

Тема 3

Численное решение
алгебраических и
трансцендентных уравнений.

Решение уравнений – это одна из древнейших математических задач. Ещё в Древней Греции умели решать линейные и квадратные алгебраические уравнения. В эпоху Возрождения (XV век) Джироламо Кардано и его ученик Луиджи Феррари получили точные решения для алгебраических многочленов 3 и 4 степени. Позднее много усилий было затрачено на получение точного решения многочленов 5 степени и выше. Но только в 20-х годах XIX века было доказано, что решение алгебраического многочлена n -ой степени

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \text{ где } a_n \neq 0$$

при $n \geq 5$ нельзя выразить через коэффициенты с помощью арифметических действий и операций извлечения корня.

Известно, что алгебраический многочлен n -ой степени имеет n корней, причём они могут быть вещественными и комплексными (теорема Гаусса).

Решение трансцендентных уравнений в явном виде также может быть получено в редких, простейших случаях. Трансцендентные уравнения, включающие алгебраические, тригонометрические, экспоненциальные функции от неизвестного x , как правило, имеют неопределённое число корней. Необходимость решения трансцендентных уравнений возникает, например, при расчёте устойчивости систем, расчете парожидкостного равновесия и т.п.

Достаточно распространённой задачей является так же нахождение некоторых или всех решений системы из n нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений с n неизвестными.

Рассмотрим вначале методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.

Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти корни уравнения

$$f(x)=0 \tag{3.1}$$

на всей числовой оси или на некотором интервале $a < x < b$.

Всякое значение $x^* \in (a, b)$, удовлетворяющее условию $f(x^*) = 0$, называется *корнем уравнения* (6.1), а способ нахождения этого значения x^* и есть *решение уравнения* (3.1).

Методы решения уравнений:

- *Прямые* (формула Виета для квадратного уравнения и Кардано для кубического и другие)
- *Итерационные* – для решения любого уравнения

Численное решение уравнения проводится в два этапа:

1 этап. Отделение корней уравнения.

2 этап. Уточнение интересующих корней с заданной точностью ε .

3.1. Отделение корней нелинейного уравнения.

Отделение корней – это определение их наличия, количества и нахождения для каждого их них достаточно малого отрезка $[a,b]$, которому он принадлежит.

На первом этапе определяется число корней, их тип. Определяется интервал, в котором находятся эти корни, или определяются приближенные значения корней.

В инженерных расчетах, как правило, необходимо определять только вещественные корни. Задача отделения вещественных корней решается *аналитическими и графическими методами*.

Аналитические методы основаны на функциональном анализе.

Для алгебраического многочлена n -ой степени (полинома) с действительными коэффициентами вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_n > 0) \quad (3.2)$$

верхняя граница положительных действительных корней R_B^+ определяется по формуле Лагранжа (Маклорена):

$$R_B^+ = 1 + k \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}}, \quad B = \max_{a_i < 0} |a_i|, \quad (3.3)$$

где: $k \geq 1$ – номер первого из отрицательных коэффициентов полинома;

B – максимальный по модулю отрицательный коэффициент.

Нижнюю границу положительных действительных корней R_H^+ можно определить из вспомогательного уравнения

$$P_n'(x) = x^n \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) \quad (3.4)$$

Если для этого уравнения по формуле Лагранжа верхняя граница равна R_1 , то

$$R_H^+ = \frac{1}{R_1} \quad (3.5)$$

Тогда все положительные корни многочлена лежат в интервале $R_H^+ \leq x^+ \leq R_B^+$.

Интервал отрицательных действительных корней многочлена определяется с использованием следующих вспомогательных функций.

$$P_n^2(x) = P_n(-x) \quad \text{и} \quad P_n^3(x) = x^n \cdot P_n\left(-\frac{1}{x}\right).$$

$$R_H^- \leq x^- \leq R_B^- \quad R_H^- = \frac{1}{R_3} \quad R_B^- = R_2^2.$$

Рассмотрим пример отделения корней с использованием этого аналитического метода.

Методом Лагранжа определим границы положительных и отрицательных корней многочлена.

$$3x^8 - 5x^7 - 6x^3 - x - 9 = 0$$

$$k = 1 \quad B = |-9| \quad a_n = 3$$

$$R_B^+ = 1 + \sqrt[3]{\frac{9}{3}} = 4$$

$$P_n'(x) = 9x^8 + x^7 + 6x^5 + 5x - 3 = 0$$

$$k = 8 \quad B = 3 \quad a_n = 9$$

$$R_i^+ = \frac{1}{R'} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\frac{3}{9}}} = \frac{1}{1,87} = 0,5$$

Отсюда границы положительных корней $0,5 \leq x^+ \leq 4$

$$P_n^2 = P_n(-x) = 3x^8 + 5x^7 + 6x^3 + x - 9 = 0$$

$$R_B^- = 1 + \sqrt[3]{\frac{9}{3}} = 1 + \sqrt[3]{3} \approx 2,0$$

$$R_H^3(x) = x^n \cdot P_n \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = 9x^8 - x^7 - 6x^5 - 5x - 3 = 0$$

$$k = 1 \quad B = 6 \quad a_n = 9$$

$$R_H^- = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{1 + \frac{6}{9}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Следовательно, границы отрицательных корней $-2 \leq x^- \leq -0,6$

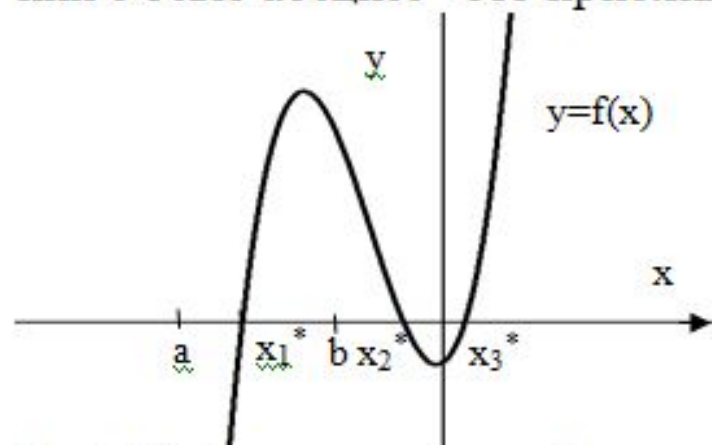
Формула Лагранжа позволяет оценить интервал, в котором находятся все действительные корни, положительные или отрицательные. Поэтому, для определения расположения каждого корня необходимо проводить дополнительные исследования.

Для трансцендентных уравнений не существует общего метода оценки интервала, в котором находятся корни. Для этих уравнений оцениваются значения функции в особых точках: разрыва, экстремума, перегиба и других.

На практике получил большее распространение *графический метод приближённой оценки вещественных корней*. Для этих целей строится график функции по вычисленным её значениям.

Графически корни можно отделить 2-мя способами:

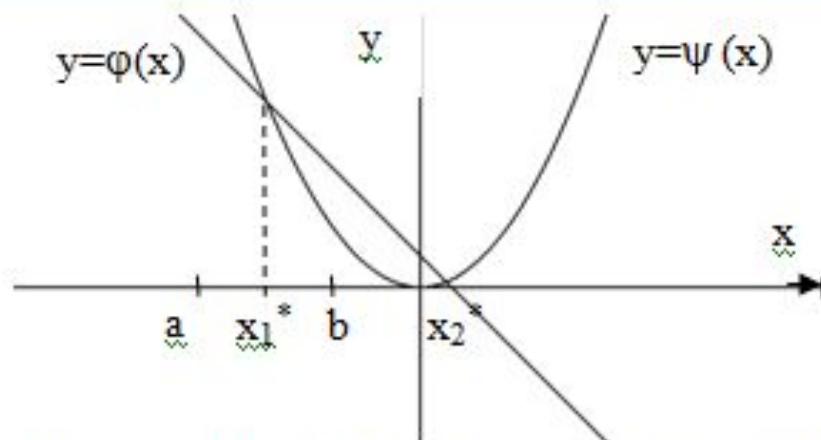
1. Построить график функции $y = f(x)$ и определить координаты пересечений с осью абсцисс— это приближенные значения корней уравнения.



На графике 3 корня.
Первый корень
 $x^* \in [a,b]$

Рис. 3.1 Отделение корней на графике $f(x)$.

2. Преобразовать $f(x)=0$ к виду $\varphi(x) = \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — элементарные функции, и определить абсциссу пересечений графиков этих функций.



На графике 2 корня.
Первый корень
 $x_1^* \in [a, b]$

Рис. 3.2 Отделение корней по графикам функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Графический метод решения нелинейных уравнений широко применяется в технических расчётах, где не требуется высокая точность.

Для отделения вещественных корней можно использовать ЭВМ. Алгоритм отделения корней основан на факте *изменения знака функции в окрестности корня*. Действительно, если корень вещественный, то график функции пересекает ось абсцисс, а знак функции изменяется на противоположный.

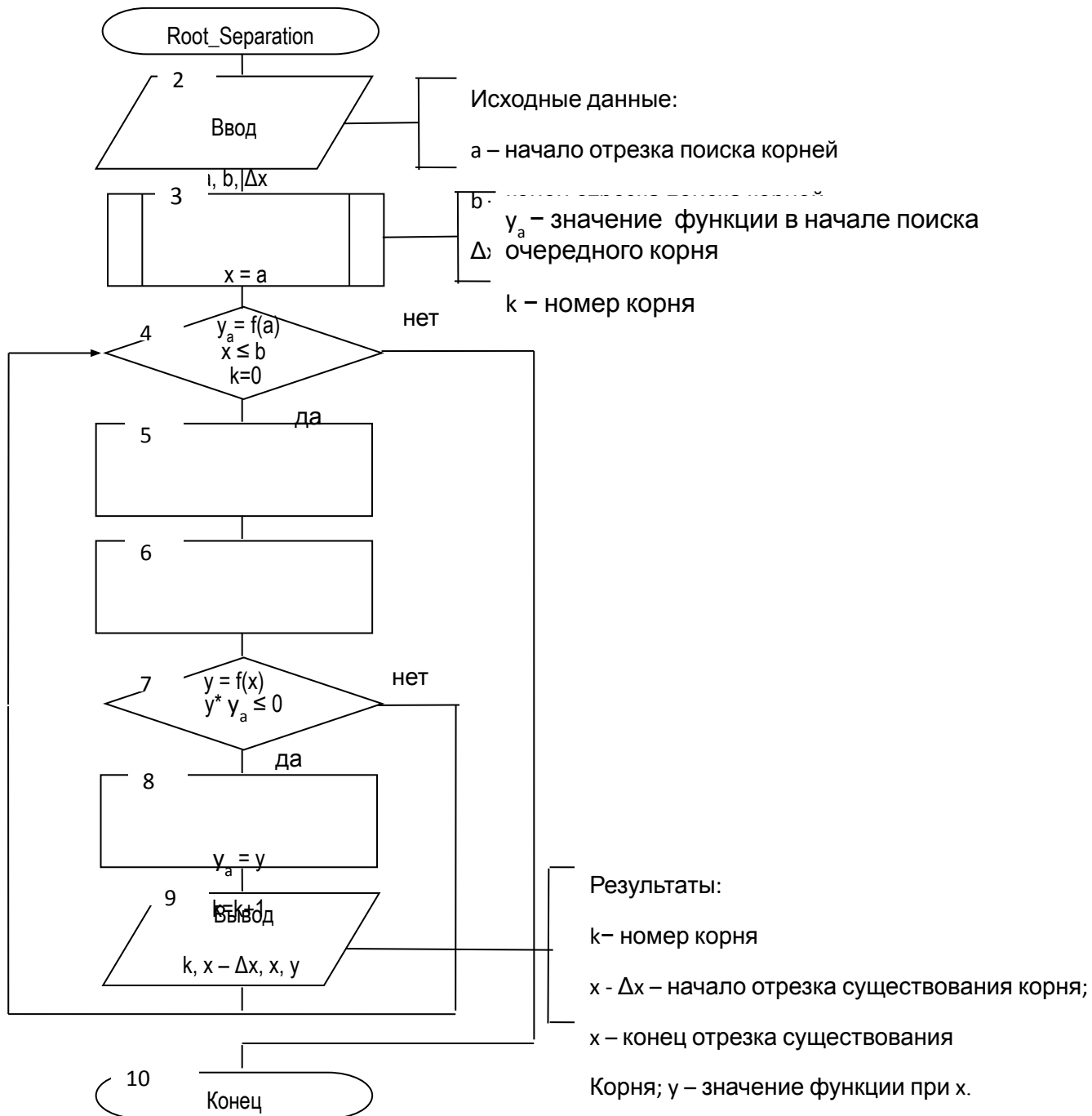
Рассмотрим схему алгоритма отделения корней нелинейного уравнения на заданном отрезке в области определения функции.

Алгоритм позволяет определить приближённые значения всех действительных корней на отрезке $[a, b]$. Введя незначительные изменения в алгоритм, его можно использовать для определения приближённого значения максимального или минимального корня.

Приращение неизвестного Δx не следует выбирать слишком большим, чтобы не «проскочить» два корня.

Недостаток метода – использование большого количества машинного времени.

Рис. 3.3 Схема алгоритма
отделения корней.



3.2. Алгоритмы уточнения корней уравнения.

Уточнение корня – это вычисление интересующего корня с заданной точностью ε .

Приближённые значения корней уравнения, полученные на предыдущем этапе, уточняются различными итерационными методами.

Рассмотрим некоторые из них.

3.2.1. Метод дихотомии (половинного деления, бисекций).

Постановка задачи:

Дано нелинейное уравнение $f(x) = 0$.

Корень отделен, т.е. известно, что $x^* \in [a, b]$.

Требуется вычислить корень с заданной точностью ε .

Метод реализует стратегию постепенного уменьшения отрезка существования корня, используя факт изменения знака функции в окрестности корня.

Алгоритм метода.

1. Вычислить координату середины отрезка $[a, b]$ $x = (a+b)/2$ и значение $f(x)$ в этой точке.
 2. Уменьшить отрезок, отбросив ту его половину, на которой корня нет.
Если знак функции в начале отрезка и в его середине одинаков, то корень находится на второй половине, первую половину можно отбросить, переместив начало отрезка в его середину:
если $f(a) \cdot f(x) > 0 \Rightarrow x^* \in [x, b] \Rightarrow a=x$, иначе $x^* \in [a, x] \Rightarrow b=x$
 3. Проверить условие завершения вычислений: длина отрезка не превышает заданную точность и значение функции близко к 0 с заданной точностью:
-

$$\underline{b-a \leq \varepsilon \cap |f(x)| \leq \varepsilon.}$$

Если условие достигнуто, расчет завершен, иначе повторить алгоритм сначала.

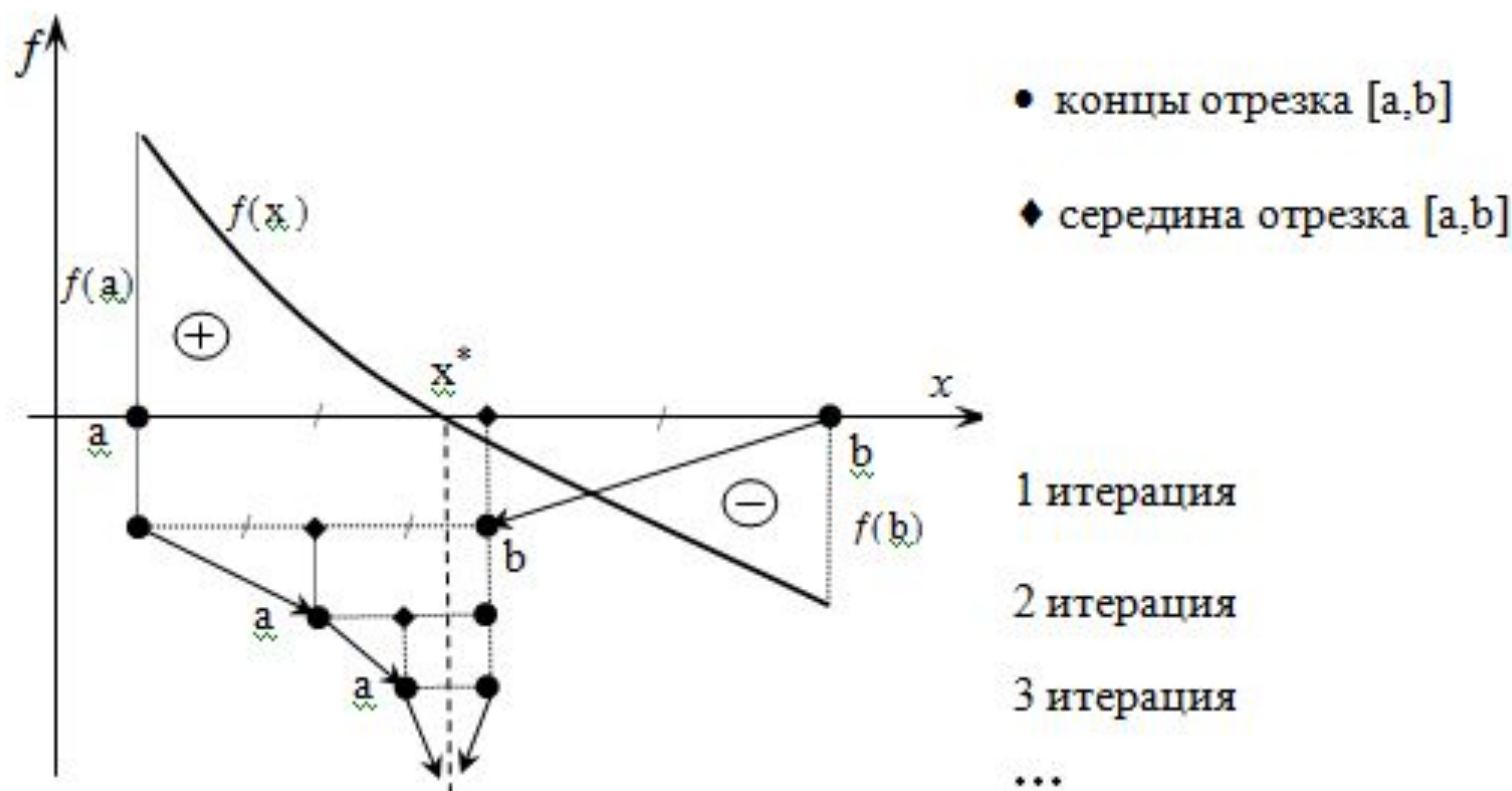
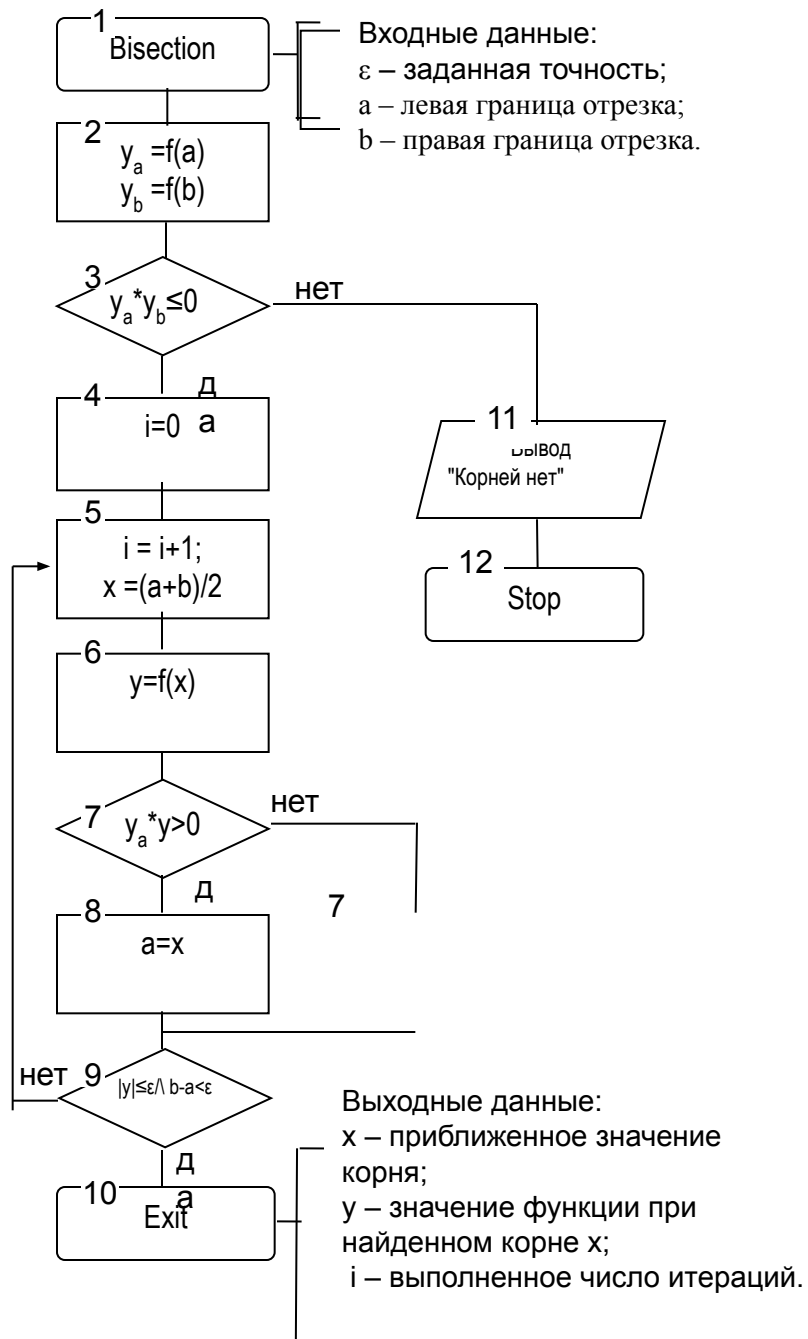


Рис. 3.4 Геометрическая иллюстрация метода бисекций.

Рис. 3.5 Схема алгоритма
метода бисекций
(дихотомии)



Количество итераций n , требуемых для достижения требуемой точности ε можно оценить заранее из соотношения

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow n = \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} \quad (3.6)$$

Метод дихотомии – простой и надежный метод поиска простого корня любой функции, устойчивый к погрешности округления. Даже если на отрезке есть несколько корней (нечетное количество), то будет найден один из них.

Недостатки метода: скорость сходимости низкая, не обобщается на систему уравнений.

Метод дихотомии нельзя использовать для уточнения не простого корня – корень совпадает с точкой экстремума функции, т.к. в этом случае функция не изменяет свой знак в окрестности корня.

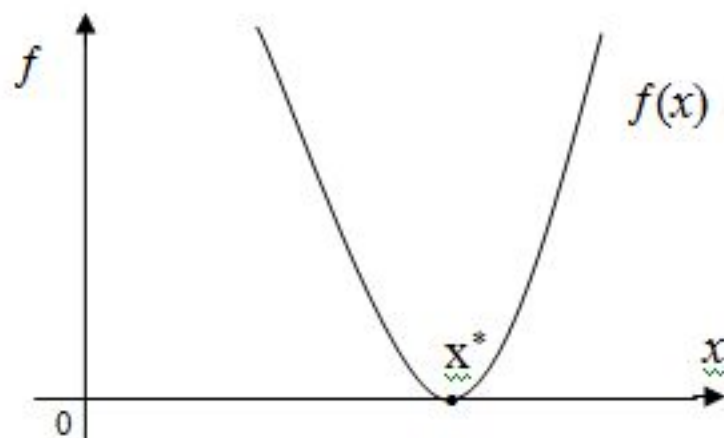


Рис. 3.6. Непростой корень уравнения.

Пример 3.1. Требуется решить уравнение $x^3+2x=1$

Сначала нужно отделить решения.

Удобно записать уравнение в виде $x^3=1-2x$ и построить графики двух элементарных функций $f_1(x)=x^3$ и $f_2(x)=1-2x$

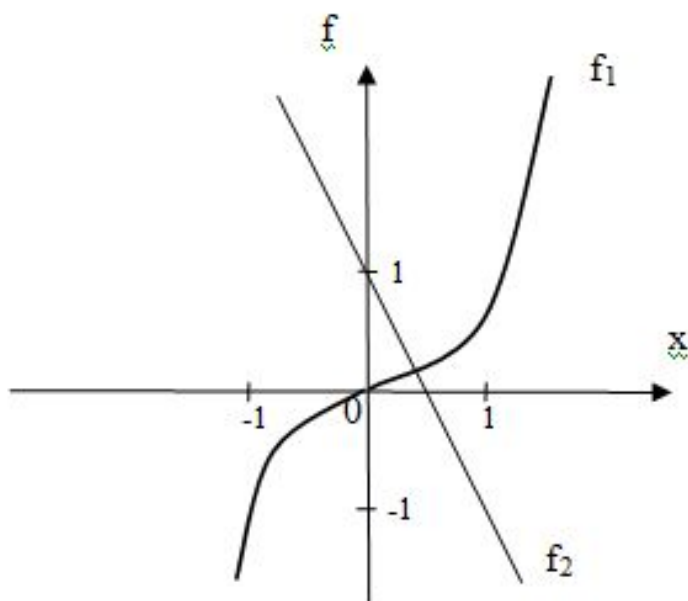


Рис. 3.7 Отделение корней уравнения $x^3 = 1 - 2x$.

Из графика следует, что корень один: $x^* \in [0;1]$.

Проверим наличие корня на отрезке

$$f(a) = f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 = -1, \quad f(b) = f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 = 2$$

Знаки на концах отрезка разные, следовательно, корень отделен верно.

Выполним несколько итераций уточнения корня.

1 итерация. Середина отрезка $x = (0 + 1) / 2 = 0,5$

Значение функции в середине $f(x) = f(0,5) = 0,5^3 + 2 \cdot 0,5 - 1 = 0,125 > 0$

Функция меняет свой знак на первой половине отрезка, следовательно, корень на первой половине, поэтому отбросим вторую половину, переместив конец отрезка в середину: $x^* \in [0; 0,5]$

2 итерация. Середина отрезка $x = (0 + 0,5) / 2 = 0,25$

Значение функции в середине

$$f(x) = f(0,25) = 0,25^3 + 2 \cdot 0,25 - 1 = 0,015625 - 0,5 = -0,484375$$

Функция не меняет свой знак на первой половине отрезка, поэтому отбросим ее: $x^* \in [0,25; 0,5]$

Вычисления следует продолжить до достижения требуемой точности. Например, если $\varepsilon = 0,001$ то потребуется не менее 10 итераций:

$$n = \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{1-0}{0,001}}{\ln 2} = \frac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 9,96$$

Метод простых итераций (метод последовательных приближений).

Метод реализует стратегию постепенного уточнения значения корня.

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение (3.1). Корень отделен $x^* \in [a; b]$. Требуется уточнить корень с точностью ε .

Уравнение (3.1) преобразуем к эквивалентному виду $x = \varphi(x)$, (3.7)

что можно сделать всегда и притом множеством способов.

Выберем начальное приближение $x_0 \in [a; b]$.

вычислим новые приближения:

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

.....

$$x_i = \varphi(x_{i-1}), \quad i=1, 2, \dots \text{ где } i - \text{ номер итерации.} \quad (3.8)$$

Последовательное вычисление значений x_i по формуле (3.8) называется итерационным процессом метода простых итераций, а сама формула - формулой итерационного процесса метода.

Если $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x^*$, то итерационный процесс сходящийся.

$$\text{Условие сходимости } |\varphi'(x)| < 1 \forall x \in [a, b] \quad (3.9)$$

Точное решение x^* получить невозможно, так как требуется бесконечный итерационный процесс.

Можно получить приближенное решение, прервав итерационный (3.8) при достижении условия

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon, \quad (3.10)$$

где ε - заданная точность; i - номер последней итерации.

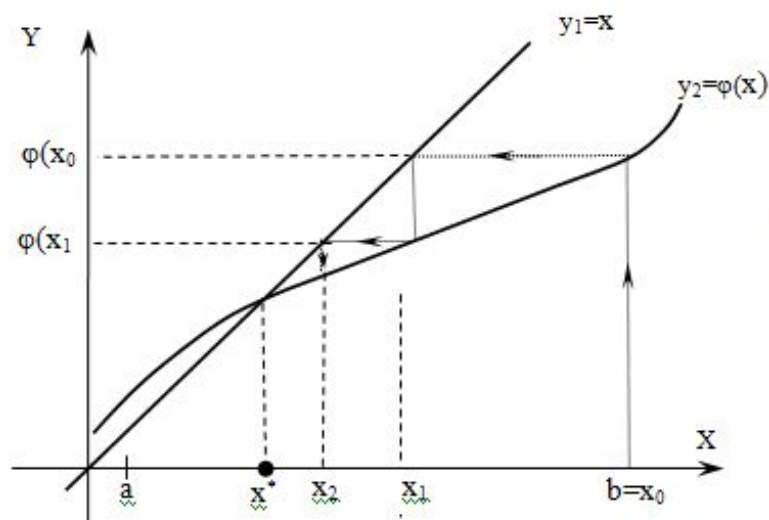
В большинстве случаев условие завершения итерационного процесса (3.10) обеспечивает близость значения x_i к точному решению:

$$|x^* - x_i| \leq \varepsilon$$

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию метода простых итераций.

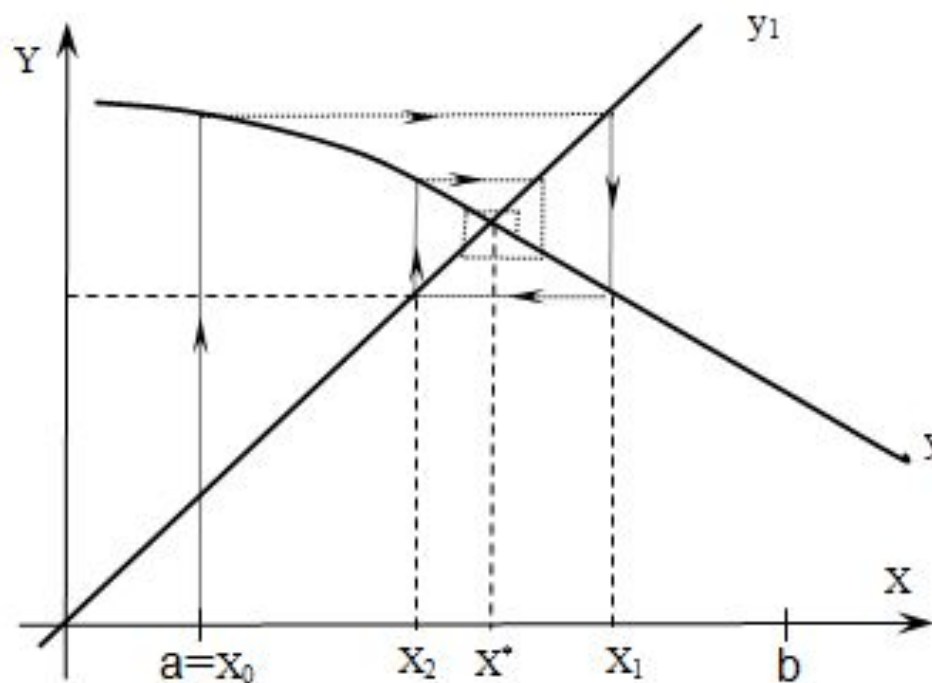
Уравнение (3.7) представим на графике в виде двух функций: $y_1 = x$ и $y_2 = \varphi(x)$.

Возможные случаи взаимного расположения графиков функций, и соответственно, видов итерационного процесса показаны на рис. 3.7 – 3.10.



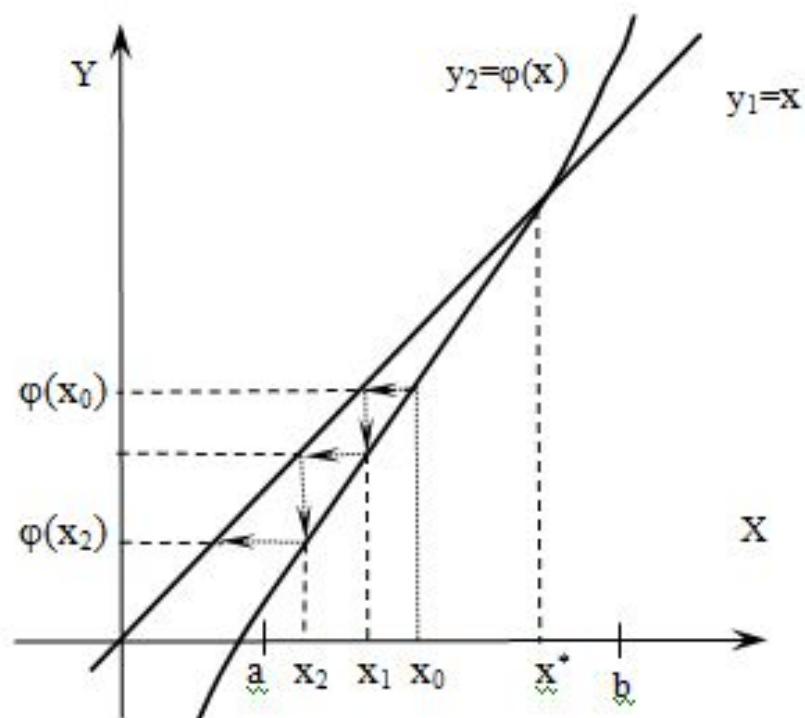
Итерационный процесс
монотонно сходится
из любой точки $[a, b]$

Рис. 3.7 Итерационный процесс для случая $0 < \varphi'_x < 1 \quad \forall x \in [a, b]$.



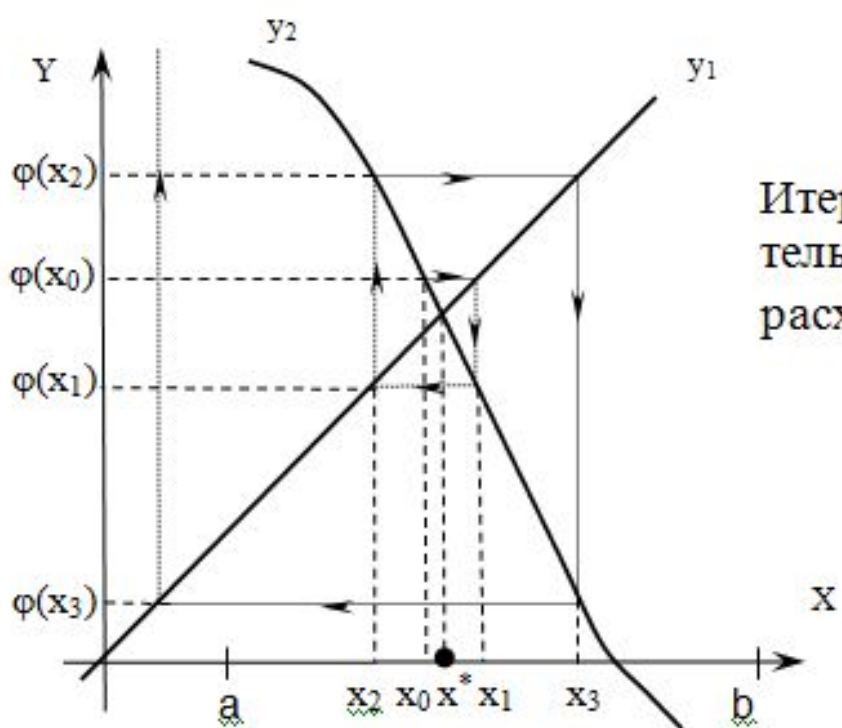
Итерационный процесс
колебательно (около
корня x^*) сходится из
любой точки $[a, b]$

Рис. 3.8 Итерационный процесс для случая $-1 < \varphi'_x < 1 \quad \forall x \in [a, b]$.



Итерационный процесс
монотонно расходится для
любого $x_0 \in [a, b]$

Рис. 3.9 Итерационный процесс для случая $\varphi'_x > 1 \quad \forall x \in [a, b]$.



Итерационный процесс колебательно (относительно корня x^*) расходится для любого $x_0 \in [a, b]$

Рис. 3.10 Итерационный процесс для случая $\varphi'_x \leq -1 \quad \forall x \in [a, b]$.

Из анализа графиков следует, что скорость сходимости растет при уменьшении значения $|\varphi'_x|$

Метод достаточно прост, обобщается на системы уравнений, устойчив к погрешности округления (она не накапливается).

При разработке алгоритма решения нелинейного уравнения методом простых итераций следует предусмотреть защиту итерационного процесса от закливания: использовать в качестве дополнительного условия завершения итерационного процесса превышение заданного максимального числа итераций.

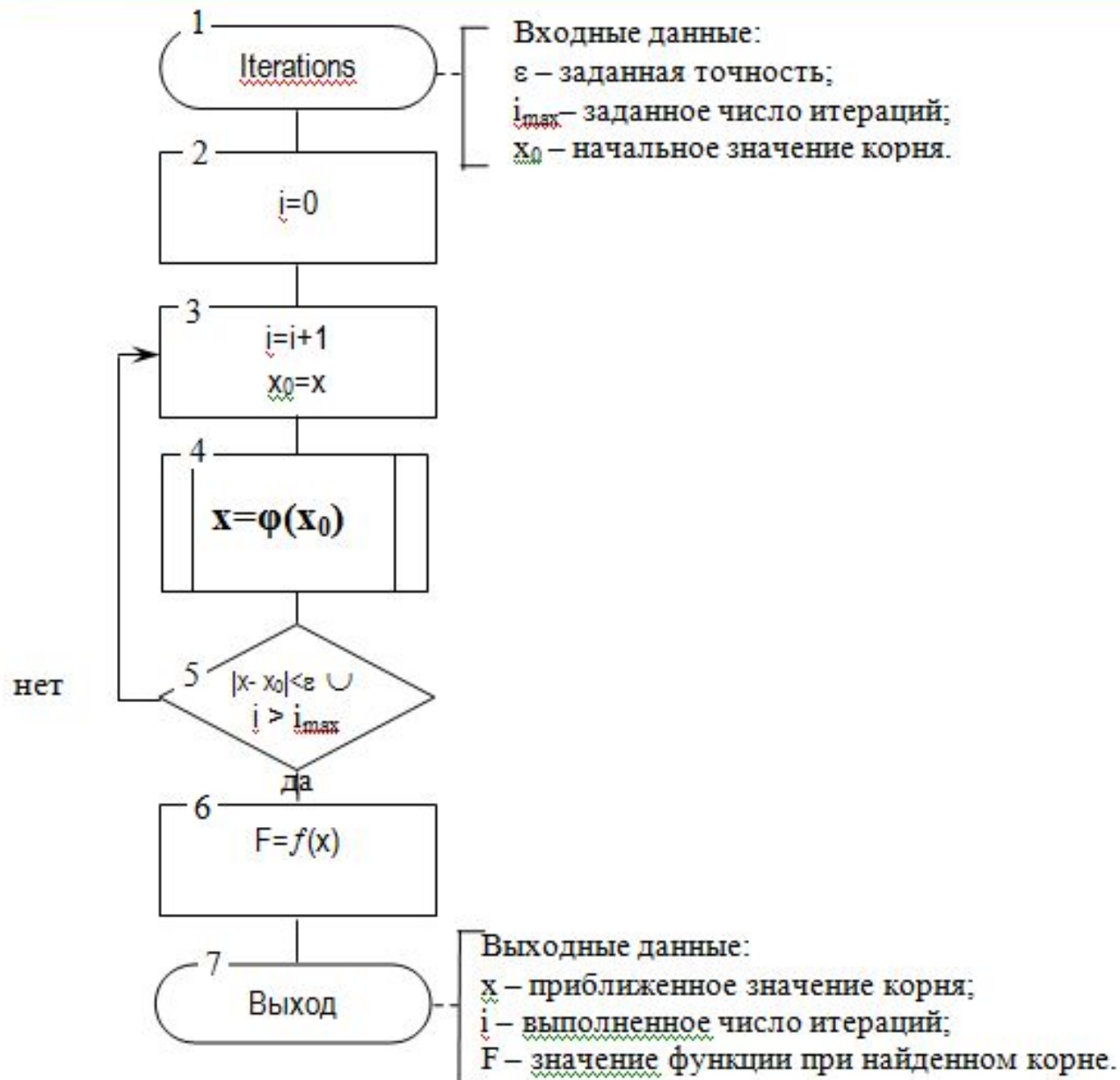


Рис 3.11. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом простых итераций:

Основной проблемой применения метода является обеспечение сходимости итерационного процесса: нужно найти такое эквивалентное преобразование (3.1) в (3.7), чтобы обеспечивалось условие сходимости (3.9) .

Простейшие эквивалентные преобразования, например:

$$\underline{f(x)} = 0 \Rightarrow x + f(x) = x, \text{ т.е. } \varphi(x) = x + f(x)$$

или выразить явно x из (3.1)

$$\underline{f(x)} = 0 \Rightarrow x - \varphi(x) = 0 \Rightarrow x = \varphi(x)$$

не гарантируют сходимость.

Рекомендуется следующий способ получения формулы сходящегося итерационного процесса.

$$\text{Пусть } f'(x) > 0 \forall x \in [a, b].$$

Если это не так, переписать уравнение (3.1) в виде

$$- f(x) = 0$$

Умножить обе части уравнения на $-\lambda (\lambda > 0)$ и к обеим частям прибавить x :

$$x = x - \lambda f(x) = \varphi(x)$$

Константу λ вычислить по формуле:

$$\lambda = \frac{1}{\max_{x \in [a, b]} |f'(x)|} \quad (3.11)$$

Такое значение λ гарантирует сходящийся итерационный процесс по формуле

$$x_i = x_{i+1} - \lambda f(x) \quad (3.12)$$

где $i=1, 2, \dots$ - номер итерации, $x_0 \in [a, b]$ - начальное приближение.

Пример 3.2.

Методом простых итераций уточнить корень уравнения $x^3=1-2x$ с точностью $\varepsilon=0,001$. Корень отделен ранее (см. пример 3.1), $x^* \in [0;1]$.

Сначала нужно получить формулу сходящегося итерационного процесса.

Из уравнения выразим явно x :

$$x = \frac{1}{2}(1 - x^3) = \varphi(x)$$

Проверим условия сходимости для полученной формулы:

$$\varphi'_x = -\frac{3}{2}x^2, \quad \varphi'_{(0)} = 0, \quad \varphi'_{(1)} = -\frac{3}{2}$$

$$|\varphi'_x| > 1 \text{ для } x \in (0;1].$$

Условие сходимости не соблюдается, полученная формула не позволит уточнить корень.

Воспользуемся описанным выше способом получения формулы итерационного процесса (формулы 3.11, 3.12).

$$f(x) = x^3 + 2x - 1 = 0, \quad f'_{(x)} = 3x^2 + 2, \quad f'_{(x)} > 0 \text{ для всех } x \in [0;1].$$

Наибольшее значение $f'_{(x)}$ принимает при $x = 1$, т.е.

$$\max_{x \in [0,1]} |f'_{(x)}| = f'_{(1)} = 3 \cdot 1^2 + 2 = 5$$

Следовательно $\lambda = \frac{1}{5} = 0,2$.

Формула сходящегося итерационного процесса

$$x_i = x_{i-1} - 0,2(x_{i-1}^3 + 2x_{i-1} - 1), \quad i = 1, 2, \dots$$

Уточним корень с помощью данной формулы.

Выберем начальное приближение на $[0; 1]$, например $x_0 = 0,5$ (середина отрезка).

Вычислим первое приближение

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - 0,2(x_0^3 + 2x_0 - 1) = 0,5 - 0,2(0,5^3 + 2 \cdot 0,5 - 1) = \\ &= 0,5 - 0,2(0,125 + 1 - 1) = 0,5 - 0,2 \cdot 0,125 = 0,475 \end{aligned}$$

Проверим условие завершения итерационного процесса

$$|x_1 - x_0| = |0,475 - 0,5| = 0,025 > \varepsilon$$

Расчет следует продолжить.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - 0,2(x_1^3 + 2x_1 - 1) = 0,475 - 0,2(0,475^3 + 2 \cdot 0,475 - 1) = \\ &= 0,475 - 0,2(0,107172 + 0,95 - 1) = 0,475 - 0,2 \cdot 0,057172 = \\ &= 0,475 - 0,011434 = 0,463566 \end{aligned}$$

$$|x_2 - x_1| = |0,463566 - 0,475| = 0,011434 > \varepsilon$$

$$x_3 = 0,458216$$

$$x_4 = 0,455688$$

$$x_5 = 0,454488$$

$$x_6 = 0,453917 - \text{ответ, т.к. } |x_6 - x_5| = 0,000571 < \varepsilon$$

Проверим полученное значение, подставив в исходное уравнение:

$$f(x_6) = 0,453917^3 + 2 \cdot 0,453917 - 1 = 0,093525 + 0,907834 - 1 = 0,001359$$

Значение $f(x)$ близко к 0 с точностью, близкой к ε , следовательно, корень уточнен правильно.

3.2.3 Метод Ньютона (касательных).

Постановка задачи.

Дано нелинейное уравнение (3.1) $f(x)=0$. Корень отделен $x^* \in [a;b]$. Требуется уточнить корень с точностью ε .

Метод основан на стратегии постепенного уточнения корня. Формулу уточнения можно получить из геометрической иллюстрации идеи метода.

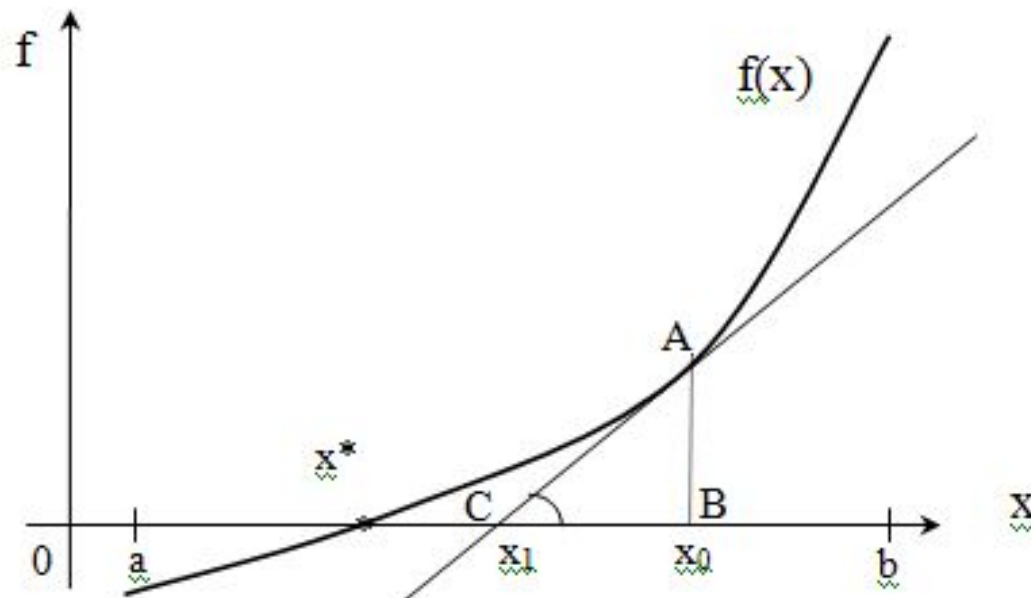


Рис. 3.12. Геометрическая иллюстрация метода Ньютона.

На отрезке существования корня выбирается начальное приближение x_0 .
К кривой $f(x)$ в точке A с координатами $(x_0, f(x_0))$ проводится касательная.
Абсцисса x_1 точки пересечения этой касательной с осью OX является новым приближением корня.

Из рисунка следует, что $x_1 = x_0 - CB$

$$\text{Из } \triangle ABC: CD = \frac{AB}{\operatorname{tg} \angle ACB}. \quad \text{Но } \operatorname{tg} \angle ACB = f'(x_0), \quad AB = f(x_0).$$

Следовательно, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Аналогично, для i -го приближения можно записать формулу итерационного процесса метода Ньютона:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i = 1, 2, \dots, \quad \text{где } x_0 \in [a; b]. \quad (3.13)$$

$$\text{Условие окончания расчета: } |\delta| \leq \varepsilon, \quad (3.14)$$

где $\delta = x_{i-1} - x_i = \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$ — корректирующее приращение или поправка.

Условие сходимости итерационного процесса:

$$|f(x) \cdot f''(x)| < (f'(x))^2 \forall x \in [a, b] \quad (3.15)$$

Если на отрезке существования корня знаки $f'(x)$ и $f''(x)$ не изменяются, то начальное приближение, обеспечивающее сходимость, нужно выбрать из условия

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0, \quad x_0 \in [a; b]. \quad (3.16)$$

т.е. в точке начального приближения знаки функций и ее второй производной должны совпадать.

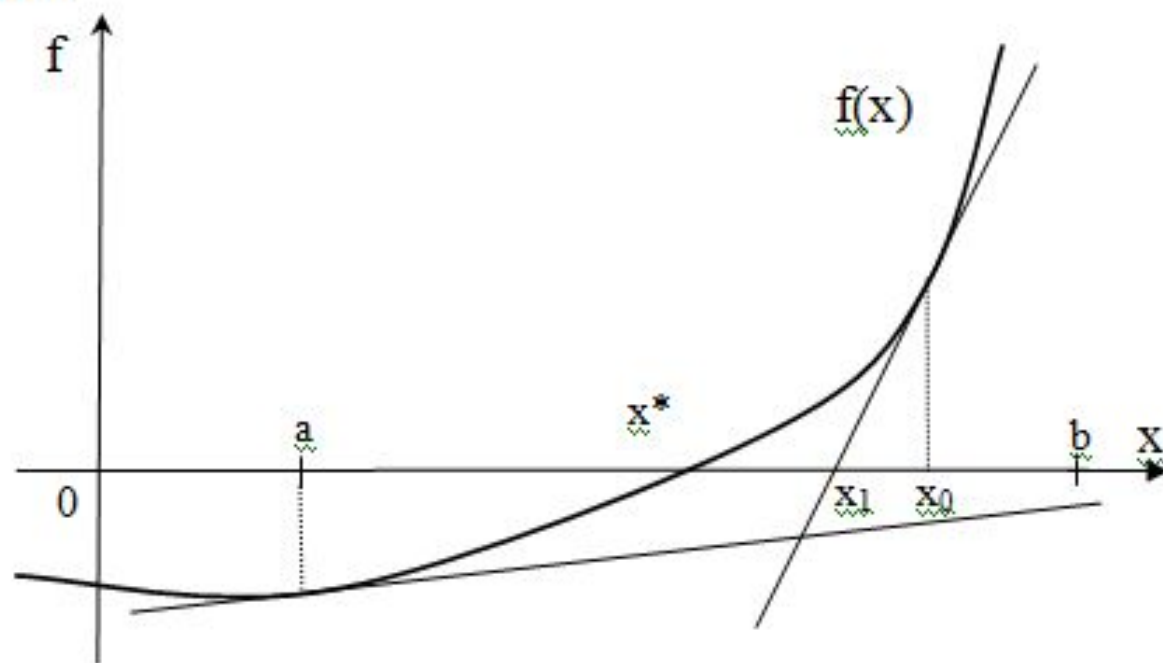


Рис. 3.13. Геометрическая иллюстрация выбора начального приближения: график $f(x)$ вогнутый, $f''(x) > 0$, тогда $x_0 = b$, т.к. $f(b) > 0$.

Если же выбрать $x_0=a$, то итерационный процесс будет сходиться медленнее или даже расходиться (см. касательную для $x_0=a$).

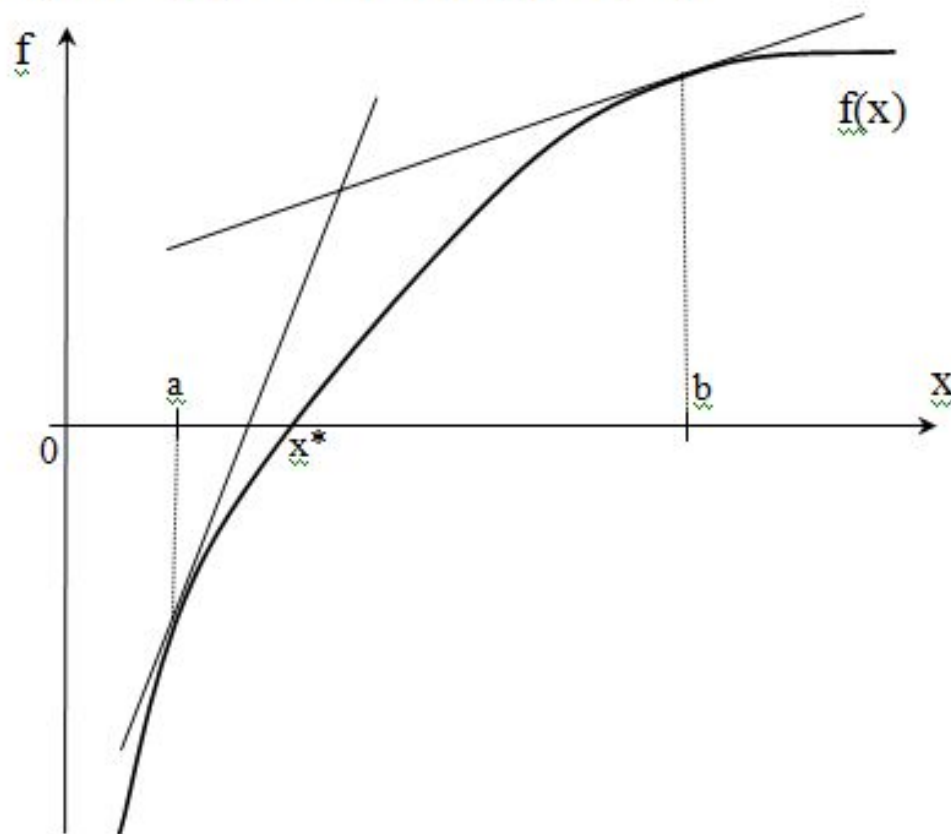
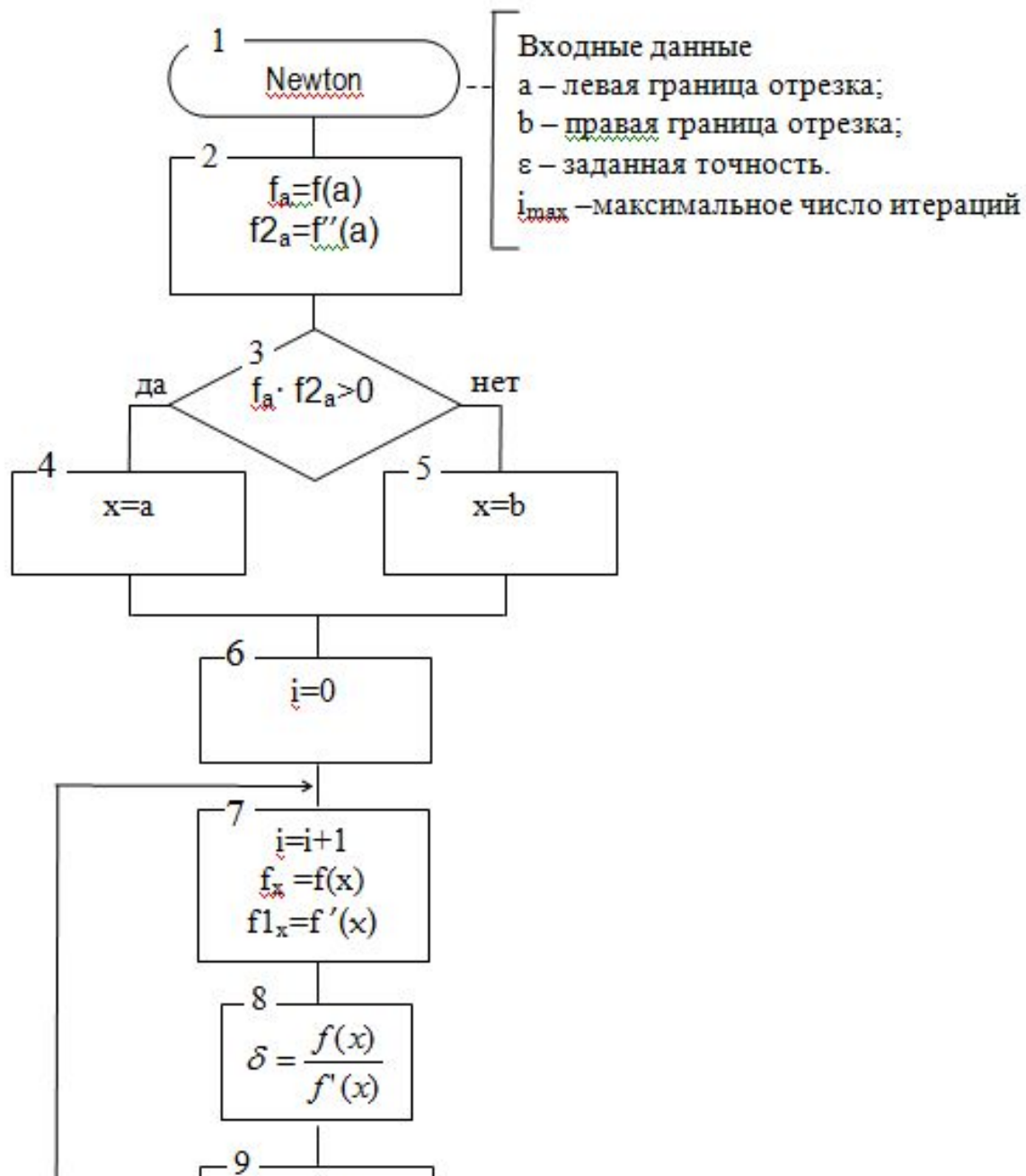


Рис. 3.14. Геометрическая иллюстрация выбора начального приближения: график $f(x)$ выпуклый, $f''(x) < 0$, тогда $x_0=a$, т.к. $f(a) < 0$.

Метод Ньютона в отличие от ранее рассмотренных методов используют свойства функции в виде значения производной, что значительно ускоряет

итерационный процесс. При этом, чем больше значение модуля производной в окрестности корня (чем круче график функции), тем быстрее сходимость.



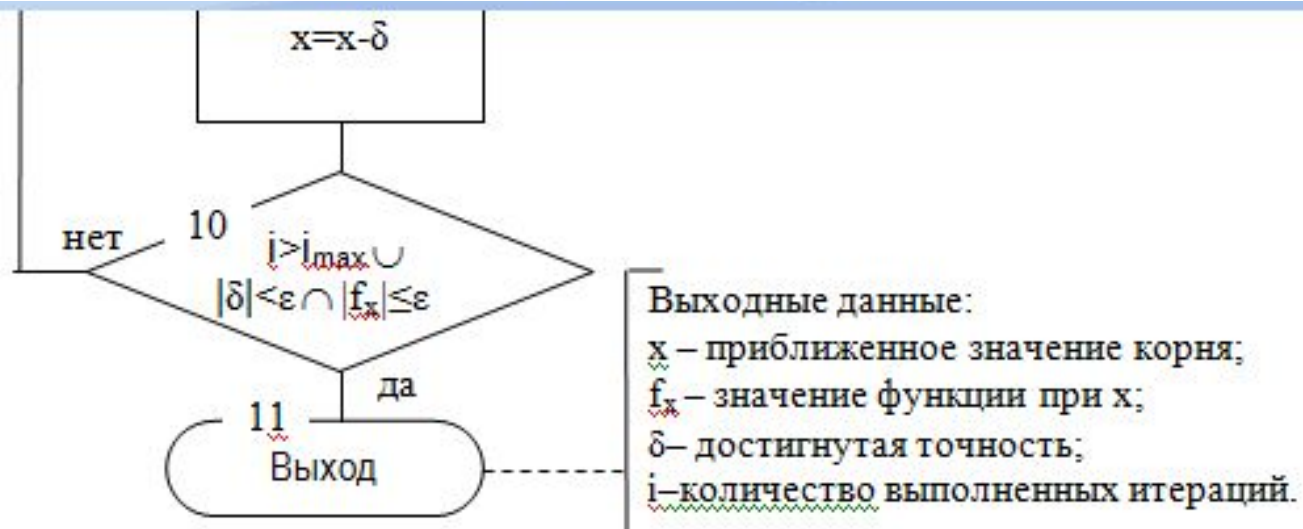


Рис 3.15. Схема алгоритма метода Ньютона:

Достоинства метода: высокая скорость сходимости; обобщается на системы уравнений.

Недостатки: сложный, т.к. требуется вычисление производных; сильная зависимость сходимости от вида функции и выбора начального приближения.

Пример 3.3.

Методом Ньютона уточнить корни уравнения $x^3 = 1 - 2x$ с точностью $\varepsilon = 0,001$. Корень отделён ранее (пример 3.1), $x^* \in [0,1]$.

Сначала нужно выбрать начальное приближение.

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$f''(x) = 6x$$

Производные имеют постоянный знак на отрезке $(0,1]$, поэтому для выбора начального приближения достаточно использовать условие (3.16).

Знак второй производной на отрезке положительный, следовательно

$$x_0 = b = 1, \text{ т.к. } f(b) = f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 - 1 = 2 > 0$$

Вычислим несколько приближений:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1^3 + 2 \cdot 1 - 1}{3 \cdot 1^2 + 2} = 1 - \frac{2}{5} = 0,6$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,6 - \frac{0,6^3 + 2 \cdot 0,6 - 1}{3 \cdot 0,6^2 + 2} = 0,6 - 0,135065 = 0,464935$$

$$x_3 = 0,464935 - 0,011468 = 0,453467$$

$$x_3 = 0,453463 - 0,0000695 = 0,453398$$

Решение получено за 4 итерации, так как поправка стала меньше заданной точности: $0,0000695 < \varepsilon$.