Теория вероятностей и математическая статистика

“Элементы комбинаторики”

Тема 2

План лекции

1. Основные комбинаторные величины
2. Обозначения основных комбинаторных величин
   1) размещение
   2) перестановки
   3) сочетания
3. Бином Ньютона

Основные комбинаторные величины

- Пусть дано множество объектов

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

- Как именно можно извлекать объекты из этого множества?

<u>I вариант:</u> k-сочетания без повторений

<u>II вариант:</u> k-размещение без повторений

<u>III вариант:</u> k-сочетания с повторениями

<u>IV вариант:</u> k-размещения с повторениями

Обозначения основных комбинаторных величин

Title

k-сочетания без повторений

k-размещение без повторений

k-сочетания с повторениями

k-размещения с повторениями

Факториал

Факториалом натурального числа n называется произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно

$$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$n! = (n-1)!*n$

$n! = (n-2)!*(n-1)*n$

1. Размещение с повторением

Размещение с повторением – упорядоченные m-элементные подмножества, которые отличаются и элементами, и порядком их следования, и возможностью повтора.

Число всех размещений с повторениями из n элементов по m можно вычислить по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Пример:
Слова в языке

Дети в начальной школе придумали тайный язык, в котором символами являются не обычные буквы, а треугольник, квадрат и круг. Сколько существует различных слов из 5 букв, которые можно составить из символов этого языка?

без повторений

Пусть дано множество, состоящее из n элементов: A = {a_1, a_2, … a_n}.

Размещениями из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

$$A_n^k = n^*(n-1)^* \dots ^*(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$(n > k)$$

Пример:
Составляем поезд из вагонов

У ребенка игрушечный железнодорожный состав. Он состоит из шести вагонов. А в наборе к этому игрушечному поезду имеется 8 типов вагонов. Сколько всего существует способов комбинировать состав, в котором всего 6 вагонов:

1) все вагоны в этом поезде были разные; 2) если в нем обязательно должен быть вагон-ресторан?

3. Перестановки

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Всякое его упорядоченное подмножество, состоящее из n элементов, называется ***перестановкой из n элементов (т.е. n=k).***

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

без повторений

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Всякое его подмножество, состоящее из m элементов, называется ***сочетанием из n элементов по m.***

Число сочетаний без повторений из n элементов по m может быть вычислено по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! * k!}, (n \geq k)$$

Пример.
Мыши в лаборатории

Есть некая медицинская лаборатория, и в этой лаборатории имеется 10 подопытных мышей. В лаборатории задумали провести какой-то эксперимент над пятью из этих мышей. Необходимо выбрать 5 мышей из этих 10-ти так, чтобы над ними поставить эксперимент. Сколько есть способов выбрать 5 мышей для эксперимента?

5. Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями – это k-элементные подмножества, n-элементного множества, которые отличаются только элементами и возможностью повтора.

Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по m можно вычислить по формуле:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k, = \frac{(k+n-1)!}{k! * (n-1)!} \; (n \geq k)$$

Пример:
Пирожные

Человек пришел в магазин и в магазине есть несколько видов пирожных. Вот есть 4 сорта пирожных. И вот человеку надо купить 20 пирожных. Сколькими способами он может это сделать?

6. Перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями – упорядоченные подмножества, в которых первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент – n_2 раз, k-й элемент – n_k раз, причем

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Число перестановок с повторениями можно вычислить по формуле:

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! *. . .* n_k!}$$

Выбор формулы: