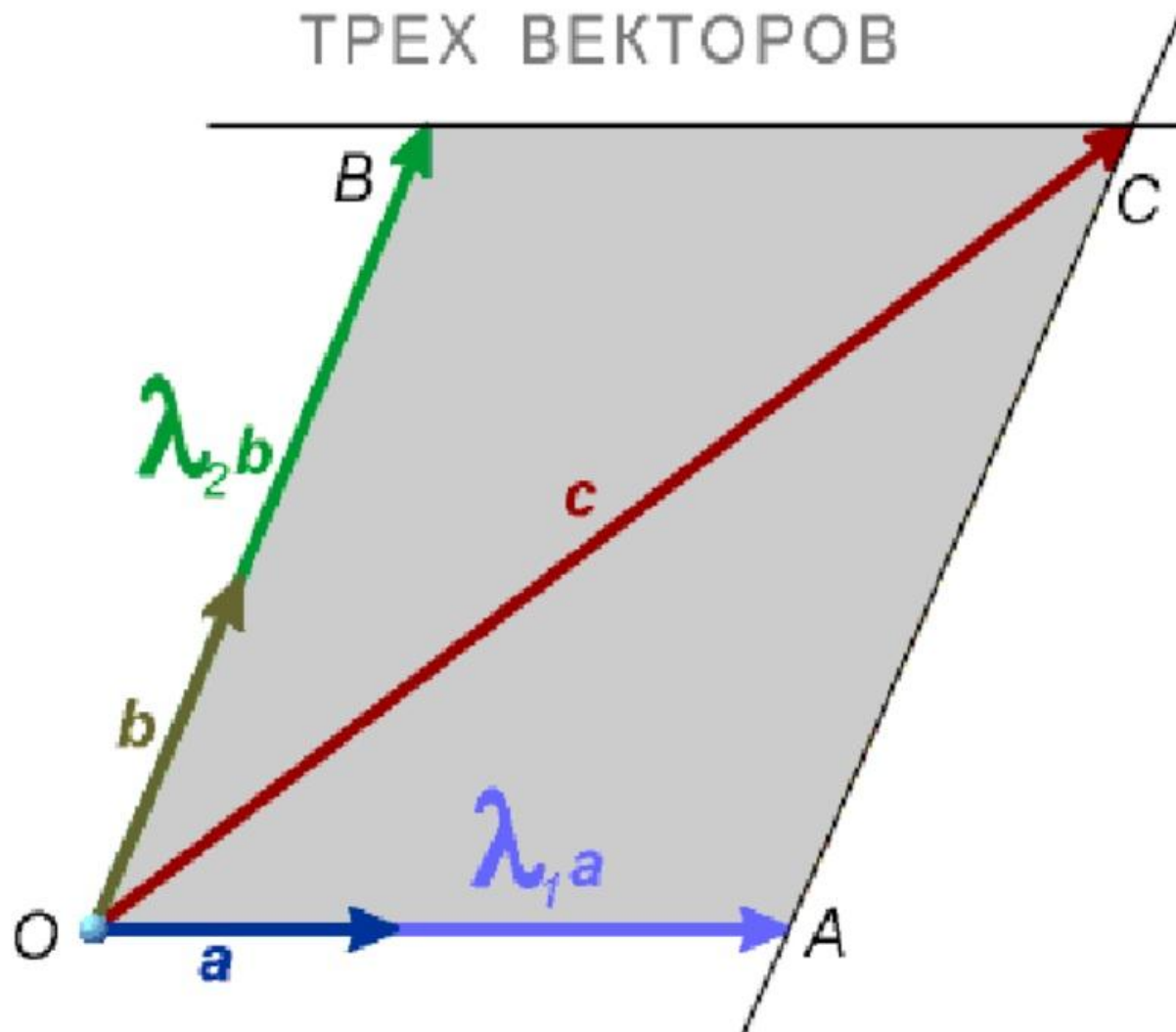
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ
ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ
ДВУХ ВЕКТОРОВ



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ
ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ
ТРЕХ ВЕКТОРОВ



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ
ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ
ТРЕХ ВЕКТОРОВ



Линейная зависимость векторов

ЛИНЕЙНАЯ
ЗАВИСИМОСТЬ
ДВУХ ВЕКТОРОВ

$$b = \lambda a$$

Коллинеарность
векторов a и b

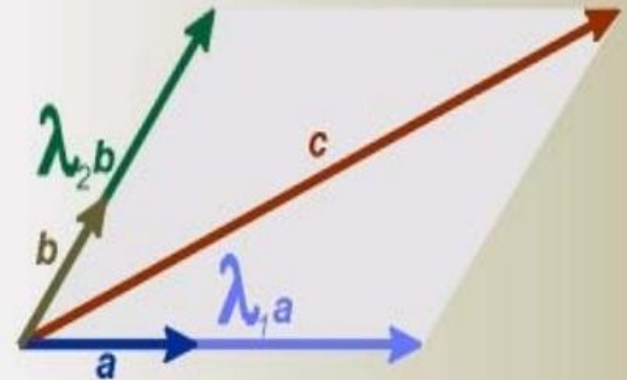


Линейная зависимость векторов

ЛИНЕЙНАЯ
ЗАВИСИМОСТЬ
ТРЕХ ВЕКТОРОВ

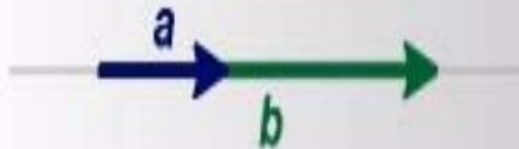
$$c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$$

Компланарность
векторов a, b, c



БАЗИС. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. КООРДИНАТЫ

НА ПРЯМОЙ

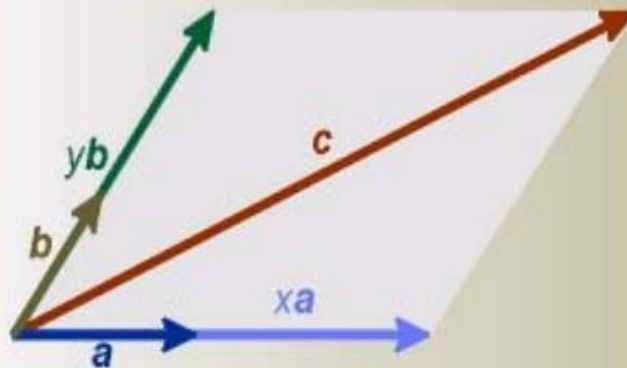
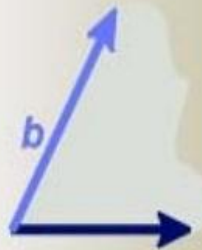


$$b = \lambda a$$

$$b = \{ \lambda \}$$

БАЗИС. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. КООРДИНАТЫ

НА ПЛОСКОСТИ

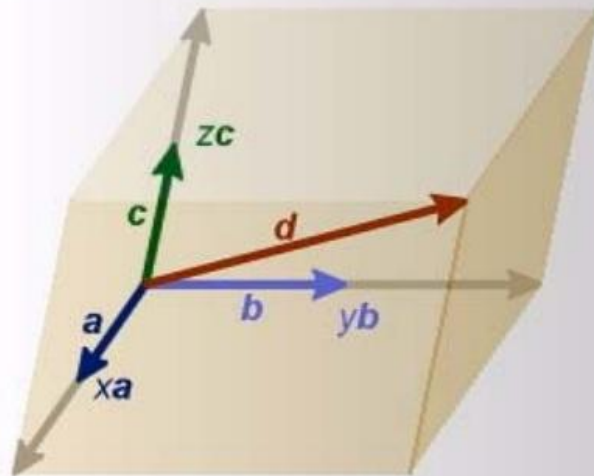
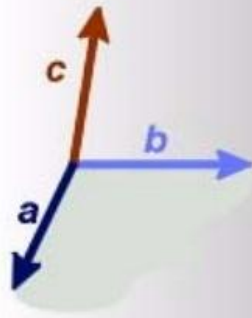


$$c = xa + yb$$

$$c = \{x; y\}$$

БАЗИС. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. КООРДИНАТЫ

В ПРОСТРАНСТВЕ

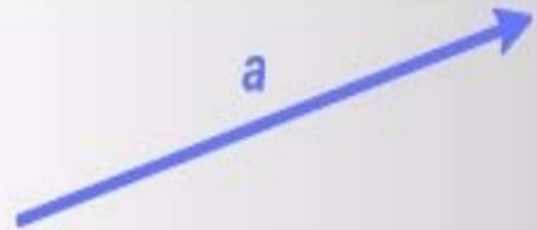


$$d = xa + yb + zc$$

$$D = \{x; y; z\}$$

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕКТОРА

ЗАДАНИЕ
НАПРАВЛЕННОГО
ОТРЕЗКА

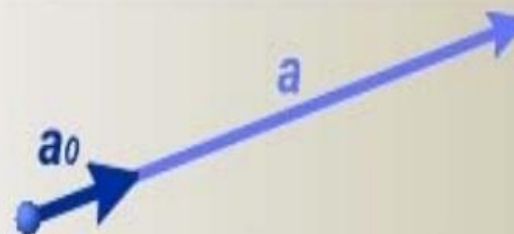


СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕКТОРА

ЗАДАНИЕ ОРТА
И МОДУЛЯ ВЕКТОРА

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{a}_0,$$

где $|\mathbf{a}_0| = 1$



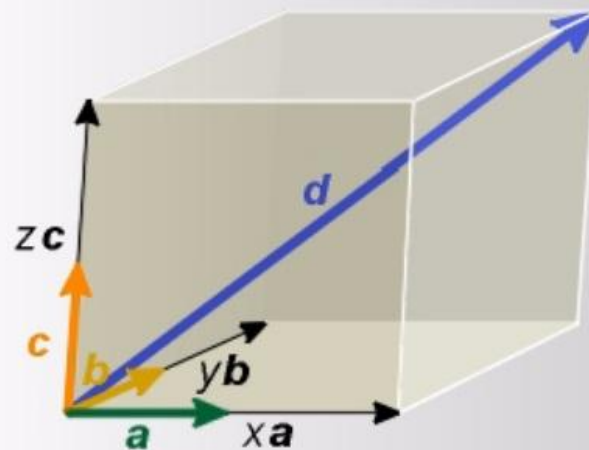
СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕКТОРА

ЗАДАНИЕ ВЕКТОРА
В ВИДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
ПО БАЗИСУ ИЛИ
В КООРДИНАТНОЙ
ФОРМЕ

$$\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

ИЛИ

$$\mathbf{d} = \{x; y; z\}$$



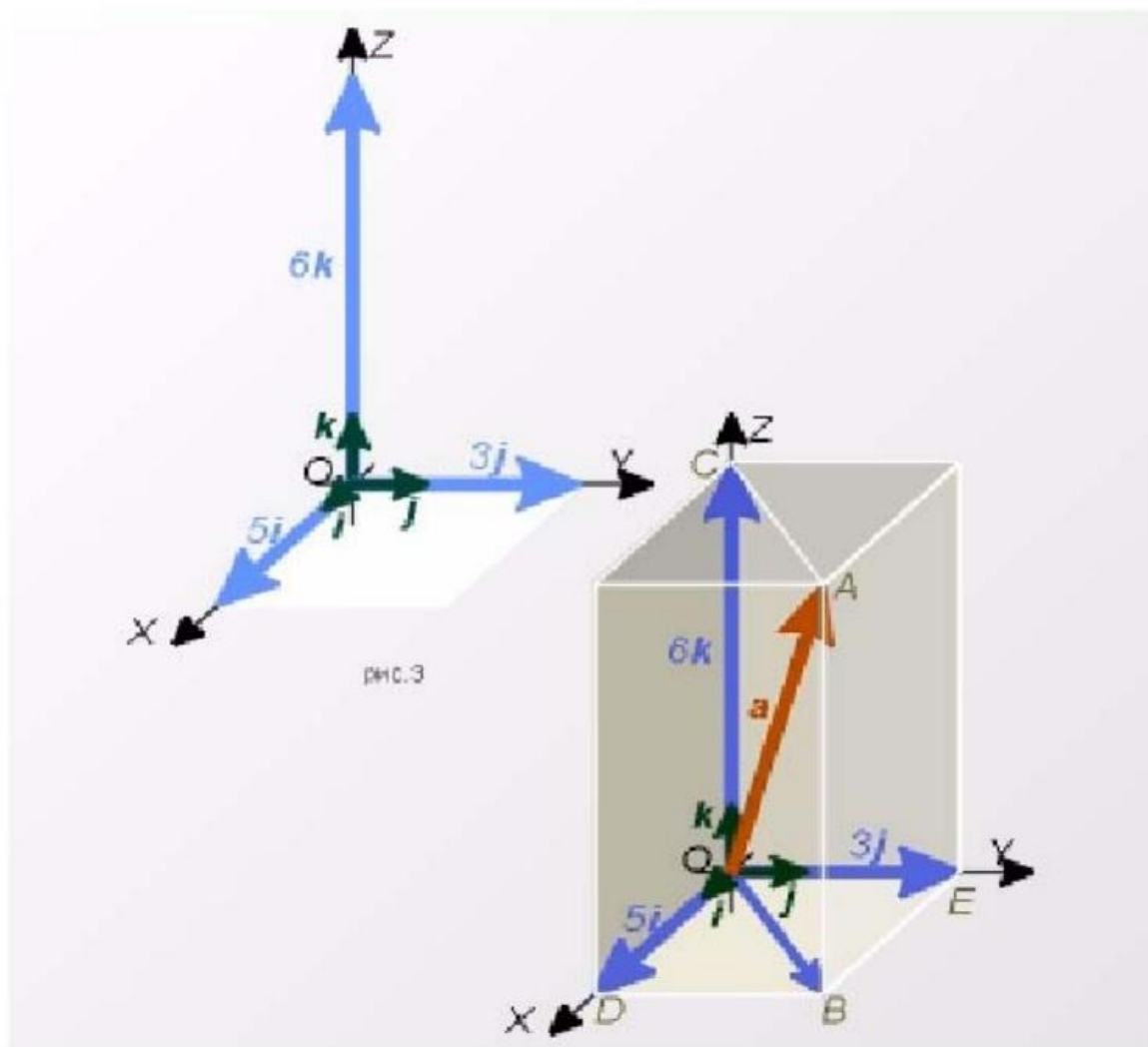
СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕКТОРА

ЗАДАНИЕ ВЕКТОРА
ПАРОЙ ТОЧЕК:
 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - начало,
 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - конец

$$\vec{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$



Декартова система координат



Векторы. Действия над векторами

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

Длина $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Направляющие косинусы: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$

Скалярное произведение: $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) - \text{число}$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \\ \bar{b} &= b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k} \end{aligned} \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторы. Действия над векторами

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) Направление вектора \vec{c} таково, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку

Векторы. Действия над векторами

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$$

Векторы. Действия над векторами

$$\text{пр}_a \bar{b} = \frac{(a, b)}{|\bar{a}|}$$

Векторы. Действия над векторами

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$$

Векторы. Действия над векторами

$$\begin{aligned} & (\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = \\ & = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}) \end{aligned}$$

Векторы. Действия над векторами

$$(\lambda \bar{a}, b) = \lambda (\bar{a}, \bar{b})$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

Векторы. Действия над векторами

$$(\bar{a}, \bar{b}) =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Величины и условия	Векторная форма	Координатная форма
ДЛИНА ВЕКТОРА	$ \vec{a} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$	$ \vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Величины и условия	Векторная форма	Координатная форма
КОСИНУС УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ	$\cos \varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{ \bar{a} \bar{b} }$	$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Величины и условия	Векторная форма	Координатная форма
ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА \vec{a} НА ОСЬ, ИМЕЮЩУЮ НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА \vec{b}	$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{ \vec{b} }$	$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Величины и условия	Векторная форма	Координатная форма
УСЛОВИЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ВЕКТОРОВ	$(\vec{a}, \vec{b}) = 0$	$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Величины и условия	Векторная форма	Координатная форма
РАБОТА ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ \vec{F} НА ПЕРЕМЕЩЕНИИ \vec{S}	$A = (\vec{F}, \vec{S})$	$A = \vec{F}_1 \vec{S}_1 + \vec{F}_2 \vec{S}_2 + \vec{F}_3 \vec{S}_3$

Векторы. Действия над векторами

Векторным произведением вектора \bar{a} на вектор \bar{b} называется вектор \bar{c} , удовлетворяющий условиям:

$$1) |\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}});$$

$$2) \bar{c} \perp \bar{a}; \quad \bar{c} \perp \bar{b};$$

3) Направление вектора \bar{c} таково, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку

Векторы. Действия над векторами

Векторное произведение векторов

$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \varphi = S$ параллелограмма, построенного на векторах \vec{a}, \vec{b} как на сторонах

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix};$$

$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = V$ параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах

Свойства векторного произведения

$$(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})$$

Свойства векторного произведения

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c})$$

Свойства векторного произведения

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}),$$

$$(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{b}, \bar{a})$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Величины и условия	Векторная форма	Координатная форма
Площадь параллелграмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b}	$S = \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} $	$S = \text{mod} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Величины и условия	Векторная форма	Координатная форма
Площадь треугольника, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b}	$S = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} $	$S = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Величины и условия	Векторная форма	Координатная форма
<p>Высоты параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} (Расстояние от точки до прямой)</p>	$h_1 = \frac{ \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} }{ \mathbf{a} }$ $h_2 = \frac{ \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} }{ \bar{\mathbf{b}} }$	$h_1 = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$ <p>(h_2 - аналогично)</p>

Векторы. Действия над векторами

Условия коллинеарности, перпендикулярности и компланарности векторов:

$$1) \quad \bar{a} \parallel \bar{b} \leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};$$

$$2) \quad \bar{a} \perp \bar{b} \leftrightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Rightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0;$$

$$3) \quad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ компланарны, если } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$