Разложение функции в ряд Тейлора

приемы косвенного разложения функций в степенные ряды:

- основанные на арифметических операциях над рядами (сложение, умножение и т.д.);
- почленное дифференцирование рядов;
- почленное интегрирование рядов;
- замена переменной;
- приведение к геометрической прогрессии;
- использование ряда степенных рядов;
- подстановка ряда в ряд;
- деление степенных рядов и т.д.

Для разложения конкретной функции в степенной ряд с помощью этих приемов пользуются разложениями основных элементарных функций в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad (-1 < x \le 1),$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2^2\cdot 5\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2^3\cdot 7\cdot 3!} + \cdots +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(2n+1)\cdot n!} x^{2n+1} + \cdots, \quad (-1 < x < 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$$(-1 < x < 1),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad (-1 < x < 1).$$

При разложении функций в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ делаем замену переменной $t = x - x_0$, раскладываем функцию в ряд Маклорена по степеням t и возвращаемся к переменной x.

Пример. Разложить функцию $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$ в окрестности точки $x = 2$.

Решение. Преобразуем исходную функцию к виду

$$\sin\frac{\pi}{4}x=\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2+2)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(x-2)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right).$$

Используя эталонное разложение, получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right)=1-\frac{\pi^2}{2!4^2}(x-2)^2+\frac{\pi^4}{4!4^4}(x-2)^4-\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{4^{2n}(2n)!}(x-2)^{2n}.$$

Полученный ряд сходится при

$$-\infty<\frac{\pi(x-2)}{4}<+\infty \quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Приложения рядов к приближённым вычислениям

Если неизвестное число M разложить в ряд

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

где a_i – некоторые числа и $M_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ – частичная сумма этого ряда, то погрешность при замене M на M_n выражается остатком

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

При достаточно большом n погрешность может стать как угодно малой, так что M_n выразит M с любой заданной точностью.

В случае знакочередующегося ряда погрешность оценивается очень быстро с помощью теоремы Лейбница. Если члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, то сумма остатка M_n меньше его первого члена a_{n+1} по абсолютной величине и совпадает с ним по знаку.

Пример. Вычислить $\ln 3$ с точностью до 10^{-3}.

Решение. Предварительно заметим, что представление

$$\ln 3 = \ln(1+x) = \ln(1+2)$$

приведёт нас к расходящемуся числовому ряду, т.к. $x = 2$ не принадлежит интервалу сходимости $(-1;1)$ ряда Маклорена функции $\ln(1+x)$, а, значит, его частичная сумма не будет представлять сумму ряда.

Воспользуемся представлением $\ln 3 = \ln\frac{1+x}{1-x}$, откуда $3 = \frac{1+x}{1-x}$, $x = \frac{1}{2} \in (-1;1)$. Подставим $x = \frac{1}{2}$ в разложение

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right),$$

$$\ln 3=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\right]=$$

$$=1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\cdots.$$

Для оценки погрешности составим ряд, представляющий убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\left(\frac{1}{2}\right)^2<1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{10}}+\underbrace{\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{14}}+\cdots}_{R_n(x)}.$$

При этом выполняются условия: члены обоих рядов монотонно убывают и $b_n > a_n$:

$$\frac{1}{2^{2n}} > \frac{1}{2^{2n}\cdot(n+1)}.$$

Остаток r_n вычислим как сумму геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{2^{12}}$:

$$r_n = S = \frac{\frac{1}{2^{12}}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3\cdot 2^{10}} = \frac{1}{3\cdot 1024} < \frac{1}{1000}.$$

Значит, для требуемой точности мы можем взять следующие первые слагаемые:

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} + \frac{1}{11 \cdot 2^{10}}.$$

При вычислении достаточно брать четыре знака, результат округлить до трёх знаков после запятой:

При вычислении достаточно брать четыре знака, результат округлить до трёх знаков после запятой:

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{80} + \frac{1}{448} + \frac{1}{2304} + \frac{1}{11264} =$$

$$= 1 + 0{,}0833 + 0{,}0125 + 0{,}0022 + 0{,}0004 + 0{,}0001 = 1{,}0985 \approx 1{,}098.$$

Ответ. $\ln 3 \approx 1{,}098$.

Пример. Вычислить с точностью до 10^{-3} интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{x^3}\cos x\,dx$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем, в силу его равномерной сходимости, проинтегрируем почленно. Используем эталонный ряд, сходящийся для $x \in (-\infty; +\infty)$: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

Тогда

$$\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}} \cos x\,dx = \int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}\cdot 2!} + \frac{x^{\frac{13}{2}}}{\frac{13}{2}\cdot 4!} - \frac{x^{\frac{17}{2}}}{\frac{17}{2}\cdot 6!} + \cdots \right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{13\cdot 12} - \frac{1}{17\cdot 360} + \cdots.$$

Полученный числовой ряд – знакочередующийся, следовательно, для достижения требуемой точности, по следствию теоремы Лейбница, достаточно оценить первое отброшенное слагаемое; т.к. $\frac{1}{17\cdot 360}=\frac{1}{6120}<\frac{1}{1000}$ то достаточно взять первые три члена разложения:

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cos x\,dx \approx \frac{2}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{156}=0{,}4-0{,}1111+0{,}0064\approx 0{,}295.$$

Ответ. $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cos x\,dx \approx 0{,}295.$