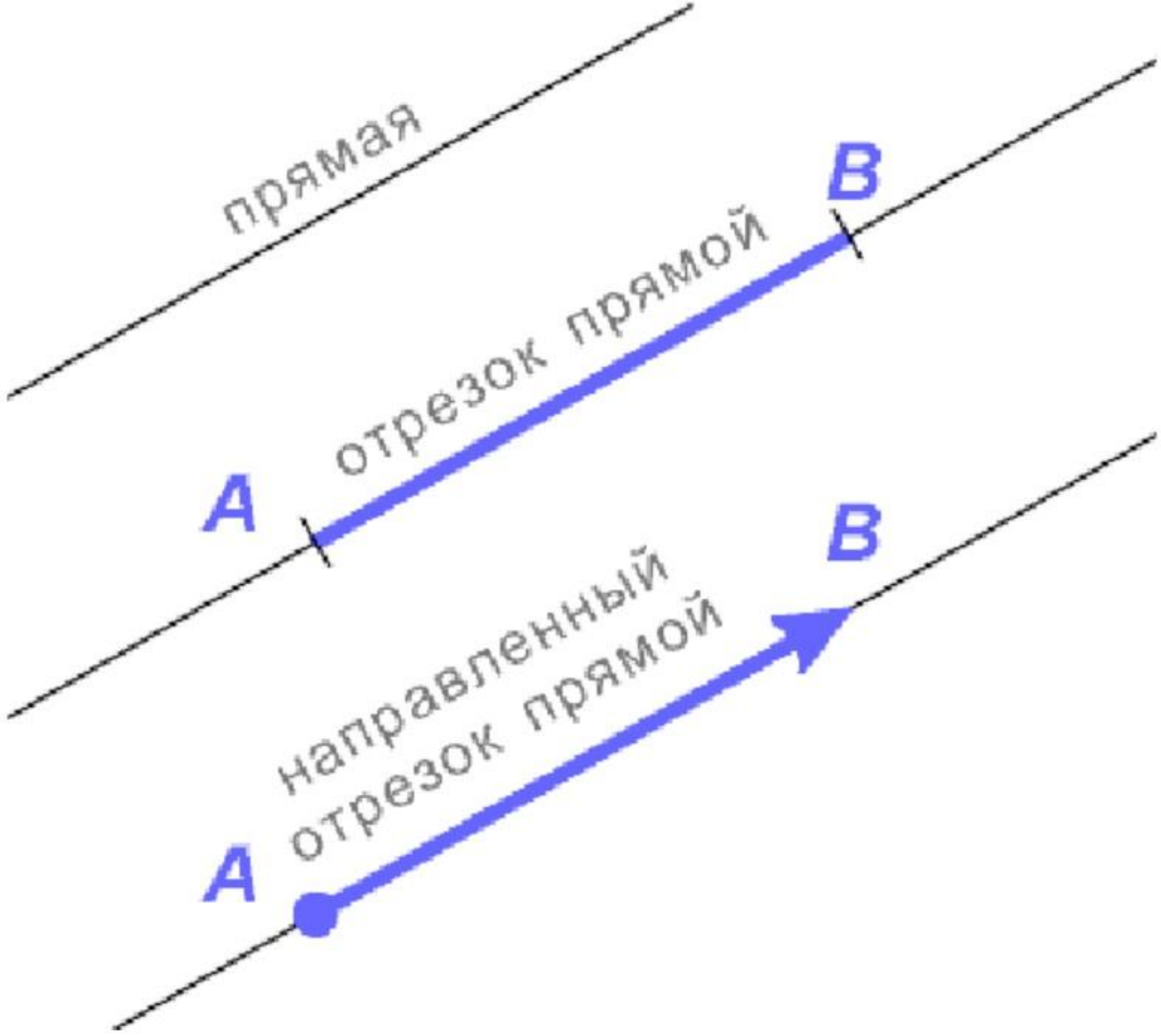
# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА



# Взаимное расположение векторов. Векторы.

| | | |
|---|---|---|
| Коллинеарные |   | $\bar{a} \parallel \bar{b}$ |

# Взаимное расположение векторов. Векторы.

| | | |
|---|---|---|
| Сонаправленные |  | $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ |

# Взаимное расположение векторов. Векторы.

| | | |
|---|---|---|
| Противоположно направленные |  | $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ |

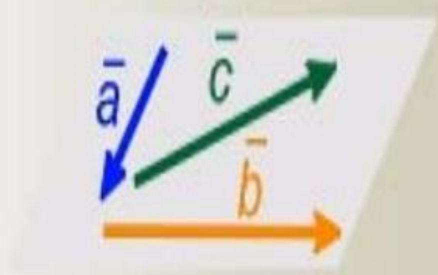
# Взаимное расположение векторов. Векторы.

# Взаимное расположение векторов. Векторы.

| | | |
|---|---|---|
| Противоположные |  | $\bar{a} = -\bar{b}$ |

# Взаимное расположение векторов. Векторы.

Компланарные



# Взаимное расположение векторов. Векторы.

| | | |
|---|---|---|
| Нулевой | $\bullet A$ | $\bar{0}$ |

# Взаимное расположение векторов. Векторы.

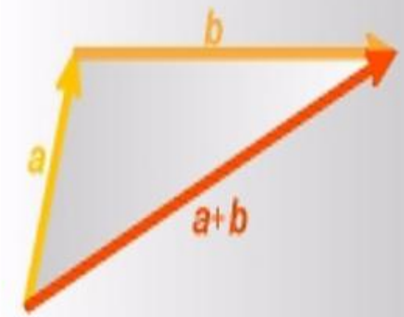
| | | |
|---|---|---|
| Орт (единичный вектор) |   | $\bar{a}_0 (\vert\bar{a}_0\vert = 1)$ |

# ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

**СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ**

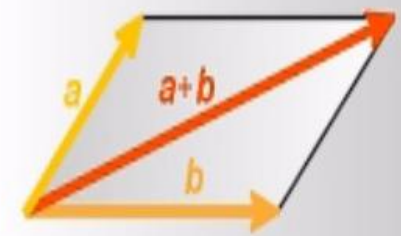
**а) Правило треугольника**

Расположить векторы последовательно, соединив начало второго вектора с концом первого. Вектор суммы направлен от начала вектора ***a*** к концу вектора ***b***.

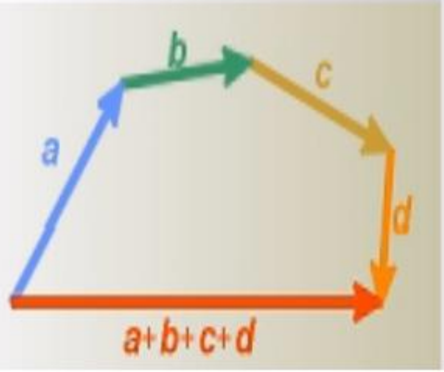



**б) Правило параллелограмма**

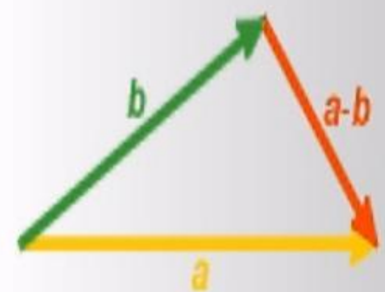
Отложить векторы от общего начала. Построить на векторах, как на сторонах параллелограмм. Вектор суммы направлен от общего начала по диагонали параллелограмма.



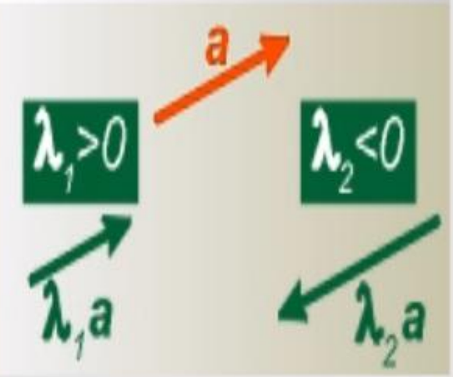
# ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

| СЛОЖЕНИЕ БОЛЬШЕГО, ЧЕМ ДВА, ЧИСЛА ВЕКТОРОВ | Расположить слагаемые векторы последовательно так, чтобы начало каждого следующего вектора совпадало с концом предыдущего. Вектор суммы направлен от начала первого вектора к концу последнего. |  |
|---|---|---|

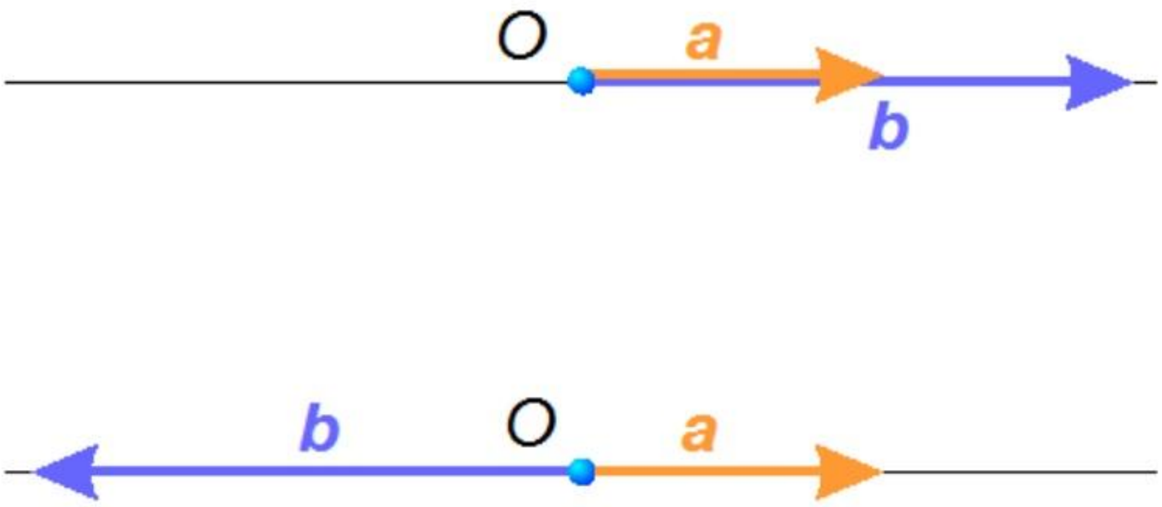
# ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

| | | |
|---|---|---|
| РАЗНОСТЬ ДВУХ ВЕКТОРОВ | Привести векторы к общему началу. Вектор разности направлен от конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого. |  |

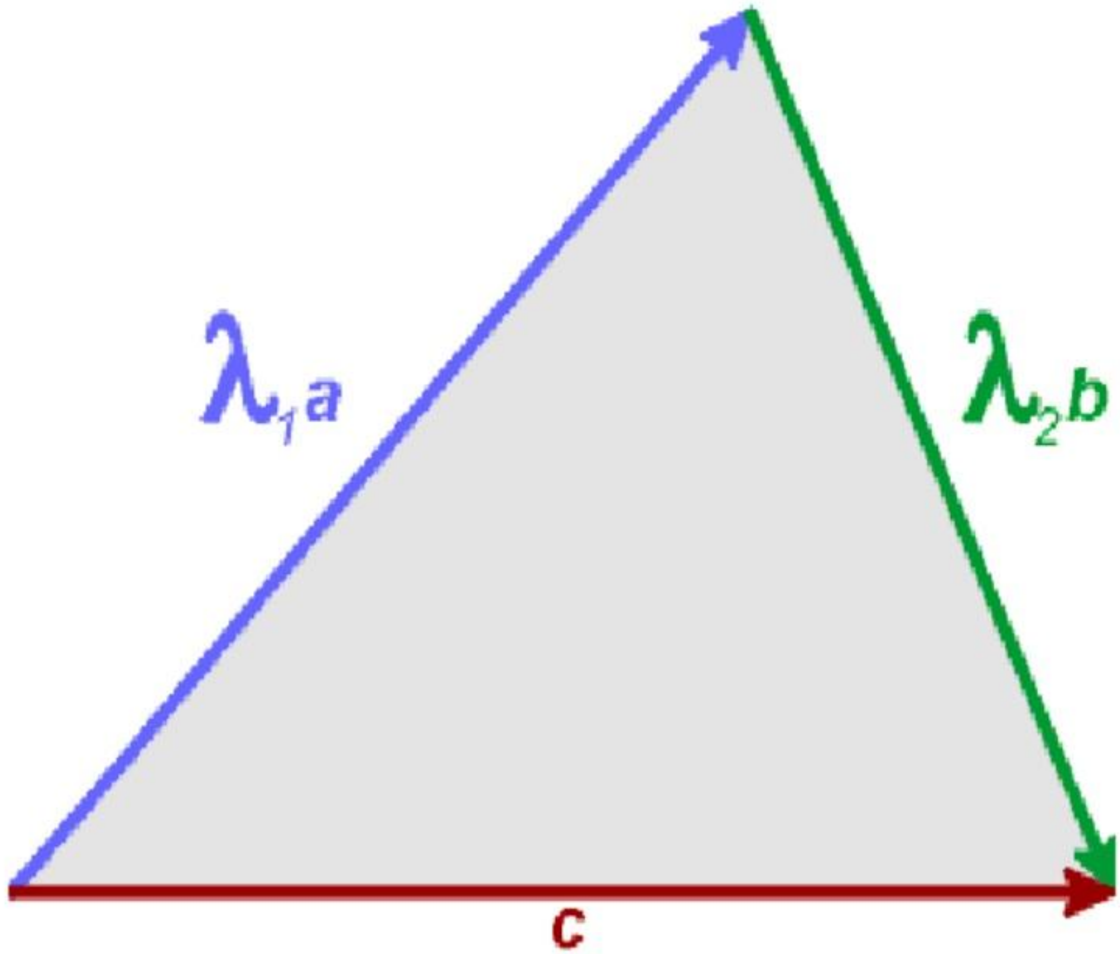
# ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

| | | |
|---|---|---|
| ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО | Вектор $\lambda\mathbf{a}$ обладает свойствами:<br>а) $\lambda\mathbf{a} \parallel \mathbf{a}$;<br>б) $\lambda\mathbf{a}$ в $\lvert\lambda\rvert$ раз длиннее (короче) вектора $\mathbf{a}$;<br>в) $\lambda\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, если $\lambda > 0$,<br>$\lambda\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, если $\lambda < 0$. |  |

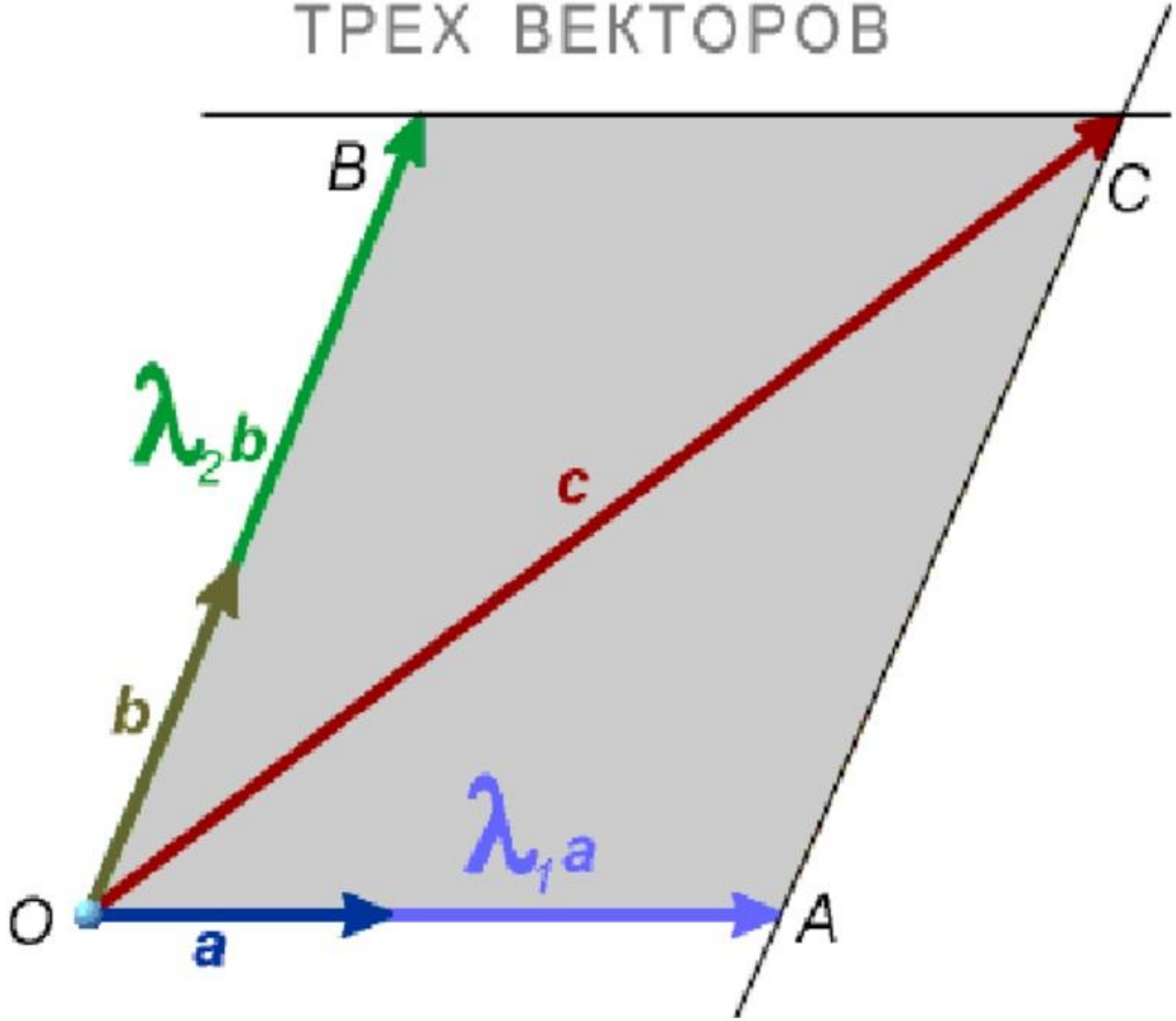
# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДВУХ ВЕКТОРОВ



# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТРЕХ ВЕКТОРОВ



# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТРЕХ ВЕКТОРОВ

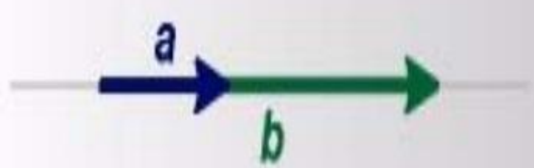


# Линейная зависимость векторов

| | | | |
|---|---|---|---|
| ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДВУХ ВЕКТОРОВ | $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{a}$ | Коллинеарность векторов ***a*** и ***b*** |  |

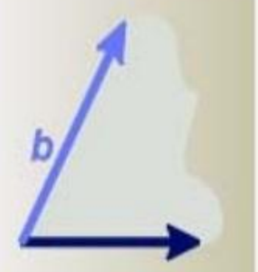
# Линейная зависимость векторов

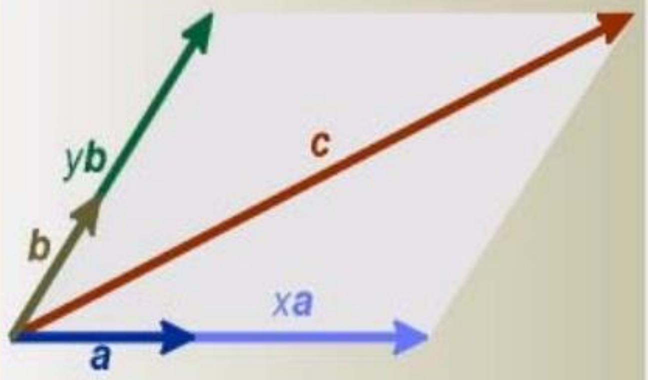
# БАЗИС. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. КООРДИНАТЫ

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| НА ПРЯМОЙ |  |  | $\mathbf{b}=x\mathbf{a}$ | $\mathbf{b}=\{x\}$ |

# БАЗИС. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. КООРДИНАТЫ

НА ПЛОСКОСТИ



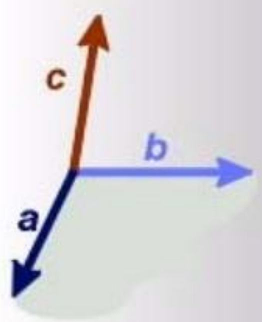



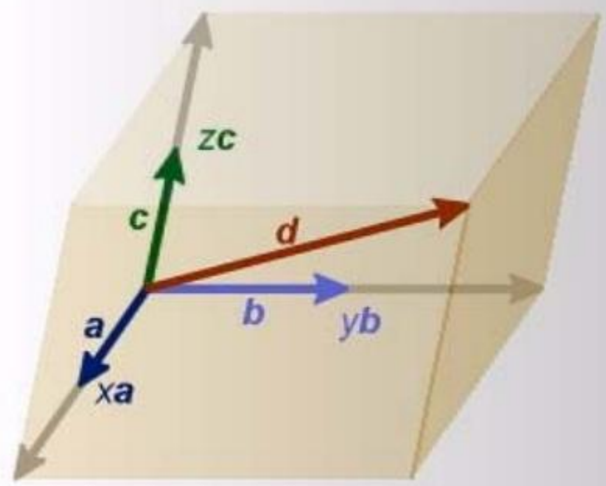

$\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$

$\mathbf{c} = \{x; y\}$

# БАЗИС. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. КООРДИНАТЫ

В ПРОСТРАНСТВЕ

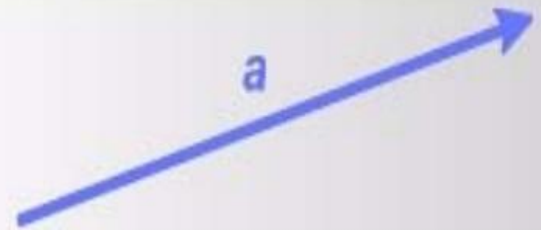


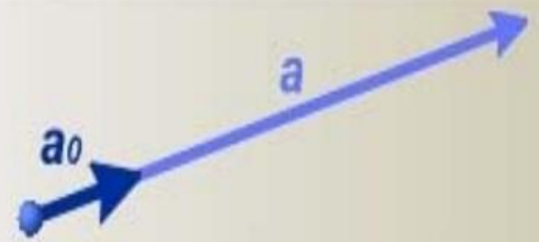

$\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$

$\mathbf{D} = \{x; y; z\}$

# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕКТОРА

| | | |
|---|---|---|
| ЗАДАНИЕ НАПРАВЛЕННОГО ОТРЕЗКА | |  |

# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕКТОРА

| | | |
|---|---|---|
| ЗАДАНИЕ ОРТА И МОДУЛЯ ВЕКТОРА | $\mathbf{a}=\lvert\mathbf{a}\rvert\mathbf{a}_0$, где $\lvert\mathbf{a}_0\rvert=1$ |  |

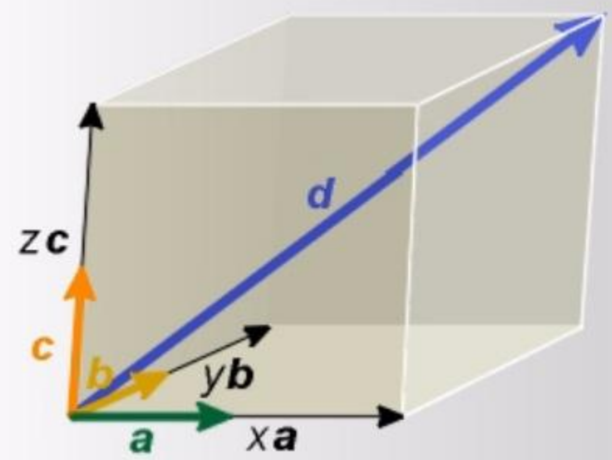
# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕКТОРА

ЗАДАНИЕ ВЕКТОРА
В ВИДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
ПО БАЗИСУ ИЛИ
В КООРДИНАТНОЙ
ФОРМЕ

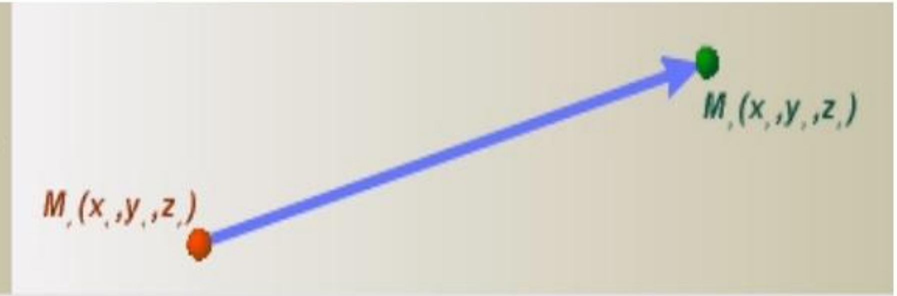
$\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$

или

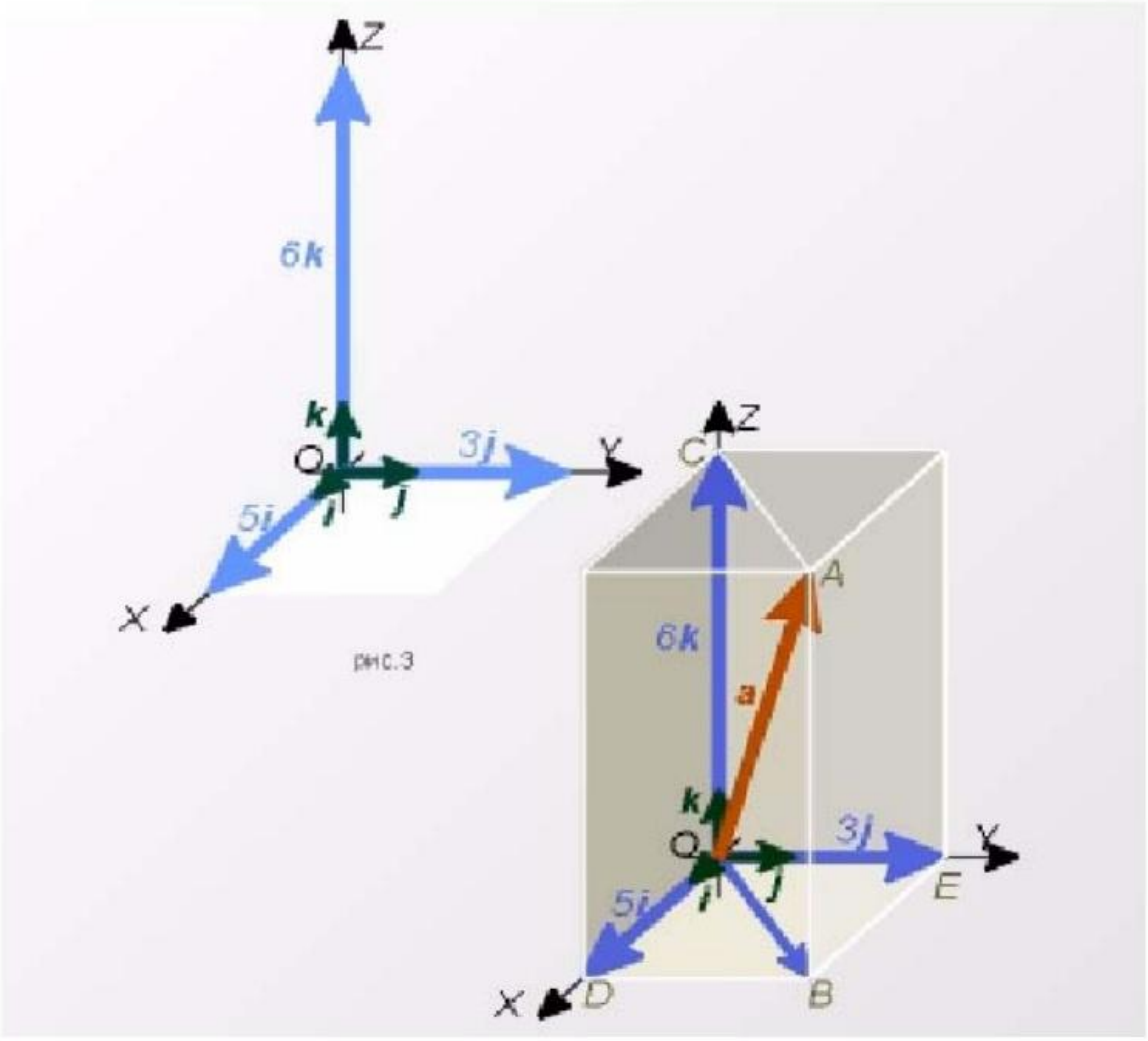
$\mathbf{d} = \{x;\ y;\ x\}$



# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕКТОРА

| | | |
|---|---|---|
| ЗАДАНИЕ ВЕКТОРА ПАРОЙ ТОЧЕК: $M_1(x_1,y_1,z_1)$ - начало, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ - конец | $M_1M_2=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$ |  |

# Декартова система координат



# Векторы. Действия над векторами

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$$

Длина $\quad |\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Направляющие косинусы: $\quad \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\overline{a}|}; \quad \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\overline{a}|}; \quad \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\overline{a}|}$

Скалярное произведение: $\quad (\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a} \,\widehat{,}\, \overline{b})$ – число

$$\left.\begin{array}{l} \overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k} \\ \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k} \end{array}\right. \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$\cos(\overline{a} \,\widehat{,}\, \overline{b}) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

# Векторы. Действия над векторами

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin(\overline{a} \,\widehat{,}\, \overline{b});$

2) $\overline{c} \perp \overline{a}; \quad \overline{c} \perp \overline{b};$

3) Направление вектора $\overline{c}$ таково, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку

# Векторы. Действия над векторами

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$$

# Векторы. Действия над векторами

$$np_a\bar{b} = \frac{(a,b)}{|\bar{a}|}$$

# Векторы. Действия над векторами

$$(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$$

## Векторы. Действия над векторами

$$(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=$$

$$=(\overline{a},\overline{c})+(\overline{b},\overline{c})$$

# Векторы. Действия над векторами

$$(\lambda\overline{a}, b) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$$

$$\lambda \in IR$$

# Векторы. Действия над векторами

$$(\overline{a},\overline{b}) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

# ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

| Величины и условия | Векторная форма | Координатная форма |
|---|---|---|
| ДЛИНА ВЕКТОРА | $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$ | $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ |

# ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

| Величины и условия | Векторная форма | Координатная форма |
|---|---|---|
| КОСИНУС УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ | $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{\lvert\bar{a}\rvert\lvert\bar{b}\rvert}$ | $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ |

# ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

| Величины и условия | Векторная форма | Координатная форма |
|---|---|---|
| ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА $\bar{a}$ НА ОСЬ, ИМЕЮЩУЮ НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА $\bar{b}$ | $\text{пр}_b \bar{a} = \dfrac{(\bar{a}, \bar{b})}{\lvert\bar{b}\rvert}$ | $\text{пр}_b \bar{a} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ |

# ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

| Величины и условия | Векторная форма | Координатная форма |
| --- | --- | --- |
| УСЛОВИЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ВЕКТОРОВ | $(\bar{a},\bar{b})=0$ | $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ |

# ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

| Величины и условия | Векторная форма | Координатная форма |
|---|---|---|
| РАБОТА ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ $\bar{F}$ НА ПЕРЕМЕЩЕНИИ $\bar{S}$ | $A=(\bar{F},\bar{S})$ | $A=\bar{F}_1\bar{S}_1+\bar{F}_2\bar{S}_2+\bar{F}_3\bar{S}_3$ |

# Векторы. Действия над векторами

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin(\overline{a} \hat{,} \overline{b});$

2) $\overline{c} \perp \overline{a}; \quad \overline{c} \perp \overline{b};$

3) Направление вектора $\overline{c}$ таково, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку

# Векторы. Действия над векторами

**Векторное произведение векторов**

$\left|\overline{c}\right| = \left|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi = S$ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b}$ как на сторонах

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

**Смешанное произведение векторов** $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$

$$\left(\left[\overline{a},\overline{b}\right],\overline{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix};$$

$\left(\left[\overline{a},\overline{b}\right],\overline{c}\right) = V$ параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах

# Свойства векторного произведения

$$(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})$$

# Свойства векторного произведения

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c})$$

# Свойства векторного произведения

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{c},\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{c},\bar{a}),$$

$$(\bar{a},\bar{c},\bar{b})=(\bar{b},\bar{a},\bar{c})=(\bar{c},\bar{b},\bar{a})$$

# ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

| Величины и условия | Векторная форма | Координатная форма |
|---|---|---|
| Площадь параллелграмма, построенного на векторах ***a*** и ***b*** | $S = \lvert \bar{a} \times \bar{b} \rvert$ | $S = mod \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ |

# ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

| Величины и условия | Векторная форма | Координатная форма |
|---|---|---|
| Площадь треугольника, построенного на векторах ***a*** и ***b*** | $S=\frac{1}{2}\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$ | $S=\frac{1}{2}\,mod\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$ |

# ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

| Величины и условия | Векторная форма | Координатная форма |
| --- | --- | --- |
| Высоты параллелограмма, построенного на векторах ***a*** и ***b*** (Расстояние от точки до прямой) | $h_1 = \dfrac{\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert}{\lvert\bar{a}\rvert}$ <br> $h_2 = \dfrac{\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert}{\lvert\bar{b}\rvert}$ | $h_1 = \dfrac{mod\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$ <br> ($h_2$ - аналогично) |

# Векторы. Действия над векторами

Условия коллинеарности, перпендикулярности и компланарности векторов:

$$1)\quad \overline{a} \,||\, \overline{b} \leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};$$

$$2)\quad \overline{a} \perp \overline{b} \quad \leftrightarrow \quad (\overline{a}, \overline{b}) = 0 \Rightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0;$$

$$3)\quad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ компланарны, если } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$