

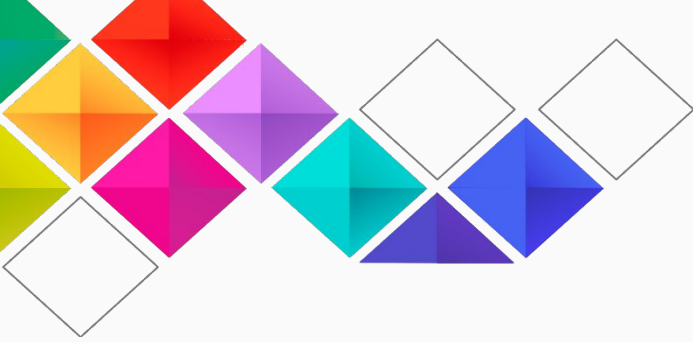
Теория вероятностей и
математическая статистика
**“Элементы
комбинаторики
”**

Тема 2



План лекции

1. Основные комбинаторные величины
2. Обозначения основных комбинаторных величин
 - 1) размещение
 - 2) перестановки
 - 3) сочетания
3. Бином Ньютона



Основные комбинаторные величины

- Пусть дано множество объектов

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

- Как именно можно извлекать объекты из этого множества?

I вариант: k-сочетания без повторений

II вариант: k-размещение без повторений

III вариант: k-сочетания с повторениями

IV вариант: k-размещения с повторениями



Обозначения основных комбинаторных величин

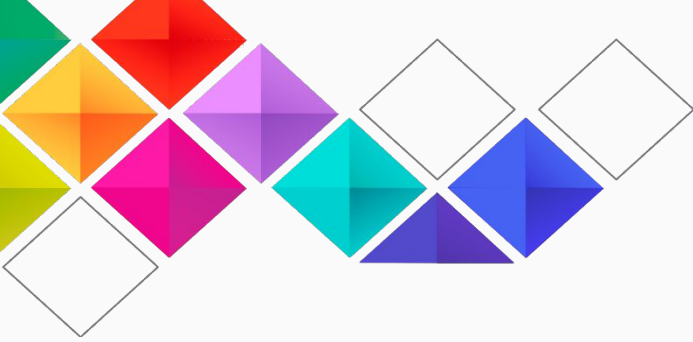
Title

k-сочетания без повторений

k-размещение без повторений

k-сочетания с повторениями

k-размещения с повторениями



Факториал

Факториалом натурального числа n называется произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно

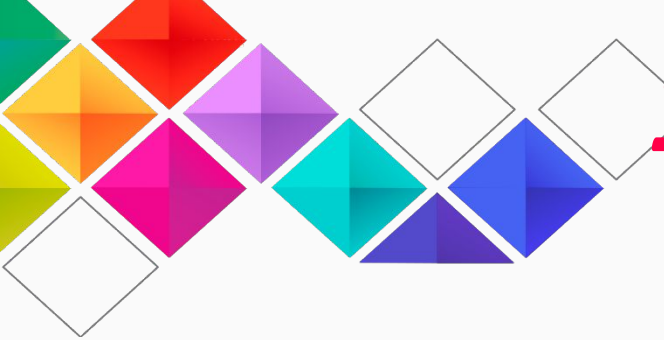
$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = (n-1)! * n$$

$$n! = (n-2)! * (n-1) * n$$



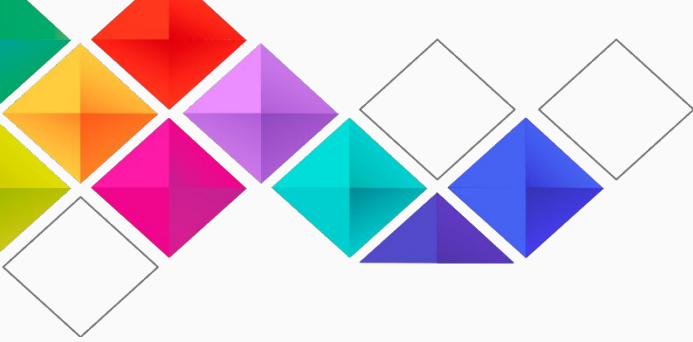
1. Размещение с повторением

Размещение с повторением –

упорядоченные m -элементные подмножества, которые отличаются и элементами, и порядком их следования, и возможностью повтора.

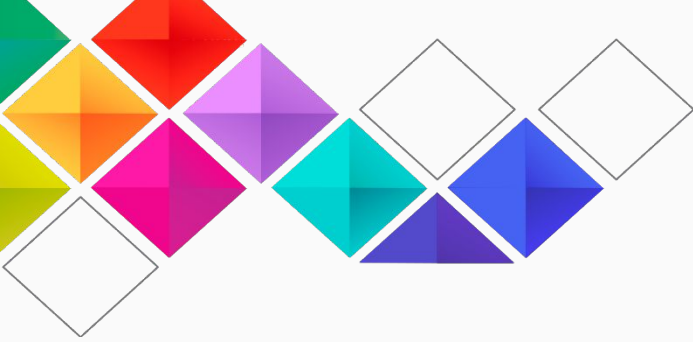
Число всех размещений с повторениями из n элементов по m можно вычислить по формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$



Пример: **Слова в языке**

Дети в начальной школе придумали тайный язык, в котором символами являются не обычные буквы, а треугольник, квадрат и круг. Сколько существует различных слов из 5 букв, которые можно составить из символов этого языка?



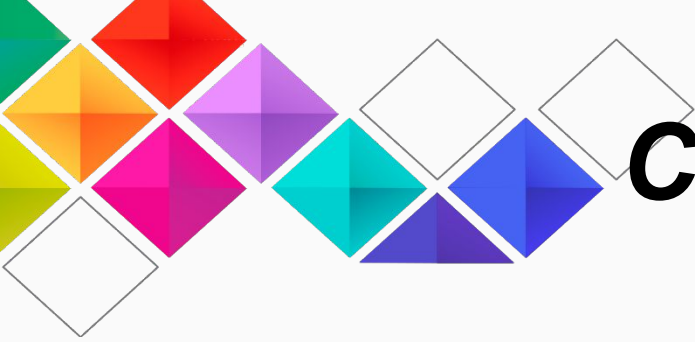
без повторений

Пусть дано множество, состоящее из n элементов: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Размещениями из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

$$A_n^k = n * (n - 1) * \dots * (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!},$$

$(n > k)$



Пример:

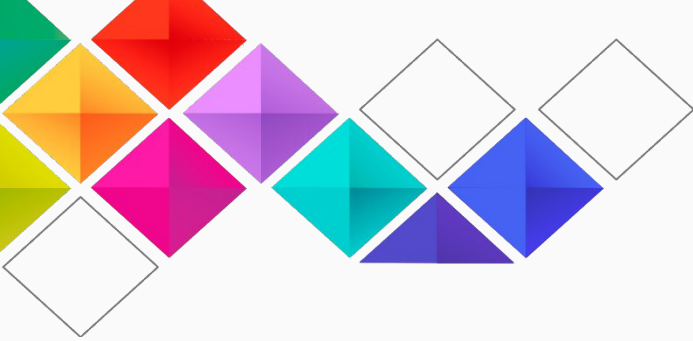
Составляем поезд из вагонов

У ребенка игрушечный железнодорожный состав. Он состоит из шести вагонов. А в наборе к этому игрушечному поезду имеется 8 типов вагонов. Сколько всего существует способов комбинировать состав, в котором всего 6 вагонов:

1) все вагоны в этом поезде были разные; 2) если в нем обязательно должен быть вагон-ресторан?

3.

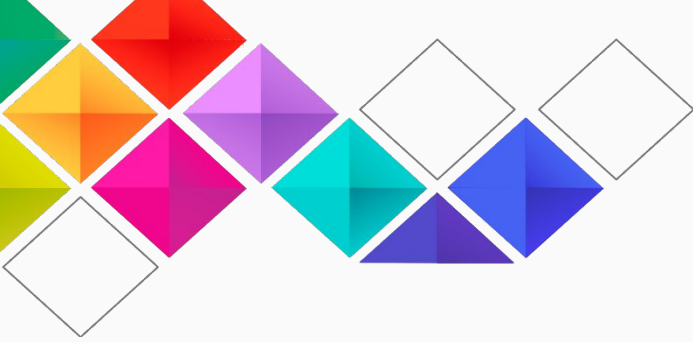
Перестановки



Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Всякое его упорядоченное подмножество, состоящее из n элементов, называется **перестановкой из n элементов (т.е. $n=k$)**.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$



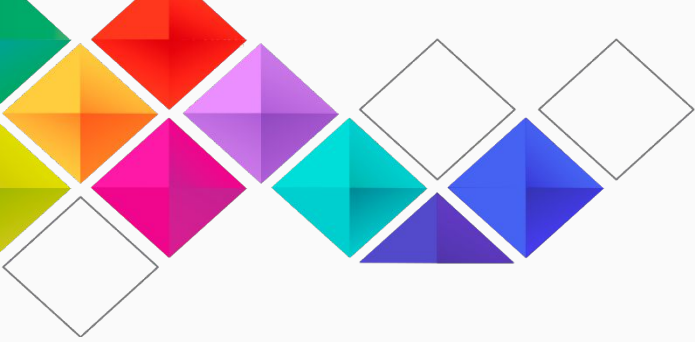
без повторений

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Всякое его подмножество, состоящее из m элементов, называется **сочетанием из n элементов по m** .

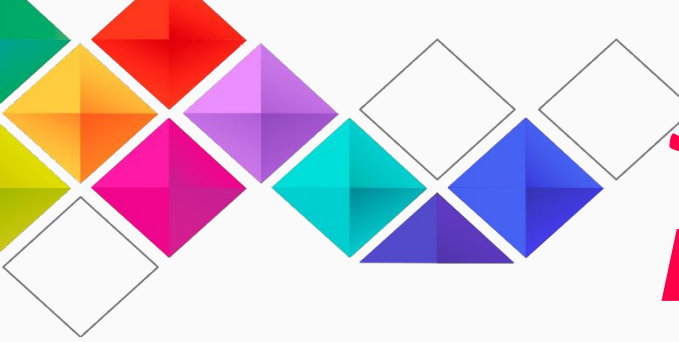
Число сочетаний без повторений из n элементов по m может быть вычислено по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! * k!}, \quad (n \geq k)$$



Пример. **Мыши в лаборатории**

Есть некая медицинская лаборатория, и в этой лаборатории имеется 10 подопытных мышей. В лаборатории задумали провести какой-то эксперимент над пятью из этих мышей. Необходимо выбрать 5 мышей из этих 10-ти так, чтобы над ними поставить эксперимент. Сколько есть способов выбрать 5 мышей для эксперимента?



5. Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями – это k -элементные подмножества, n -элементного множества, которые отличаются только элементами и возможностью повтора.

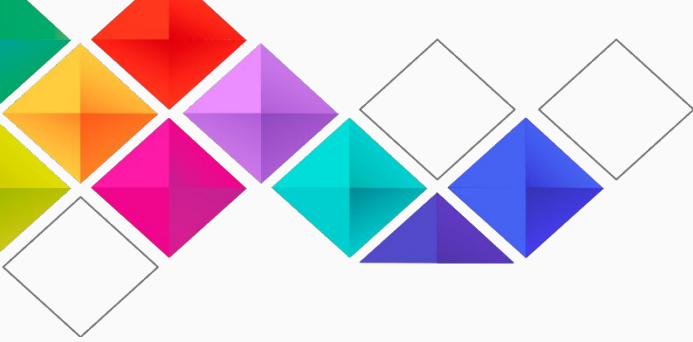
Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по m можно вычислить по формуле:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(k+n-1)!}{k! * (n-1)!} \quad (n \geq k)$$



Пример: **Пирожные**

Человек пришел в магазин и в магазине есть несколько видов пирожных. Вот есть 4 сорта пирожных. И вот человеку надо купить 20 пирожных. Сколькими способами он может это сделать?



6. Перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями – упорядоченные подмножества, в которых первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент – n_2 раз, k -й элемент – n_k раз, причем

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Число перестановок с повторениями можно вычислить по формуле:

$$\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!}$$

Выбор формулы:

