*ГИДРОСТАТИКА

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ. ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ ЖИДКОСТИ

Основные понятия и теоретические положения

Примерами криволинейных поверхностей, испытывающих давление покоящейся жидкости, являются сферические и цилиндрические стенки резервуаров, секторные, сферические и цилиндрические затворы, клапаны насосов, поверхности трубопроводов и т. п.

В практике инженерных расчётов ставятся задачи определения силы давления на криволинейные поверхности, необходимые усилия для открытия клапанов и затворов или удержания их в закрытом положении.

Сложность определения силы давления на криволинейные поверхности заключается в том, что каждое элементарное усилие, действующее на криволинейную поверхность, направлено по нормали к элементарной площадке и имеет угол наклона по отношению к другому элементарному усилию.

Это значит, что при определении силы давления жидкости придётся интегрировать зависимость элементарной силы dF по площади криволинейной поверхности. Для инженерных расчётов это затруднительно.

В связи с этим принят ***метод***, согласно которому равнодействующая давления на криволинейную поверхность определяется как геометрическая сумма составляющих по двум или трём выбранным направлениям:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z .$$

Чаще всего криволинейные поверхности, используемые в технике, имеют ось симметрии или ось вращения. Для таких поверхностей при определении силы давления жидкости достаточно двух составляющих горизонтальной и вертикальной:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Горизонтальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность равна силе давления жидкости на плоскую вертикальную проекцию криволинейной поверхности:

$$F_x = (\rho g y_c) S_y$$

где ρ - плотность жидкости; S_y - площадь вертикальной проекции криволинейной поверхности; y_c - координата центра тяжести вертикальной проекции, отсчитанная от свободной поверхности.

Глубина погружения центра тяжести вертикальной проекции h_c совпадает с координатой центра тяжести y_c, поэтому в дальнейшему можно называть глубиной погружения центра тяжести или напором на уровне центра тяжести вертикальной проекции криволинейной поверхности.

Другими словами, чтобы найти горизонтальную составляющую, нужно криволинейную поверхность спроектировать внутрь жидкости на вертикальную плоскость и найти силу давления на полученную проекцию.

Сравнивая формулу $F_x=(\rho g y_c)S_y$ с формулой силы давления жидкости на плоскую стенку, видим аналогию расчётных зависимостей. Значит, координату y_D или глубину погружения точки приложения горизонтальной составляющей, т. е. центра давления, определяем по формуле для ***вертикальной плоской*** поверхности:

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C S_y},$$

Где I_C - центральный момент инерции вертикальной проекции относительно горизонтальной оси. ***Вертикальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность равна силе тяжести жидкости в объёме "тела давления":***

$F_Y=\rho g V_{т.д.},$ где $V_{т.д.}$ - объём "тела давления".

Рассмотрим сосуд с жидкостью, имеющий цилиндрическую по верхность АВ с образующей, перпендикулярной плоскости чертежа и определим силу давления жидкости на эту поверхность.

Выделим объем жидкости АВСД, ограниченный рассматриваемой поверхностью АВ, вертикальными поверхностями СВ и АД и свободной поверхностью жидкости.

Покажем действующие силы на выделенный объем жидкости и рассмотрим условия равновесия выделенного объема жидкости в вер тикальном и горизонтальном направлениях.

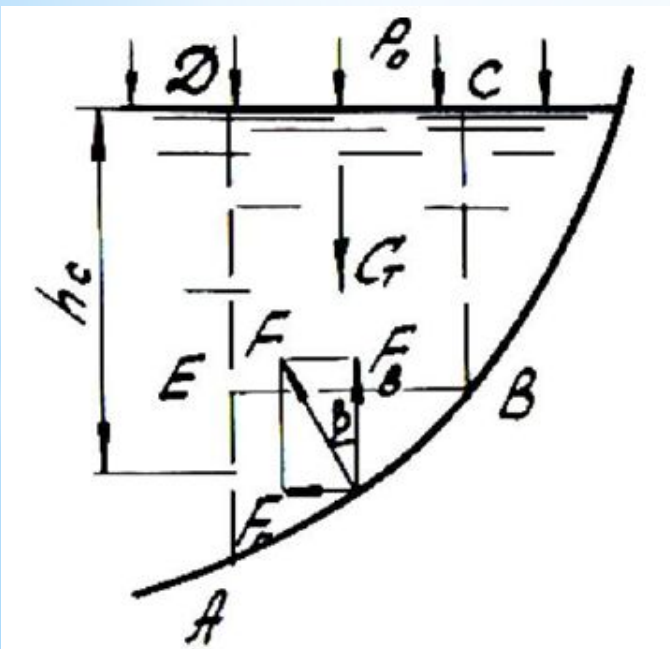


Схема определения сил давления на стенку

Запишем условие равновесия объема жидкости (АВСД) в вертикальном направлении:

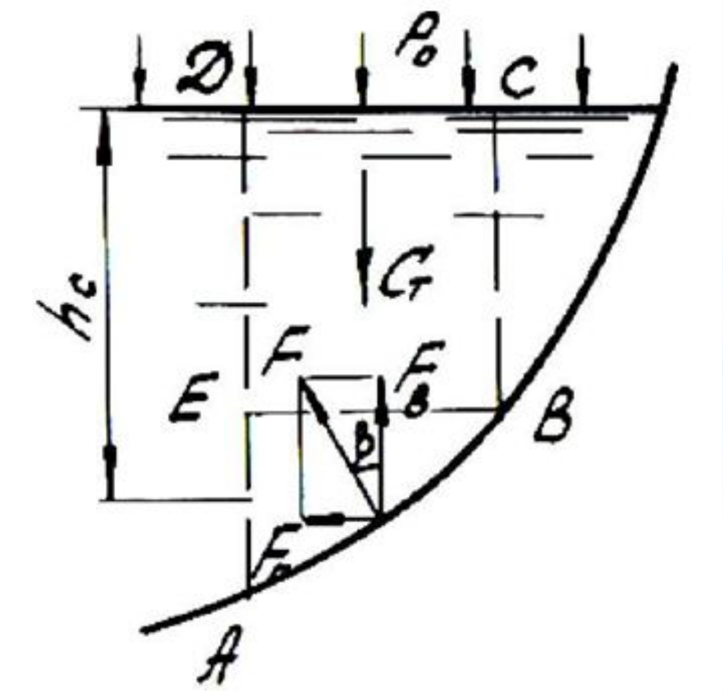
$$p_o S_Г + G - F_B = 0$$

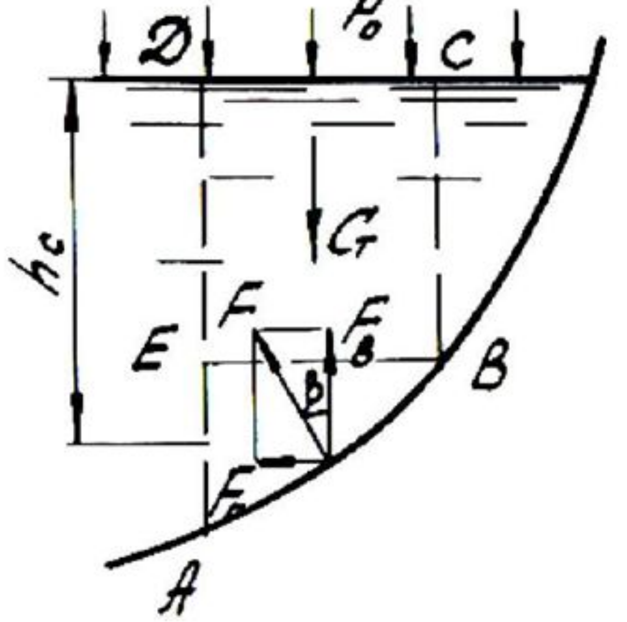
где $S_г$ - площадь горизонтальной проекции поверхности *АВ*; $\boldsymbol{G = pgV}$ - сила тяжести выделенного объема жидкости, здесь $\boldsymbol{V}$ - объем жидкости; $\boldsymbol{F_B}$ - вертикальная составляющая силы давления. Из данного уравнения следует, что

$$F_B = p_o S_Г + G$$

Вертикальная составляющая силы давления жидкости на криволинейную стенку равна силе тяжести жидкости в объеме V, называемом ***телом давления***, и силе давления, действующей на свободную поверхность жидкости.

<u>Тело давления</u> - это объем, ограниченный рассматриваемой криволинейной стенкой, смоченной жидкостью, вертикальной цилиндрической поверхностью, проведенной через контур этой стенки и горизонтальной плоскостью, проведенной по свободной поверхности жидкости.





Условие равновесия того же объема жидкости в горизонтальном направлении запишем с учетом того, что силы давления жидкости на поверхности *ДЕ* и *СВ* взаимно уравновешиваются и остается лишь сила давления на поверхность *АЕ*, т. е.

$$F_{AE} - F_{Г} = 0,$$

где $F_{AE} = p_o S_B + \rho g h_C S_B$ - сила давления жидкости на поверхность *АЕ*, имеющую площадь, равную площади вертикальной проекции поверхности *АВ* - S_B, здесь h_C - глубина расположения центра тяжести поверхности АЕ под уровнем свободной поверхности жидкости.

Из данного условия равновесия следует, что

$$F_Г = p_o S_B + \rho g h_Г S_B.$$

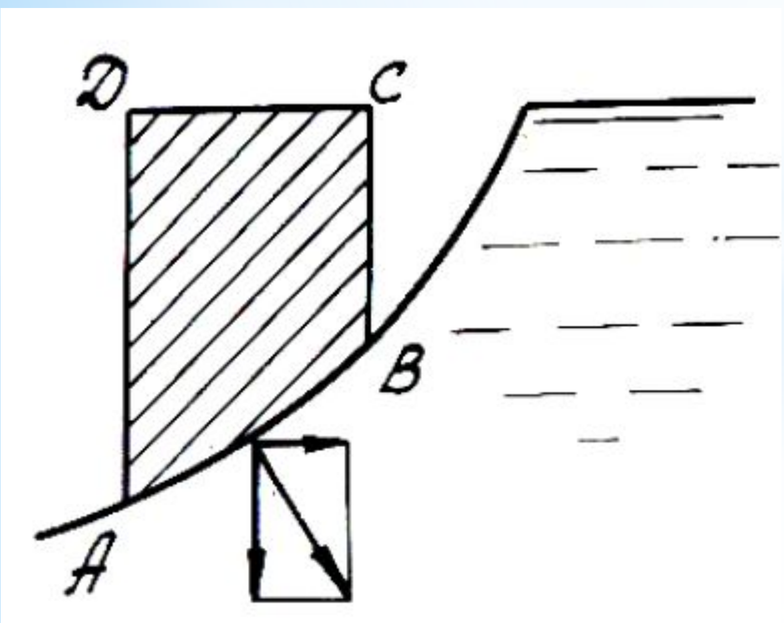
Определив вертикальную и горизонтальную составляющие полной силы давления, найдем эту силу:

$$F = \sqrt{F_B^2 + F_Г^2}$$

Угол направления β находится из соотношения $tg\beta = \frac{F_\Gamma}{F_B}$

$$\beta = arctg\frac{F_\Gamma}{F_B}$$

Когда жидкость расположена снизу поверхности *AB*, гидростатическое давление во всех точках поверхности АВ имеет те же значения, что и в предыдущем случае, но направления их будут противоположны.



Силы F_B определяются по формуле

$\boldsymbol{F_B = p_o S_\Gamma + G}$,

и F_Γ – по формуле

$\boldsymbol{F_\Gamma = p_o S_B + \rho g h_\Gamma S_B}$,

но направлены будут противоположно. Под *G* понимается сила тяжести жидкости в объеме, равном АВСД, хотя и не заполненном жидкостью.

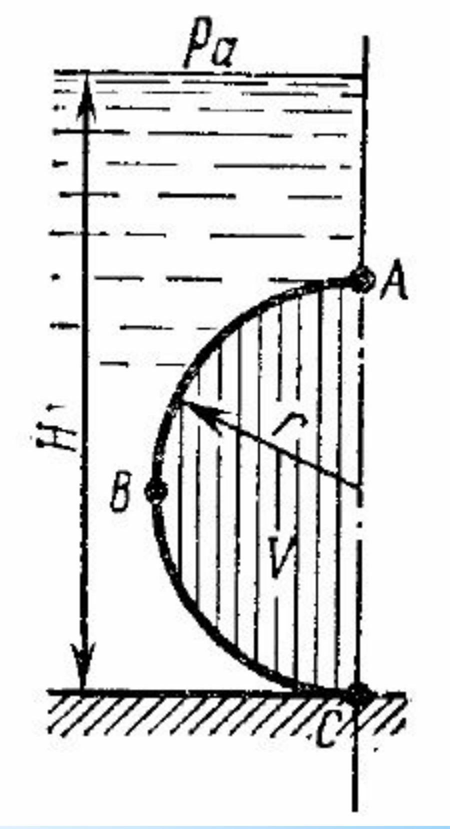
Пример 1. Определить давление в характерных точках и сум марную силу давления как распределенную нагрузку на стенку под водного транспортного туннеля радиусом r=5 м и глубиной погружения H=20 м.

Решение. 1. Определим избыточное давление в характерных точках *A*, *B* и C по уравнению ***F=ρgh***, ограничиваясь левой половиной туннеля, так как распределение давления по правой части будет аналогичным; тогда

$$p_A=\rho g h_A=\rho g(H-2r)=10000(20-2\cdot 5)=0{,}1\ \text{МПа};$$

$$p_B=\rho g h_B=\rho g(H-r)=0{,}15\ \text{МПа};$$

$$p_C=\rho g h_C=\rho g H=0{,}2\ \text{МПа};$$



2. Как известно, горизонтальная составляющая $F_г$ не зависит от формы смоченной криволинейной поверхности и определяется как силовое воздействие жидкости на ее вертикальную проек цию:

$$F_Г = \rho g h_{CГ} S_B=\rho g h_B 2r=10000\cdot 15\cdot 10=1.5\ \text{МН}$$

3. Вертикальная составляющая $\boldsymbol{F_в}$ равна весу воды в объеме тела давления, которое в данном случае представляет полуцилиндр:

$$\boldsymbol{F_B = \rho g V = \rho g \frac{\pi r^2}{2}} = \mathbf{10000 \cdot 3.14 \cdot 5^2/2 = 0.4\ МН}$$

На правую часть туннеля действуют в том же направлении такие же силы давления воды. Поэтому суммарное вертикальное воздействие будет определяться силой $2F_B$ которую необходимо учитывать при расчете на устойчивость, и т. д. Горизонтальные составляющие силы давления взаимно уничтожаются и не могут повлиять на устойчивость туннеля на дне. При прочностных расчетах стенок туннеля, расчетах его жесткости и т. д. эти силы, конечно, необходимо учитывать.

Закон Архимеда

В покоящуюся жидкость погружено тело произвольной формы объемом V. Горизонтальной плоскостью разделим тело на две части: верхнюю с криволинейной поверхностью ACB и нижнюю с поверхностью AC'B. Определим вертикальные составляющие силы давления жидкости, действующие на поверхность тела.

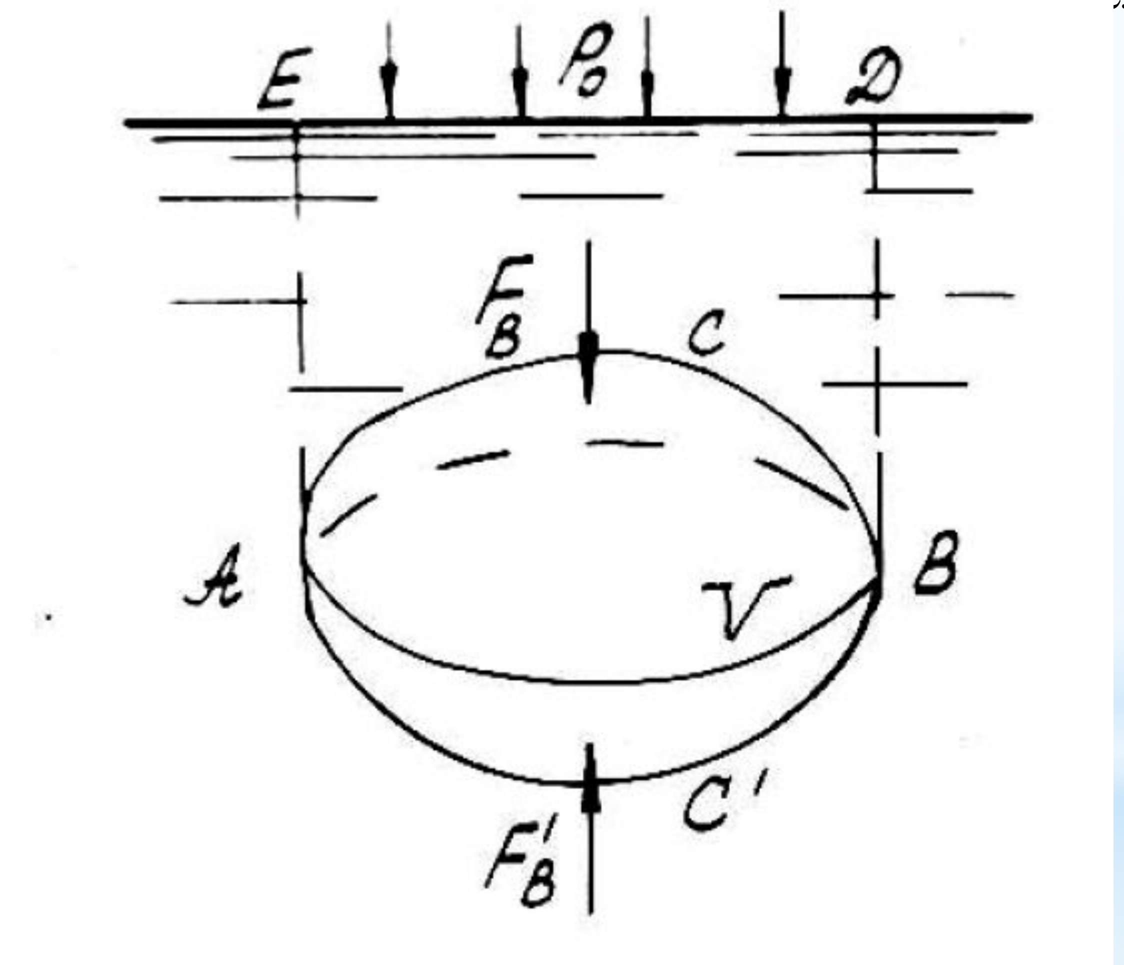


Рис. Схема к выводу закона Архимеда

На поверхность тела АСВ действует сила F_B:

$$F_B = p_0 \cdot S_г + \rho \cdot g \cdot V_{АВСДЕ}$$

где $S_Г$ - площадь горизонтальной проекции поверхности АСВС'; $V_{АСВДЕ}$ - объем жидкости над телом.

На поверхность АС'В действует сила F_B':

$$F_B' = p_0 \cdot S_Г + \rho \cdot g \cdot V_{AC'BДЕ}$$

Где $V_{AC'BДЕ}$ - объем тела давления, $V_{AC'BДЕ}$=$V_{ACBДЕ} + V_{AC'BC}$, здесь $V_{AC'BC}$ - объем жидкости, $V_{AC'BC} = V$.

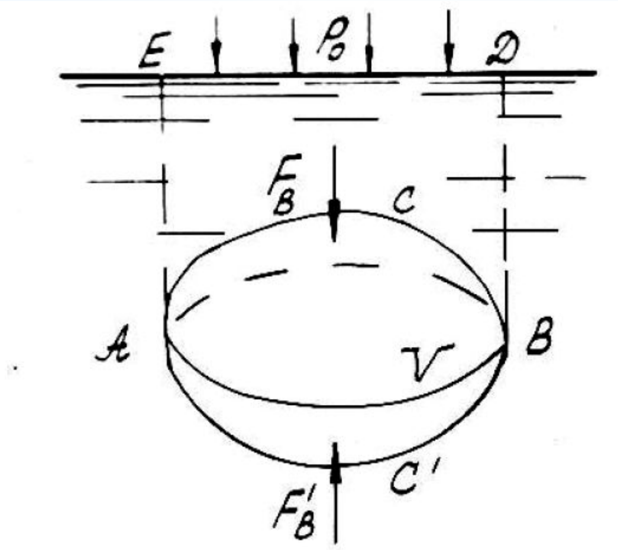


Рис. Схема к выводу закона Архимеда

Таким образом, тело находится под действием вертикальных сил, результирующая которых будет равна

$$F_A = F_B' - F_B = \rho \cdot g \cdot V_{AC'BC} = \rho \cdot g \cdot V$$

Сила F_A называется архимедовой силой или силой поддержания. Таким образом, получено математическое выражение закона Архимеда, которое формулируется следующим образом: **«Тело, погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость».**

Тело, погруженное в жидкость, находится под действием двух сил: силы тяжести G и архимедовой силы F_A.

Тело тонет, если сила тяжести больше архимедовой силы, т.е. при $G > F_A$.

Тело находится в состоянии равновесия (плавает), когда $G=F_A$. Тело всплывает, если $F_A > G$.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ ЖИДКОСТИ

Сведения из теории

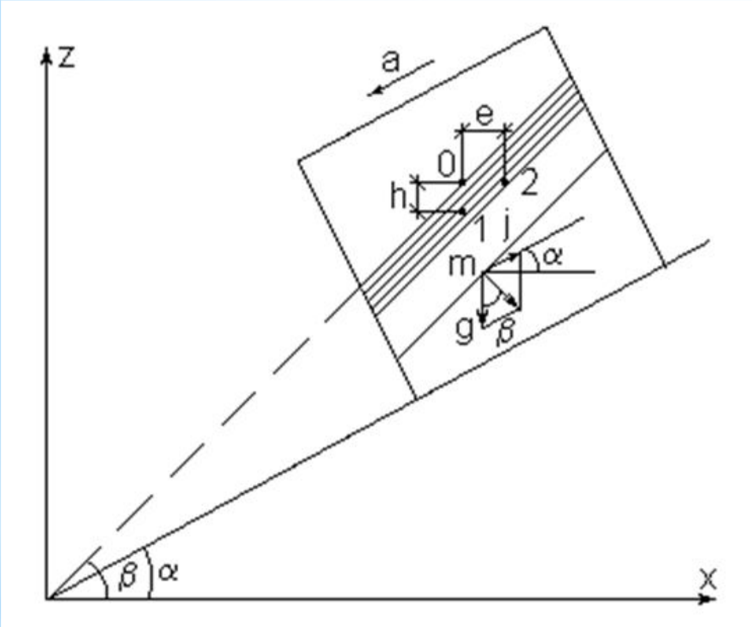
Под относительным покоем понимается такое состояние, при котором в движущейся жидкости отдельные частицы не смещаются одна относительно другой. При этом жидкость перемещается как твердое тело. Само движение жидкости в этом случае можно назвать переносным движением. Для этого состояния характерно постоянство формы объема жидкости. Очевидно, что рассматриваемая масса жидкости будет неподвижна в координатной системе, связанной с движущимся резервуаром.

На жидкость, находящуюся в относительном покое, действуют ***массовые силы*** (силы тяжести и силы инерции переносного движения), а из поверхностных – ***силы давления***.

Рассмотрим два частных случая относительного покоя: покой при переносном прямолинейном движении и покой при переносном вращательном движении вокруг вертикальной оси.

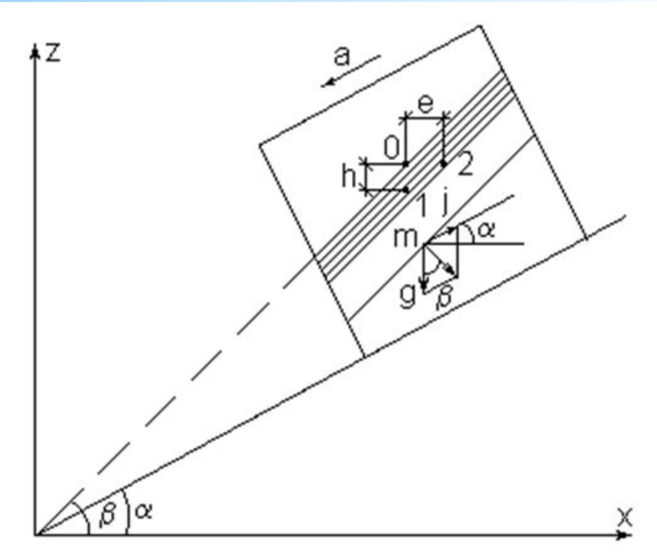
Относительный покой при прямолинейном движении на наклонной плоскости

Рассмотрим движение резервуара с жидкостью с постоянным ускорением ***a*** по наклонной плоскости, образующей угол ***α*** с горизонтальной плоскостью



Поступательное движение по наклонной плоскости

Жидкость в движущемся резервуаре находится под действием силы давления, силы тяжести и силы инерции переносного движения. Ускорение силы инерции ***j*=*a*** и направлено в сторону, обратную ускорению резервуара ***a***. Результирующий вектор массивных сил определяется диагональю параллелограмма, построенного на ускорениях сил тяжести ***g*** и инерции ***j***.



Элемент поверхности равного давления перпендикулярен к диагонали параллелограмма и образует с горизонтом угол β, тангенс которого равен

$$tg\beta = \frac{j \cdot \cos\alpha}{g - j \cdot \sin\alpha}$$

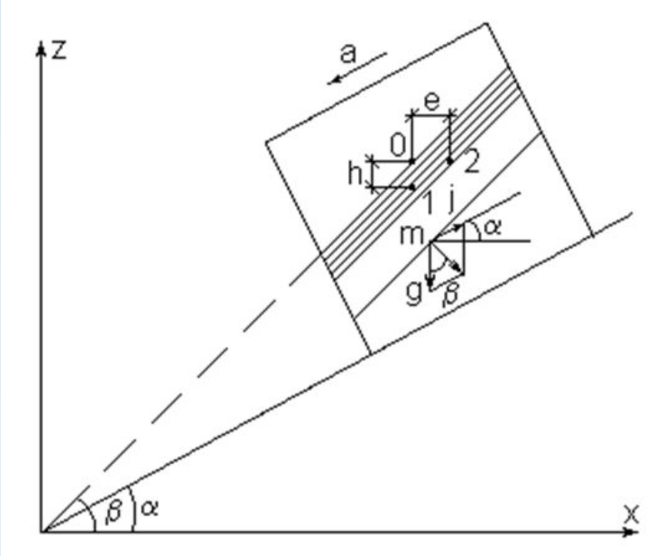
Таким образом, поверхности равного давления, образуют семейство параллельных плоскостей с углом наклона к горизонту β .

Необходимо учесть, что если резервуар движется равномерно $a=0$, то $h_1=0$, и следовательно $tg\,\beta=0$ и $\beta=0$.

В этом случае поверхности равного давления представляют семейство горизонтальных плоскостей.

Если резервуар перемещается под действием силы тяжести (сила трения резервуара о плоскость равна 0), то $j=g\cdot\sin\alpha$, $tg\,\beta = tg\,\alpha$, $\beta = \alpha$, а поверхности равного давления образуют семейство плоскостей, параллельных плоскости скатывания.

,



Если резервуар перемещается с ускорением, но вертикально($a=90^0$), то $tg\,\beta=0$ и $\beta=0$, а поверхности равного давления образуют семейство горизонтальных плоскостей.

Найдем закон распределения давления в вертикальной плоскости $x=const$.

Учитывая, что система координат перемещается вместе с резервуаром, Y=0, а для выбранной плоскости и dx=0, уравнение

$$\partial p = \rho\left(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z\right)$$

примет вид: $dp = \rho \cdot Z \cdot dz$

В этом случае $z=j \cdot sin\, a - g$.

Тогда $dp=\rho(j \cdot sin\, a - g)dz;$

$$\frac{dp}{\rho\,(g - j \cdot \sin\alpha)} + dz = 0$$

После интегрирования имеем: $$\frac{p}{\rho\,(g - j\cdot\sin\alpha)} + z = const$$

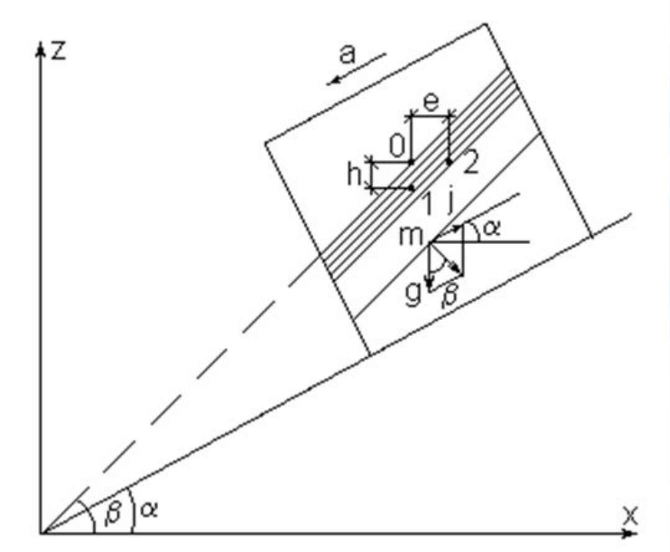
Для двух точек 0 и 1 с координатами z_0 и z_1 имеем:

$$\frac{p_0}{\rho\quad(g - j\cdot\sin\alpha)} + z_0 = z_1 + \frac{p_1}{\rho\quad(g - j\cdot\sin\alpha)}$$

или $$p_1 = p_0 + \rho\quad(g - j\cdot\sin\alpha)\cdot h$$

Если α=0, то имеем $$p_1 = p_0 + \rho\cdot g\cdot h;\quad p_2 = p_0 + \rho\cdot j\cdot e$$

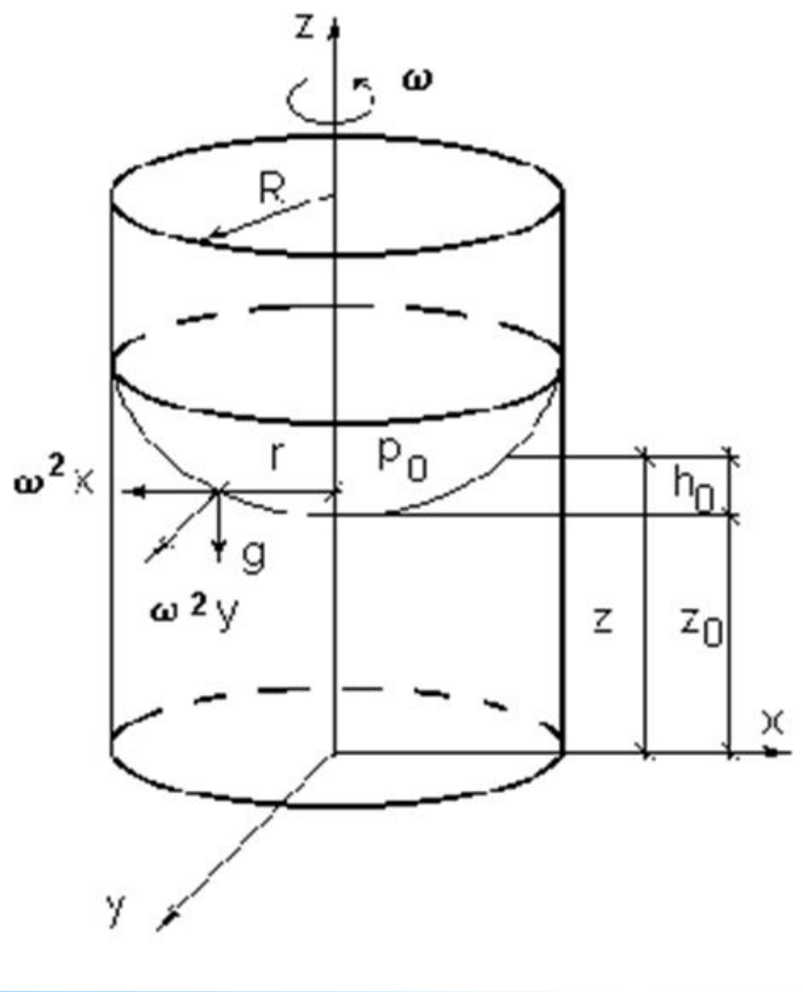
а свободная поверхность имеет угол наклона к горизонту $$tg\beta = \frac{j}{g}$$



При свободном падении резервуара *α=g, j=g и* $p_1=p_2=p_0$, то есть во всем объеме давление одинаково.

Относительный покой при вращении вокруг вертикальной оси

В этом случае на жидкость действуют силы давления, силы тяжести и силы инерции переносного вращательного движения ускорения массовых сил будут равны: $X=\omega^2 \cdot x;\ Y=\omega^2 \cdot y;\ Z=-g$



Вращательное движение

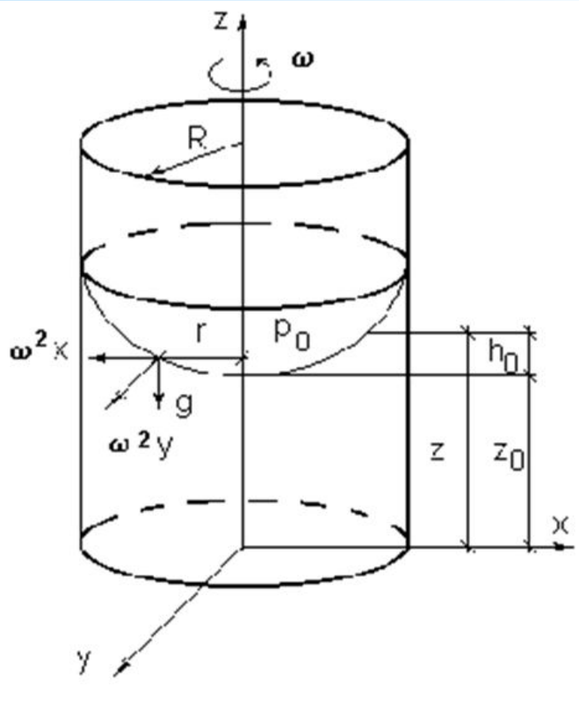
Дифференциальное уравнение примет вид:

$$\omega^2 \cdot x \cdot dx + \omega^2 \cdot y \cdot dy - g \cdot dz = 0$$

После интегрирования, с учетом, что $X^2+Y^2=R^2$, получим:

$$\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} - z = C$$

Где r – вектор, направленный по кротчайшему расстоянию от оси вращения к рассматриваемому элементу.



$$\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} - z = C$$

Это уравнение является уравнением параболоида вращения, а поверхности равного давления образуют семейство параболоидов вращения, сдвинутых вдоль вертикальной оси. Каждый параболоид характеризуется некоторым значением постоянной С. Для параболоида свободной поверхности принимаем, что при $z = z_0$, $X=Y=0$ поэтому $C = -z_0$.

Тогда уравнение свободной поверхности примет вид:

$$\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} = g \cdot (z - z_0) = g \cdot h_0$$

или

$$\frac{u^2}{2 \cdot g} = h_0$$

Закон распределения давления по объему жидкости получим из уравнения

$$\partial p = \rho(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z)$$

подставив в него соответствующие значения *X*, *Y* и *Z*. После интегрирования получаем:

$$p = \rho \cdot g \left(\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} - z\right) + C$$

Постоянную интегрирования С определим из условия, что при $z = z_0$ и $r=0$, $p=p_0$, т.е. $C=p_0+\rho \cdot g \cdot z_0$

После подстановки окончательно имеем:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \left(z_0 - z + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g}\right)$$

Для частиц жидкости расположенных на одной вертикали можем записать:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

$$h = z_0 - z + h_0$$

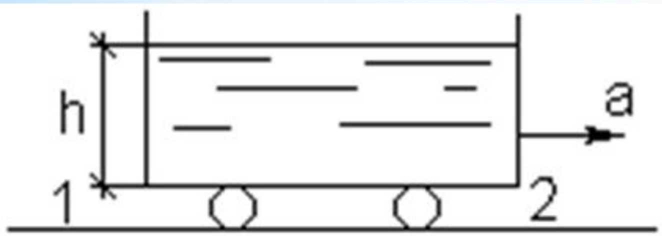
где

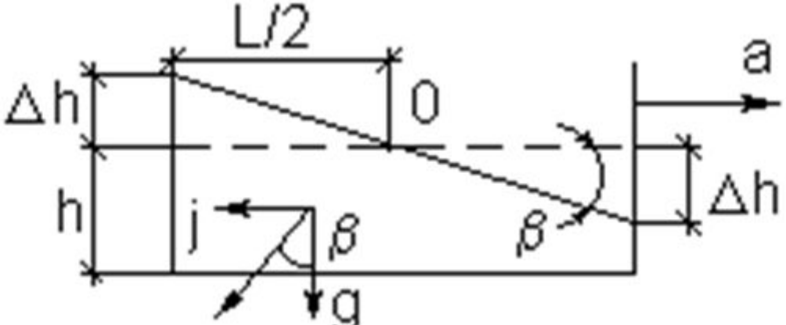
т.е. существует обычный гидростатический закон распределения давления. Это объясняется тем, то проекции сил инерции на ось 0 равна нулю.

Пример 2. Сосуд с прямоугольным основанием ***L·B*** наполнен водой до высоты ***h*** и движется по горизонтальной поверхности с ускорением ***a***. Определить избыточное давление воды на дно сосуда у передней и задней стенок в точках 1 и 2.

Решение: При горизонтальном движении сосуда с ускорением ***a*** свободная поверхность жидкости станет наклонной к горизонту под углом ***β***. Так как ***a= - j***, то ***tgβ= - a/g.*** Учитывая что объем воды не изменяется, поэтому свободная поверхность повернется вокруг оси О, расположенной на середине длины сосуда, а повышение и понижение свободной поверхности у торцовых стенок будет одинаковым и равным Δ***h*** .

$$\Delta h = \frac{L}{2}\frac{a}{g} \qquad tg\,\beta = \frac{L}{2}\frac{a}{g}$$





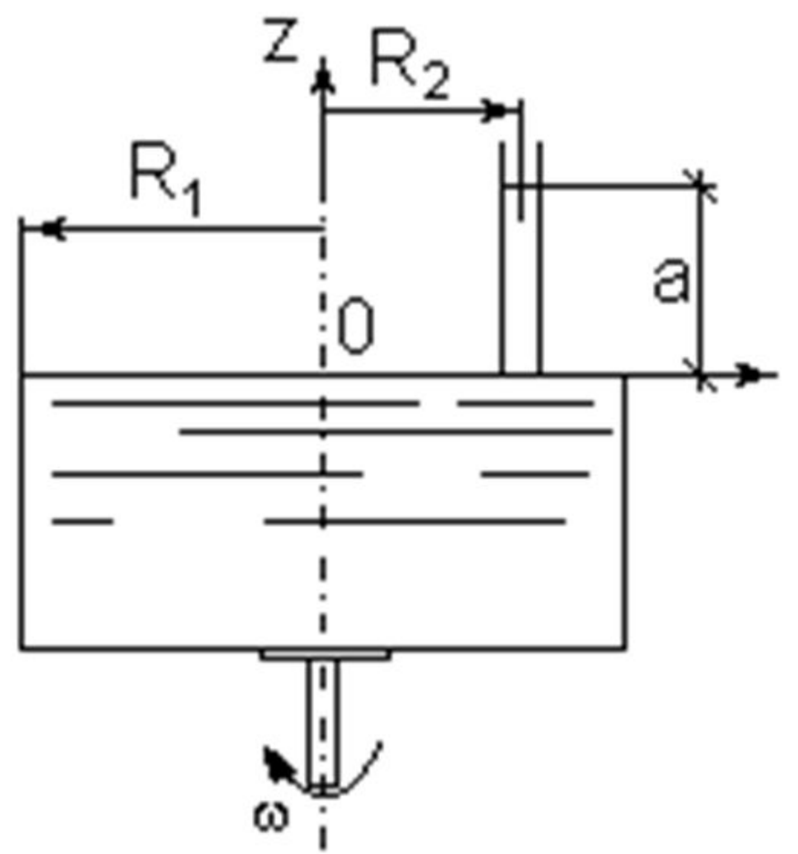
Избыточное давление в точке 1 будет равно:

$$p = \rho \cdot g \cdot (h + \Delta h) = \rho \cdot g \cdot \left(h + \frac{L}{2}\frac{a}{g}\right)$$

В точке 2 избыточное давление составит:

$$p = \rho \cdot g \quad (h - \Delta h) = \rho \cdot g \quad \left(h - \frac{L}{2}\frac{a}{g}\right)$$

Пример 3. Цилиндрический сосуд радиусом R_1 наполнен жидкостью плотностью ρ до уровня a в открытой трубке малого диаметра, установленной на крышке сосуда на расстоянии R_2 от центра, и приведен в равномерное вращение относительно центральной вертикальной оси. Определить угловую скорость вращения сосуда, при которой избыточное давление под крышкой в центре сосуда будет равно 0.



Решение: Используя уравнение

$$p = p_0 + \rho \cdot g \left(z_0 - z + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} \right)$$

найдем закон распределения избыточного давления в жидкости, заполняющей сосуд, учитывая что $p_0 = p_{атм}$

$$p_u = \rho \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} - \rho \cdot g \, (z - z_0)$$

z_0 находим, используя граничное условие $p_u=0$ при $r=R_2$ и $z=a$

$$\rho \quad \frac{\omega^2 \cdot R_2{}^2}{2} - \rho \cdot g \quad (a - z_0) = 0$$

откуда

$$z_0 = a - \frac{\omega^2 \cdot R_2{}^2}{2 \cdot g}$$

Подставляя z_0, получим искомый закон распределения давления.

$$p_u = \rho \cdot \frac{\omega^2}{2} \quad \left(r^2 - R_2^2\right) + \rho \cdot g \quad (a - z)$$

Для точек на поверхности крышки $z=0$ имеем

$$p_u = \rho \cdot \frac{\omega^2}{2} \quad \left(r^2 - R_2^2\right) + \rho \cdot g \cdot a$$

Искомую угловую скорость вращения определяем из условия $p_u=0$ при $p_0=p_{атм}$

$$-\rho \quad \frac{\omega^2}{2} \quad R_2^2 + \rho \cdot g \cdot a = 0$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{R_2} \quad \sqrt{2 \cdot g \cdot a}$$