

Разложение функции в ряд Тейлора

приемы косвенного разложения функций в степенные ряды:

- основанные на арифметических операциях над рядами (сложение, умножение и т.д.);
- почленное дифференцирование рядов;
- почленное интегрирование рядов;
- замена переменной;
- приведение к геометрической прогрессии;
- использование ряда степенных рядов;
- подстановка ряда в ряд;
- деление степенных рядов и т.д.

Для разложения конкретной функции в степенной ряд с помощью этих приемов пользуются разложениями основных элементарных функций в ряд Маклорена:


$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\begin{aligned} \arcsin x = & x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2^2 \cdot 5 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2^3 \cdot 7 \cdot 3!} + \dots + \\ & + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot (2n+1) \cdot n!} x^{2n+1} + \dots, \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$


$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$
$$(-1 < x < 1),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad (-1 < x < 1).$$

При разложении функций в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ делаем замену переменной $t = x - x_0$, раскладываем функцию в ряд Маклорена по степеням t и возвращаемся к переменной x .

Пример. Разложить функцию $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ в окрестности точки $x = 2$.

Решение. Преобразуем исходную функцию к виду

$$\sin \frac{\pi}{4} x = \sin \left(\frac{\pi}{4} (x - 2 + 2) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (x - 2) \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} (x - 2) \right).$$

Используя эталонное разложение, получим

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x - 2) \right) &= 1 - \frac{\pi^2}{2!4^2} (x - 2)^2 + \frac{\pi^4}{4!4^4} (x - 2)^4 - \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4^{2n} (2n)!} (x - 2)^{2n}. \end{aligned}$$

Полученный ряд сходится при

$$-\infty < \frac{\pi(x-2)}{4} < +\infty \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Приложения рядов к приближённым вычислениям

Если неизвестное число M разложить в ряд

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

где a_i – некоторые числа и $M_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ – частичная сумма этого ряда, то погрешность при замене M на M_n выражается остатком

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

При достаточно большом n погрешность может стать как угодно малой, так что M_n выразит M с любой заданной точностью.

В случае знакочередующегося ряда погрешность оценивается очень быстро с помощью теоремы Лейбница. Если члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, то сумма остатка M_n меньше его первого члена a_{n+1} по абсолютной величине и совпадает с ним по знаку.


Пример. Вычислить $\ln 3$ с точностью до 10^{-3} .

Решение. Предварительно заметим, что представление
$$\ln 3 = \ln(1+x) = \ln(1+2)$$

приведёт нас к расходящемуся числовому ряду, т.к. $x=2$ не принадлежит интервалу сходимости $(-1;1)$ ряда Маклорена функции $\ln(1+x)$, а, значит, его частичная сумма не будет представлять сумму ряда.

Воспользуемся представлением $\ln 3 = \ln \frac{1+x}{1-x}$, откуда $3 = \frac{1+x}{1-x}$,

$x = \frac{1}{2} \in (-1;1)$. Подставим $x = \frac{1}{2}$ в разложение



$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right),$$

$$\ln 3 = 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} \right)^7 + \dots \right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} \right)^6 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} \right)^8 + \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2} \right)^{10} + \dots.$$

Для оценки погрешности составим ряд, представляющий убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\left(\frac{1}{2} \right)^2 < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{10}} + \underbrace{\frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{14}} + \dots}_{R_n(x)}.$$



При этом выполняются условия: члены обоих рядов монотонно убывают и $b_n > a_n$:

$$\frac{1}{2^{2n}} > \frac{1}{2^{2n} \cdot (n+1)}.$$

Остаток r_n вычислим как сумму геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{2^{12}}$:

$$r_n = S = \frac{\frac{1}{2^{12}}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3 \cdot 2^{10}} = \frac{1}{3 \cdot 1024} < \frac{1}{1000}.$$

Значит, для требуемой точности мы можем взять следующие первые слагаемые:

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} + \frac{1}{11 \cdot 2^{10}}.$$

При вычислении достаточно брать четыре знака, результат округлить до трёх знаков после запятой:

При вычислении достаточно брать четыре знака, результат округлить до трёх знаков после запятой:

$$\begin{aligned} \ln 3 &\approx 1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{80} + \frac{1}{448} + \frac{1}{2304} + \frac{1}{11264} = \\ &= 1 + 0,0833 + 0,0125 + 0,0022 + 0,0004 + 0,0001 = 1,0985 \approx 1,098. \end{aligned}$$

Ответ. $\ln 3 \approx 1,098$.

Пример. Вычислить с точностью до 10^{-3} интеграл $\int_0^1 \sqrt{x^3} \cos x dx$.


Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем, в силу его равномерной сходимости, проинтегрируем почленно. Используем эталонный ряд, сходящийся для $x \in (-\infty; +\infty)$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Тогда

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} \cos x dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2} \cdot 2!} + \frac{x^{\frac{13}{2}}}{\frac{13}{2} \cdot 4!} - \frac{x^{\frac{17}{2}}}{\frac{17}{2} \cdot 6!} + \dots \right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{13 \cdot 12} - \frac{1}{17 \cdot 360} + \dots$$



Полученный числовой ряд – знакочередующийся, следовательно, для достижения требуемой точности, по следствию теоремы Лейбница, достаточно оценить первое отброшенное слагаемое; т.к.

$$\frac{1}{17 \cdot 360} = \frac{1}{6120} < \frac{1}{1000} \quad \text{то достаточно взять первые три члена}$$

разложения:

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} \cos x \, dx \approx \frac{2}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{156} = 0,4 - 0,1111 + 0,0064 \approx 0,295.$$

Ответ. $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} \cos x \, dx \approx 0,295.$